UNIVERSIDAD DE
MURCIA

Geometría y Topología

24 de junio de 2010

TEORÍA

Cuestión 1 (1 punto). **Proposición 1.11 (La variedad producto):** Sean M y M' dos variedades diferenciables de dimensiones n y n', respectivamente. Entonces el producto cartesiano $M \times M'$ admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión $n+n'$.

Cuestión 2 (1 punto). **Proposición 2.3:** Un campo de vectores X es diferenciable si, y sólo si, $X(f)$ es una función diferenciable para toda función diferenciable f.

Cuestión 3 (1 punto). **Teorema 4.8:** Una variedad diferenciable M es orientable si, y sólo si, admite un atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ cuyas cartas están orientadas coherentemente.

PROBLEMAS

Problema 1 (2,5 puntos). Consideremos la función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1,\dots,x_n) = x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n - n\, x_1 x_2 \cdots x_n.$$

a) ¿Para qué valores de $c \in \mathbb{R}$ es $M_c = f^{-1}(c)$ una hipersuperficie de $\mathbb{R}^n$?

b) Consideremos la hipersuperficie $M_1 = f^{-1}(1)$ y sea el punto $p = (1,0,\dots,0) \in M_1$. Determina el hiperplano tangente a M_1 en el punto p.

Problema 2 (2,5 puntos). Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ y consideremos la aplicación diferenciable $\phi : D \to D$ definida por $\phi(x,y) = (x^2, 2x - y)$. Consideremos el tensor $T = x\, \partial_x \otimes dy$ y el campo de vectores $X = y\, \partial_y$. Calcula:

a) $\phi^* T$.

b) $\mathcal{L}_{\phi_* X} T$.

Problema 3 (2 puntos). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ el recinto delimitado por el triángulo T de vértices $(-1,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Demuestra directamente el teorema de Stokes para la región Ω, es decir, demuestra la igualdad

$$\int_\Omega d\omega = \int_T \omega,$$

para toda 1-forma $\omega = a dx + b dy$, donde (x,y) denota las coordenadas usuales de $\mathbb{R}^2$.