UNIVERSIDAD DE MURCIA

Geometría y Topología

8 de julio de 2010

TEORÍA

Cuestión 1 (1 punto). **Proposición 1.51:** Sea el conjunto TM definido por $TM = \cup_{p\in M} T_pM$. Entonces TM admite estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$, siendo n la dimensión de M. Esta variedad recibe el nombre de *fibrado tangente* de M.

Cuestión 2 (1 punto). **Lema 2.37:** Existe una única aplicación $\mathscr{C}^\infty(M)$-lineal $C : \mathscr{T}_1^1(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$, denominada *contracción (1,1)*, tal que $C(X \otimes \theta) = \theta(X)$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$.

Cuestión 3 (1 punto). **Proposición 4.17:** Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio de integración y f una función integrable. Se cumple lo siguiente:

(a) $\left(\inf_D f\right)\mathrm{vol}(D) \leq \int_D f\, dv \leq \left(\sup_D f\right)\mathrm{vol}(D)$.

(b) Si D es conexo y f es continua, entonces

$$\int_D f\, dv = f(p)\mathrm{vol}(D),$$

donde p es un punto del dominio D. Esta propiedad se denomina *propiedad del valor medio*.

PROBLEMAS

Problema 1 (2,5 puntos). Sea la aplicación diferenciable $\phi : GL(n) \to GL(n)$ definida por $\phi(A) = A^tA$, donde A^t indica la matriz transpuesta. Prueba:

a) Relativa a la identificación estándar $T_I(GL(n)) = \mathscr{M}(n)$, la aplicación diferencial en la matriz identidad $d\phi_I : T_I(GL(n)) \to T_I(GL(n))$ está dada por $d\phi_I(B) = B^t + B$.

b) La aplicación ϕ tiene rango constante $n(n+1)/2$.

c) Deduce que el grupo ortogonal $O(n) \subset GL(n)$ es una subvariedad compacta de dimensión $n(n-1)/2$.

d) Prueba que el subespacio tangente $T_I(O(n)) \subset \mathscr{M}(n)$ está formado por las matrices antisimétricas.

Problema 2 (2,5 puntos). Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ y consideremos la aplicación diferenciable $\phi : D \to D$ definida por $\phi(x,y) = (x^3, y)$. Consideremos el tensor $T = y\, \partial_x \otimes dy$ y el campo de vectores $X = x\, \partial_y$. Calcula:

a) ϕ^*T.

b) $\mathscr{L}_{\phi_*X}T$.

Problema 3 (2 puntos). ¿Cuál es el valor promedio de la suma de tres números no negativos cuando cada uno de estos varía de tal manera que la suma de sus cuadrados siempre es igual a la unidad?