Félix C. Gómez de León
Antonio González Carpena

TEMA 0. INTRODUCCIÓN.

Curso de Resistencia de Materiales y cálculo de estructuras.

OPEN COURSEWARE
UNIVERSIDAD DE MURCIA

Índice.

EVALUACIÓN

- Examen final escrito (60%).
  - Preguntas a desarrollar.
  - Cuestiones breves
  - Problemas.
- Prácticas (20%).
- Seminario (20%).

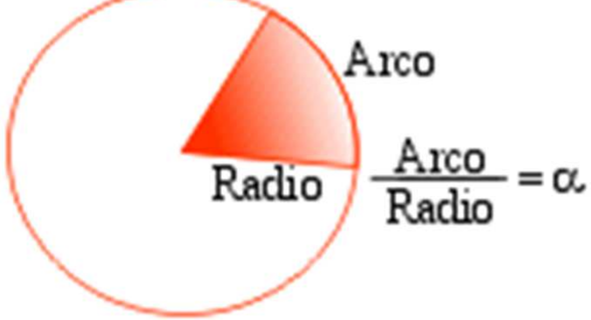
CONTENIDOS.

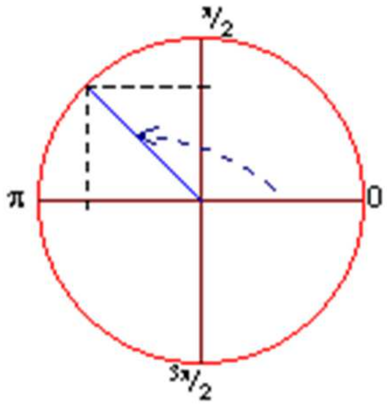
- Teoría.
  - Tema 0. Introducción de la asignatura.
  - Tema 1. Materiales en la Ingeniería.
  - Tema 2. Fundamentos de la resistencia de materiales.
  - Tema 4. Fundamentos del cálculo de estructuras.
  - Tema 5. Diseño de fundaciones en plantas industriales.
  - Tema 6. Soldadura.
  - Tema 7. Inspección de materiales.
  - Tema 8. Ensayos no destructivos.
- Prácticas.
  - Práctica 1. Cálculo de estructuras.
  - Practica 2. Cálculo de fundaciones.
  - Práctica 3. Soldadura e inspección radiográfica.
  - Práctica 4. Ensayos no destructivos.
- Seminario.
  - Participación en concurso de Puentes Universidad Miguel Hernández de Elche.

Funciones Trigonométricas.

Sistemas de Medición de Ángulos.

- **Sist. Sexagesimal:** En el sistema sexagesimal los ángulos se pueden expresar en grados ,minutos y segundos, divide a la circunferencia en seis partes de 60º cada una, obteniendo un giro completo de 360º.
- **Sist. Circular:** En este sistema la unidad de medida es el radián. La medida del ángulo se obtiene al dividir el arco y el radio de la circunferencia. Divide a la circunferencia en cuatro partes de 90º cada una, obteniendo un giro completo de 2π radianes.



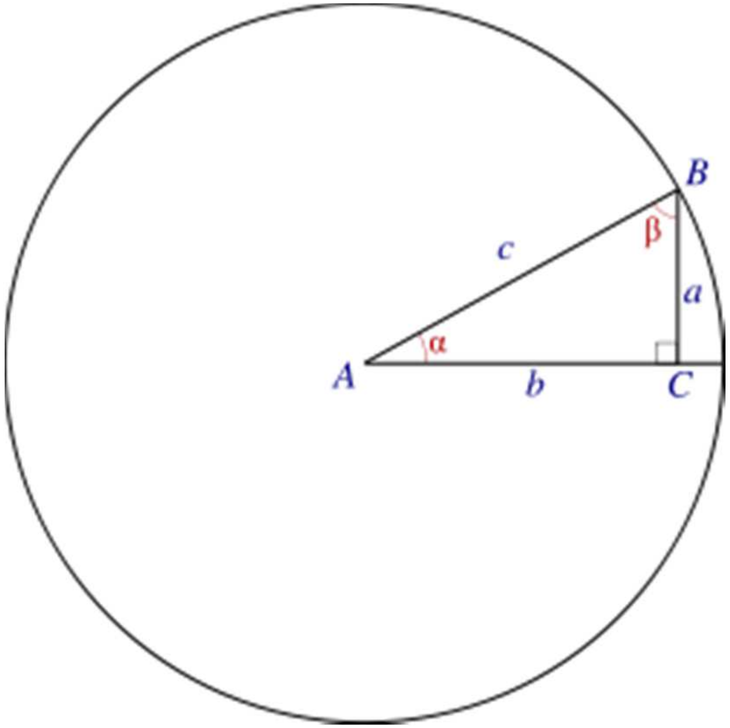


Funciones Trigonométricas. Directas e Inversas.

