UNIVERSIDAD DE MURCIA

Geometría y Topología
9 de febrero de 2010

TEORÍA

Cuestión 1 (1 punto). **Proposición 2.2:** El conjunto $\mathscr{D}(p)$ de todas las derivaciones sobre $\mathscr{C}^\infty(p)$ tiene estructura de espacio vectorial. Si (U,φ), $\varphi = (x_1,\dots,x_n)$, es una carta local cuyo dominio contiene al punto p, entonces $\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}\big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\big|_p \}$ constituye una base.

Cuestión 2 (1 punto). **Proposición 5.1:** Un campo de vectores X sobre una variedad diferenciable M es diferenciable si, y sólo si, $X(f)$ es una función diferenciable para toda función diferenciable $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Cuestión 3 (1 punto). **Proposición 10.6:** La derivada de Lie $\mathscr{L}$ satisface las siguientes propiedades:
(1) $\mathscr{L}_{aV+bW} = a\mathscr{L}_V + b\mathscr{L}_W$, $a,b \in \mathbb{R}$.
(2) $[\mathscr{L}_V, \mathscr{L}_W] = \mathscr{L}_{[V,W]}$.
(3) $\mathscr{L}_V(df) = d(Vf)$.

PROBLEMAS

Problema 1 (2,5 puntos). Consideremos la función diferenciable $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = x + 2y^2 + 3z^3 - 6xy^2z^3.$$

a) Prueba que $M = f^{-1}(3)$ es una subvariedad 2-dimensional de $\mathbb{R}^3$.

b) Sea el punto $p = (1,1,0) \in M$. Encuentra una base del plano tangente $T_pM \subset \mathbb{R}^3$.

Problema 2 (2 puntos).

a) Sea $\mathbb{R}^3$ con las coordenadas cartesianas (x,y,z) y consideremos los siguientes campos de vectores:

$$X = y\partial_x - x\partial_y, \quad Y = z\partial_y - y\partial_z.$$

Calcula $[[X,Y],X]$.

b) Sea $\mathbb{R}^2$ con coordenadas cartesianas (x,y) y consideremos la siguiente 1-forma:

$$\sigma = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y.$$

¿Cómo se expresa σ en coordenadas polares (ρ,θ)?

Problema 3 (2,5 puntos). Sea la aplicación $\phi : (\mathbb{R}^2,(x,y)) \to (\mathbb{R}^2,(u,v))$ definida por

$$\phi(x,y) = (x-y, x+y).$$

Consideremos el tensor $T = u\,\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u - v\,\mathrm{d}v \otimes \mathrm{d}v \in \mathscr{T}_2^0(\mathbb{R}^2)$ y el campo de vectores $X = \partial_u$. Calcula los siguientes tensores:

a) ϕ^*T.

b) $\mathscr{L}_X T$.