UNIVERSIDAD DE MURCIA

Geometría y Topología

3 de septiembre de 2010

TEORÍA

Cuestión 1 (1 punto). **Proposición 1.49 (Teorema de la función inversa).** Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable y sea p un punto de su dominio. La aplicación diferencial df_p es un isomorfismo lineal si, y sólo si, existe un entorno U de p tal que $f|_U : U \to f(U)$ es un difeomorfismo.

Cuestión 2 (1 punto). **Proposición 2.28.** La aplicación diferencial cumple las siguientes propiedades:
(1) $d : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ es $\mathbb{R}$-lineal.
(2) Si $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)$, entonces $d(fg) = gdf + fdg$.
(3) Si $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ y $h \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ entonces $d(h \circ f) = h'(f)df$.

Cuestión 3 (1 punto). **Proposición 3.15.** Los operadores simetrización $\mathscr{S}$ y antisimetrización $\mathscr{A}$ cumplen:
a) $\mathscr{A}$ y $\mathscr{S}$ son proyecciones, esto es, $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$ y $\mathscr{S}^2 = \mathscr{S}$.
b) La imagen de $\mathscr{A}$ son las formas diferenciales.
c) La imagen de $\mathscr{S}$ son los tensores covariantes simétricos.

PROBLEMAS

Problema 1 (3 puntos). Considere el siguiente conjunto:

$$S_a = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 - z^2 + 2zt = a,\ y + 2z + 3t = 0\}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro a es S_a una subvariedad de $\mathbb{R}^4$? ¿De qué dimensión?

b) Consideremos la subvariedad S_1. Determine el espacio tangente a S_1 en el punto $p = (1,0,0,0)$ y halle una base.

Problema 2 (2 puntos).

a) Sea $\mathbb{R}^3$ con las coordenadas cartesianas (x,y,z) y consideremos los siguientes campos de vectores:

$$X = y^2\partial_x, \quad Y = z^2\partial_y, \quad Z = x^2\partial_z.$$

Calcula $[[X,Y],Z]$.

b) Sea $\mathbb{R}^2$ con coordenadas cartesianas (x,y) y consideremos la siguiente 1-forma:

$$\sigma = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y.$$

¿Cómo se expresa σ en coordenadas polares (ρ,θ)?

Problema 3 (2 puntos). Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$ y consideremos la aplicación diferenciable $\phi : D \to D$ definida por $\phi(x,y) = (x+y, xy)$. Consideremos el tensor $T = y\,\partial_x \otimes dy$ y el campo de vectores $X = y\,\partial_x$. Calcula:

a) ϕ^*T.

b) $\mathscr{L}_{\phi_* X}T$.