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{a}{c}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$



$$\csc(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{c}{a}$$

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{c}{b}$$

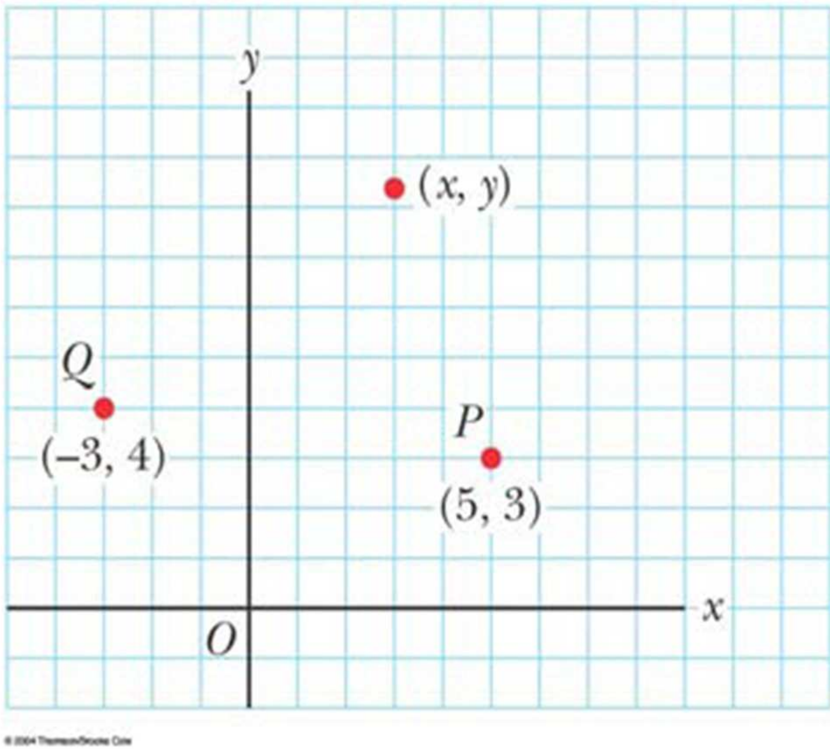
$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{b}{a}$$

Sistemas de coordenadas.

- Se utilizan para describir la posición de un punto en el espacio.
- Un sistema de coordenadas consiste en:
  - Un punto de referencia que llamaremos origen
  - Ejes específicos con escalas y etiquetas
  - Instrucciones de cómo designar un punto relativo al origen y a los ejes

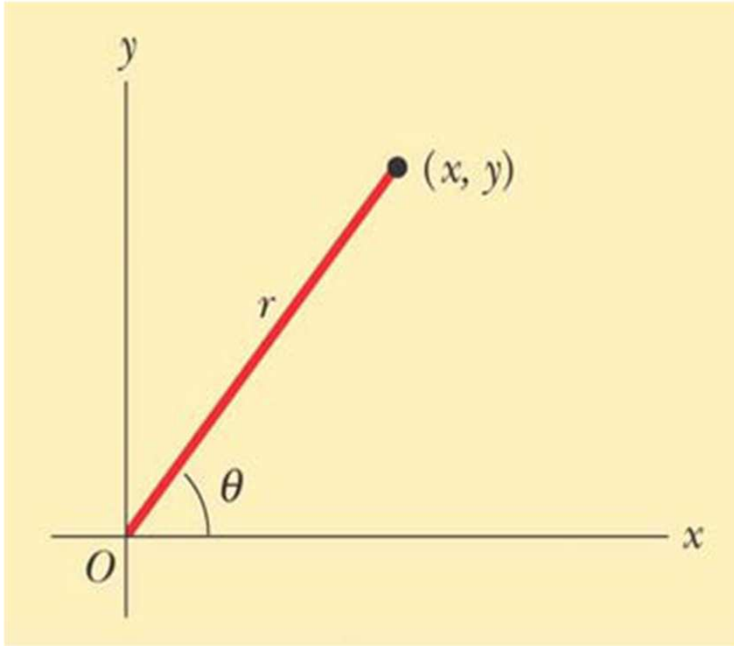
Sistema de coordenadas Planas. Cartesianas.

- También llamado sistema de coordenadas rectangular.
- Los ejes “x” e “y” se cortan en el origen
- Los puntos se designan (x,y)



Sistema de coordenadas Planas. Polares.

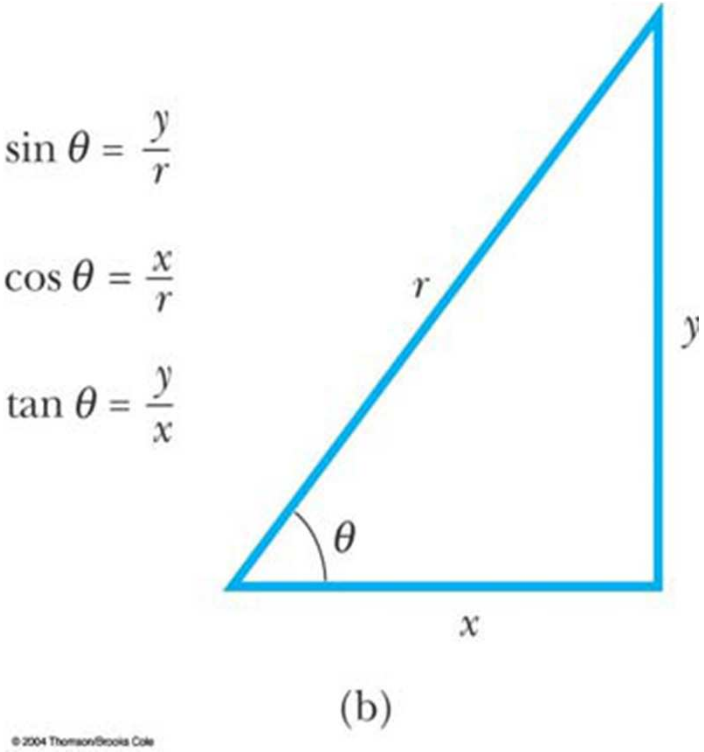
- Es necesario definir un origen y una línea de referencia
- El punto se define como la distancia r desde el origen en dirección del ángulo θ, en sentido antihorario desde la línea de referencia
- Los puntos se denotan como (r,θ)



(a)

Sistema de coordenadas planas. Polares & Cartesianas.

- Se basa en formar un triángulo rectángulo a partir de r y θ
  - $x = r \cos \theta$
  - $y = r \text{ sen } \theta$



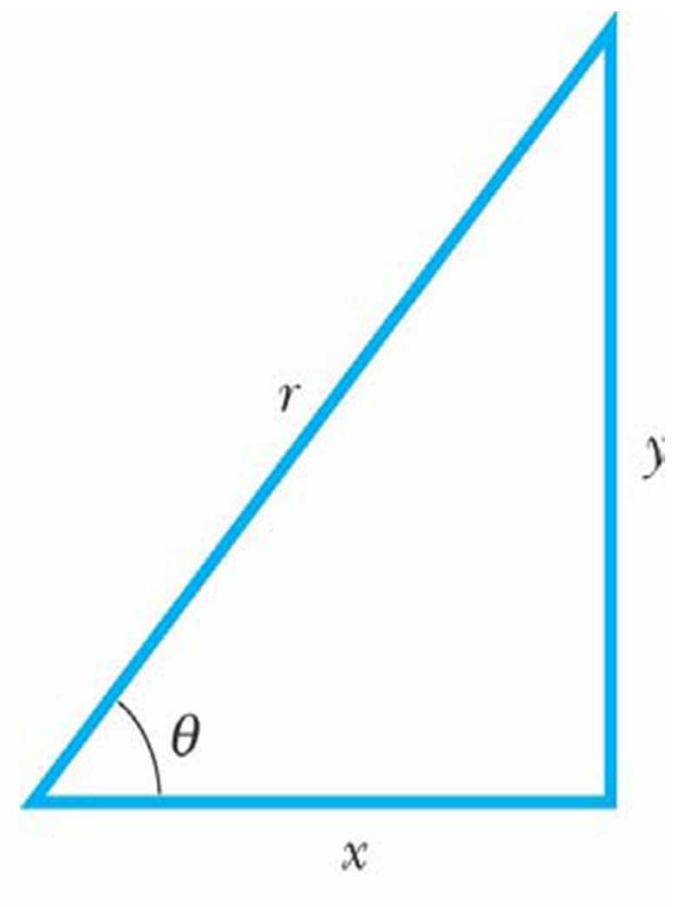
Sistema de coordenadas planas.

Cartesianas & Polares.

- r es la hipotenusa
  y θ es un ángulo

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

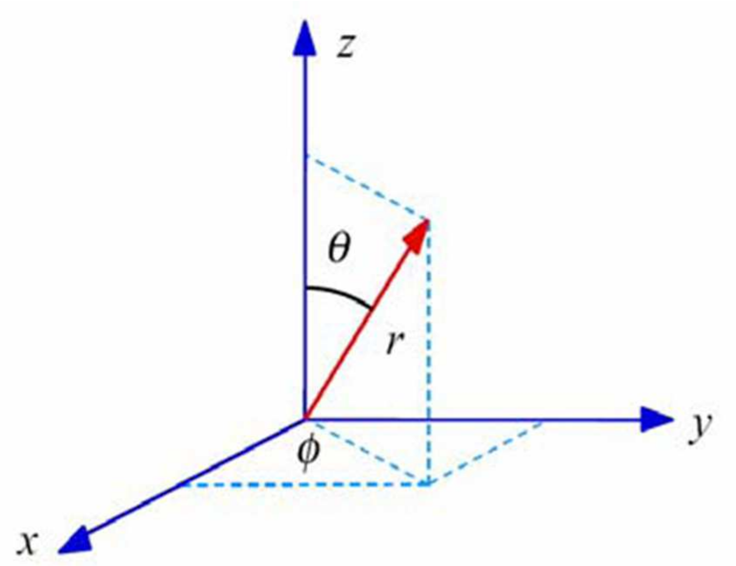
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



- θ se toma en sentido antihorario desde el eje X positivo

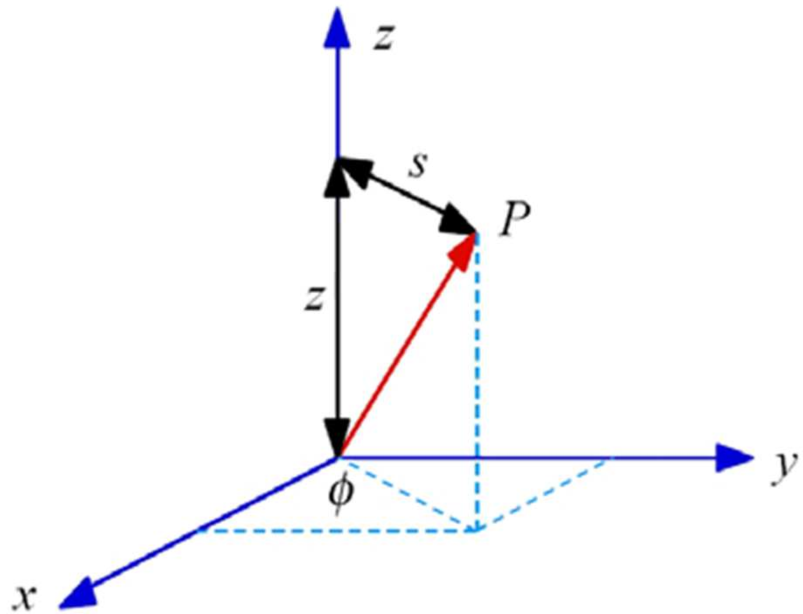
Sist. Coordenadas Tridimensionales. Esféricas.

- **Radio r:** distancia hasta P desde el origen.
- **Ángulo θ:** ángulo entre el vector de posición de P y el eje Z. (como la latitud).
- **Ángulo azimutal φ:** ángulo entre la proyección del vector de posición de P y el eje X. (como la longitud)



Sist. Coordenadas Tridimensionales. Cilíndricas.

- **Radio s:** distancia hasta P desde el eje Z.
- **Ángulo azimutal φ:** ángulo entre la proyección del vector de posición de P y el eje X. (como la longitud)
- **Coordenada z:** componente del vector de posición de P a lo largo del eje Z (igual que la coordenada z).



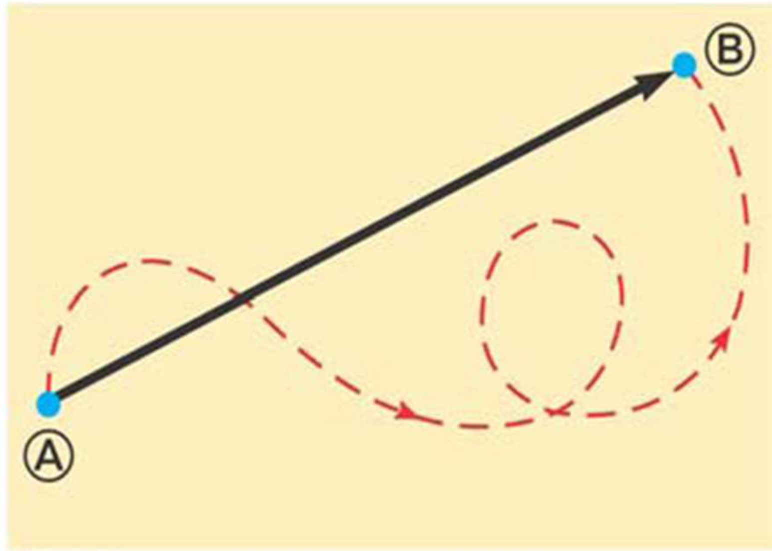
Vectores y Escalares.

- Una **magnitud escalar** está determinada completamente por un único número con las unidades apropiadas y no tiene dirección, ni sentido.
- Una **magnitud vectorial** está determinada completamente por un número con las unidades apropiadas (módulo), una dirección y un sentido

Vectores y Escalares.

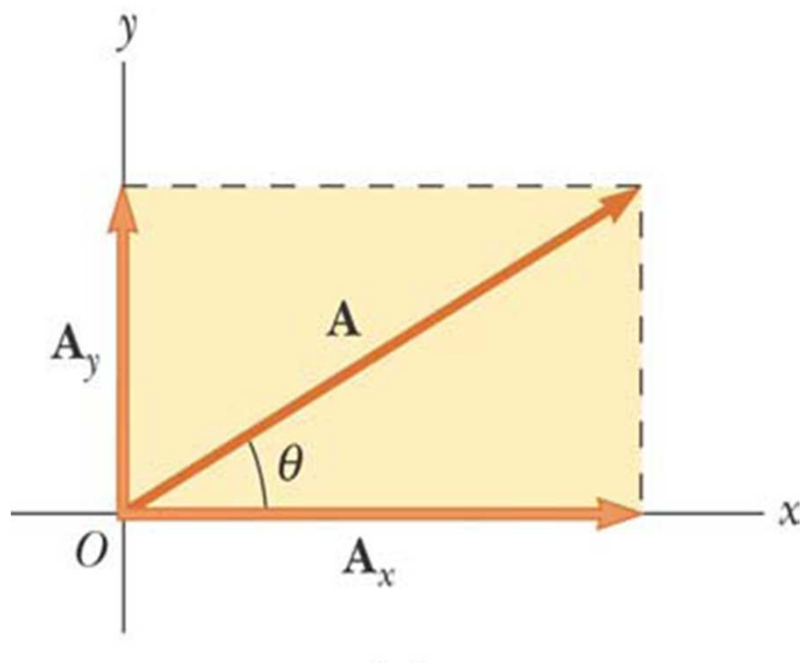
Ejemplo de vector.

- Una partícula viaja de A a B a lo largo del camino representado por la línea roja discontinua
  - esta es la **distancia que ha** recorrido y es un **escalar**
- El desplazamiento es la línea negra continua de A a B
  - El desplazamiento es independiente del camino que tomemos entre ambos puntos
  - El desplazamiento es un vector



Vectores y Escalares.
Componentes de un vector

- Un vector se puede expresar matemáticamente mediante sus **componentes**
- Es útil utilizar las **componentes rectangulares**
  - Éstas son las proyecciones en los ejes X, Y y Z



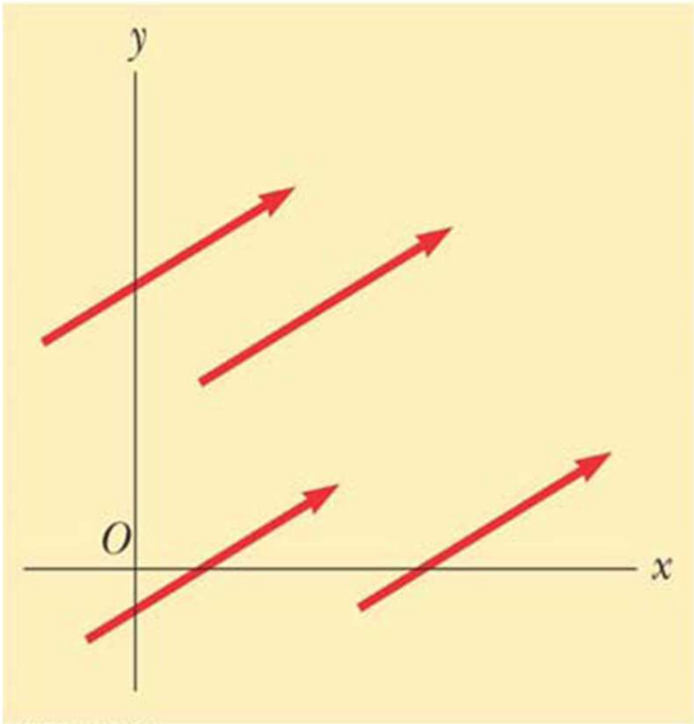
(a)

Problema 1.
Vectores y Escalares.

- Si los puntos que definen las piernas se identifican como los centros de las articulaciones del tobillo (Punto A origen) y la rodilla (Punto B extremo), definidos por sus componentes rectangulares A (3, 14, 8) y B (1, 8, 3). Hallar el vector que representa la porción de la pierna.

Vectores y Escalares.
Igualdad de dos vectores.

- Dos vectores son **iguales** si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido
- Todos los vectores que se muestran son iguales



Vectores y escalares.

Vectores unitarios.

- Un vector unitario es un vector sin unidades cuyo módulo es exactamente la unidad. Se utilizan para especificar dirección y sentido.
- Por ejemplo, dado un vector **a,** podemos hallar un vector unitario en la dirección y sentido de a, sin más que escribir:

$$\boxed{\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}$$

- Ejemplo: En el Problema 1 anterior, hallar el vector unitario.

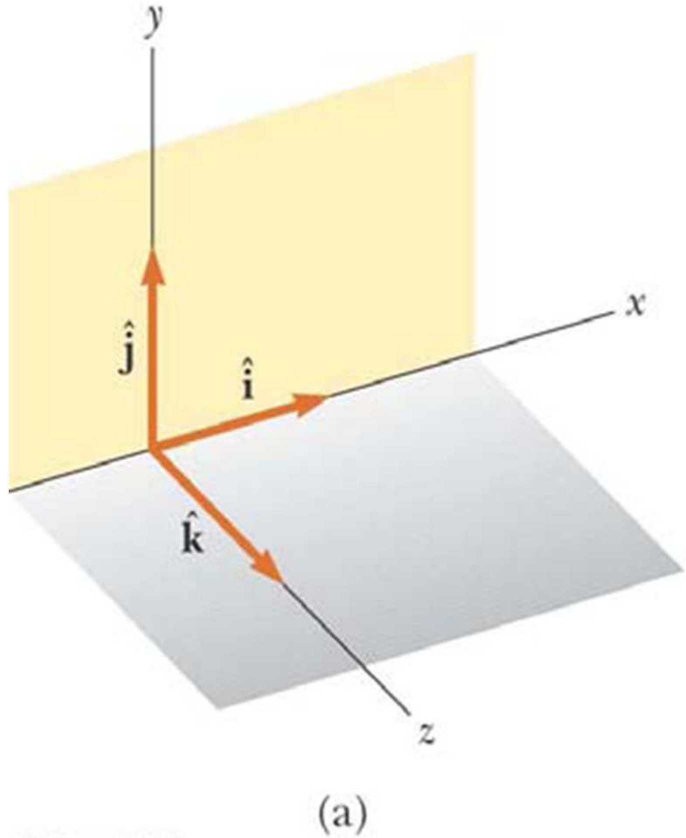
Vectores y escalares.

Vectores unitarios (2).

- Los símbolos

$$\vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\vec{k}$$

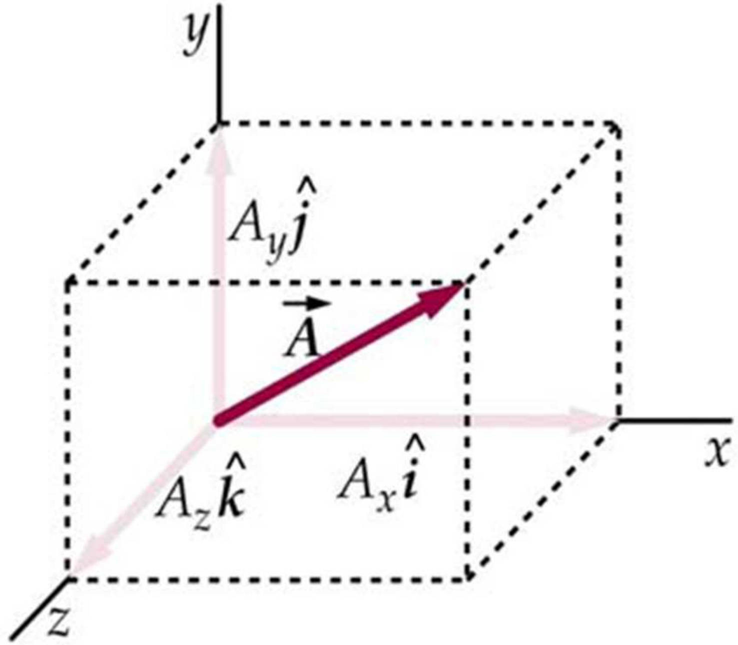
- representan a los vectores unitarios en un sistema de coordenadas rectangular
- Forman un conjunto de vectores unitarios perpendiculares dos a dos



Vectores y escalares.
Vectores unitarios (3)

- Para hallar las componentes de un vector, se proyecta éste en las tres direcciones X, Y y Z, hallando A_x, A_y y A_z y escribiendo el vector:

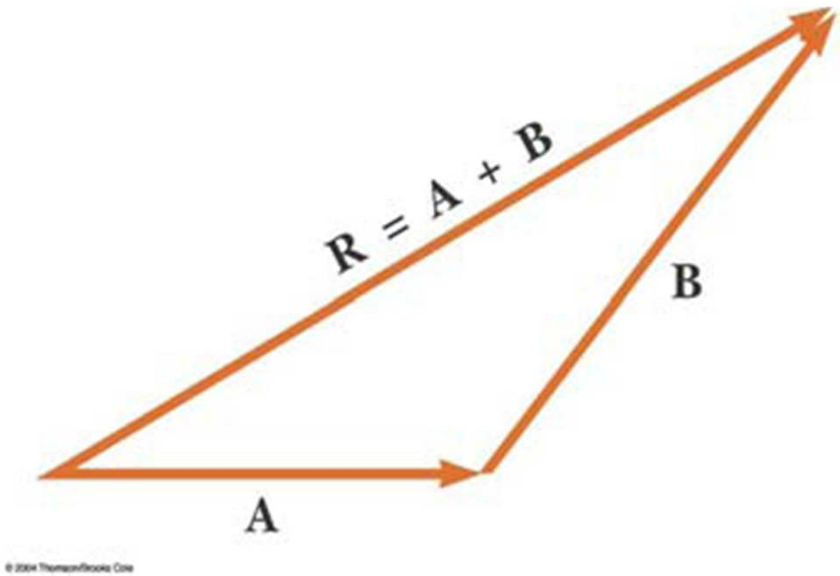
$$\boxed{\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}}$$



(b)

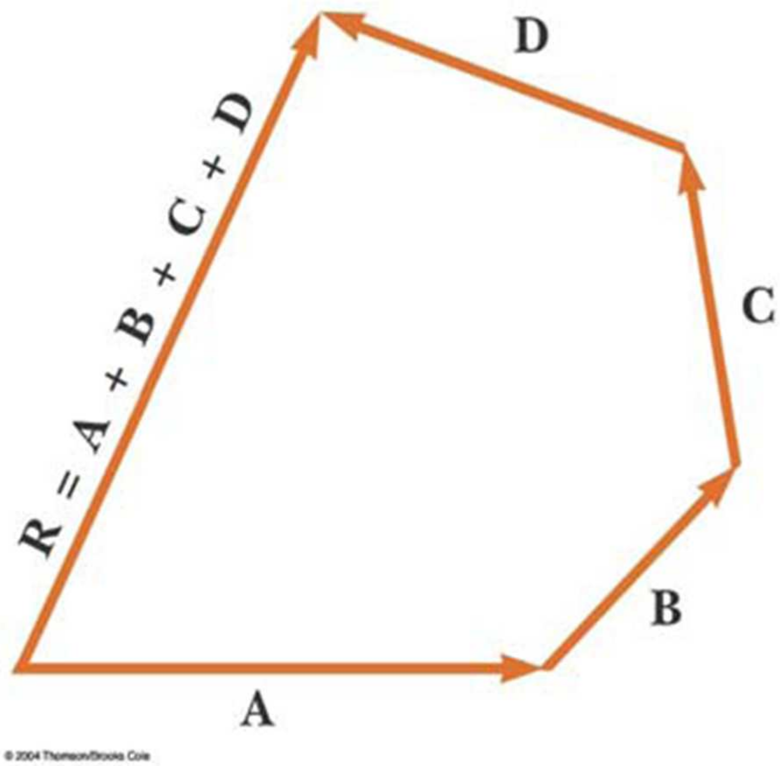
Operaciones con vectores.
Suma gráfica de vectores

- Dibujar los vectores del final de uno al origen del otro
- La resultante se dibuja desde el origen del primer vector hasta el final del último



Operaciones con vectores.
Suma gráfica de vectores (2)

- Cuando se tienen muchos vectores, se repite el proceso hasta que se incluyen todos ellos
- La resultante se dibuja desde el origen del primer vector hasta el final del último

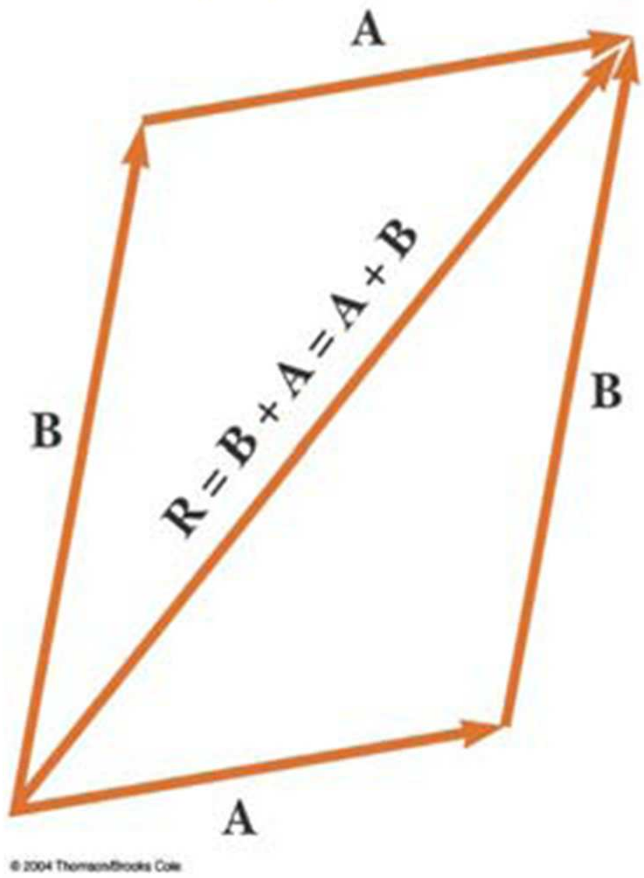


Operaciones con vectores.
Propiedades de la suma (1)

Propiedad conmutativa:

- La suma es independiente del orden de los vectores

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

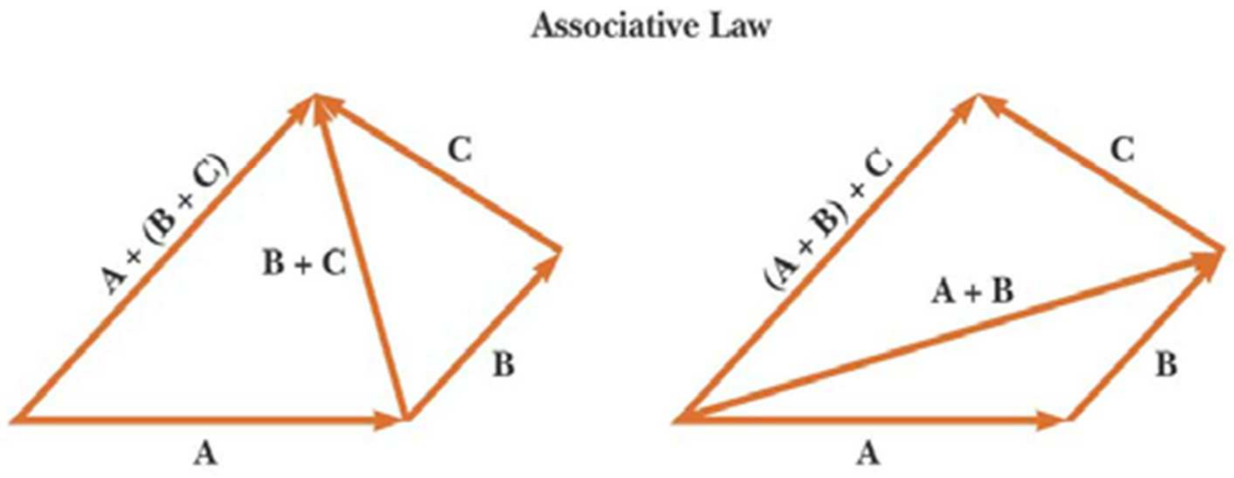


Operaciones con vectores.
Propiedades de la suma (2)

Propiedad asociativa:

- Cuando sumamos tres o más vectores, la suma es independiente de la forma en que los vectores se agrupan.

$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$$

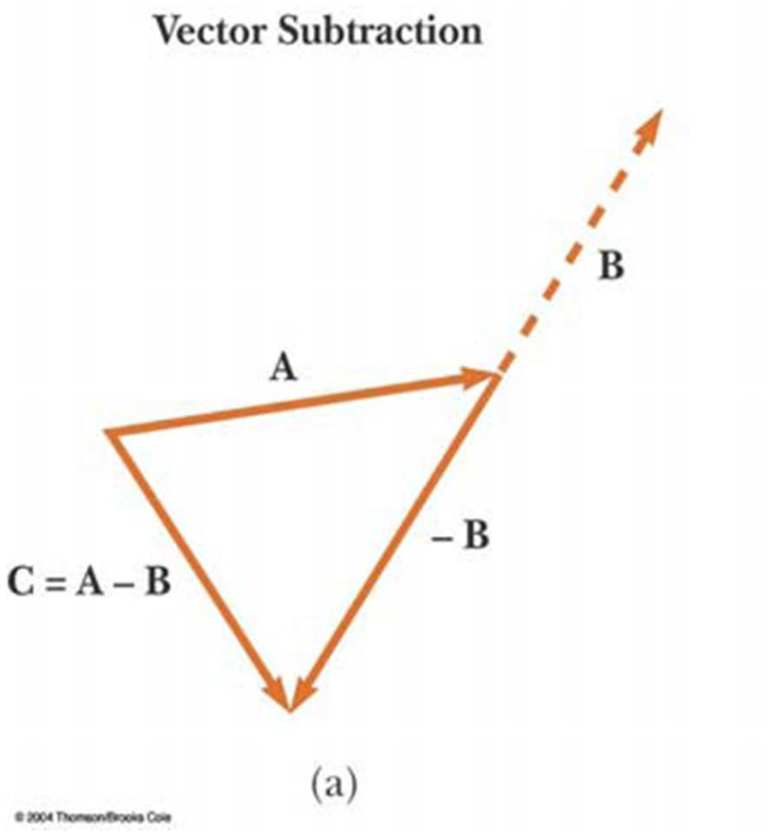


Operaciones con vectores.
Suma de vectores (final)

- Cuando se suman vectores todos ellos deben tener las mismas unidades.
- Todos los vectores deben tener las mismas magnitudes
  - Por ejemplo, no se puede sumar un desplazamiento a una velocidad

Operaciones con vectores.
Diferencia de vectores

- Es un caso especial de suma de vectores
- Para calcular **A – B,** se hace **A+(-B)**
- Continuar con el procedimiento estandar de suma de vectores



Operaciones con vectores.

Suma con vectores unitarios

- Tomemos **R = A + B**

$$\vec{R} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) + (B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$$

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} + (A_z + B_z)\vec{k}$$

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$$

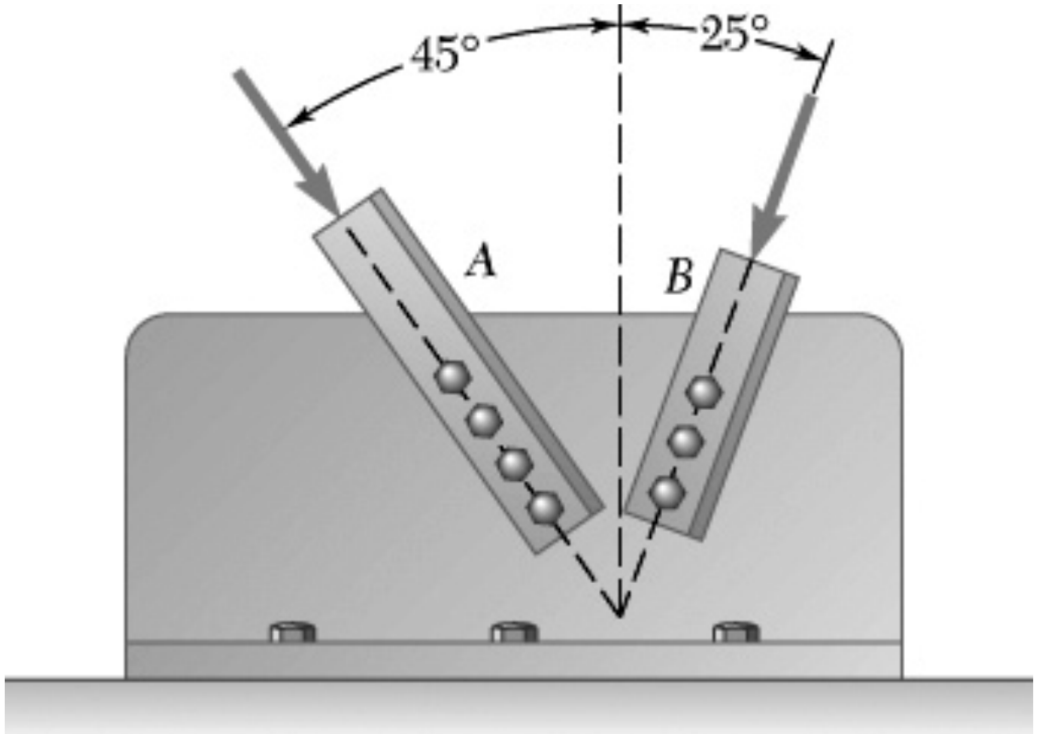
- así pues, $|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$

$$\theta_x = \arctan\frac{R_x}{|R|}$$

Operaciones con vectores.

Problema 2. Suma de vectores.

Dos montantes de una cercha A y B están atornillados al tirante como muestra la figura. Sabiendo que ambos están trabajando a compresión con una fuerza de 30 kN en A y de 20 kN en B, determinar, la magnitud y la dirección de la resultante.



Operaciones con vectores.

Multiplicar o dividir un vector por un escalar

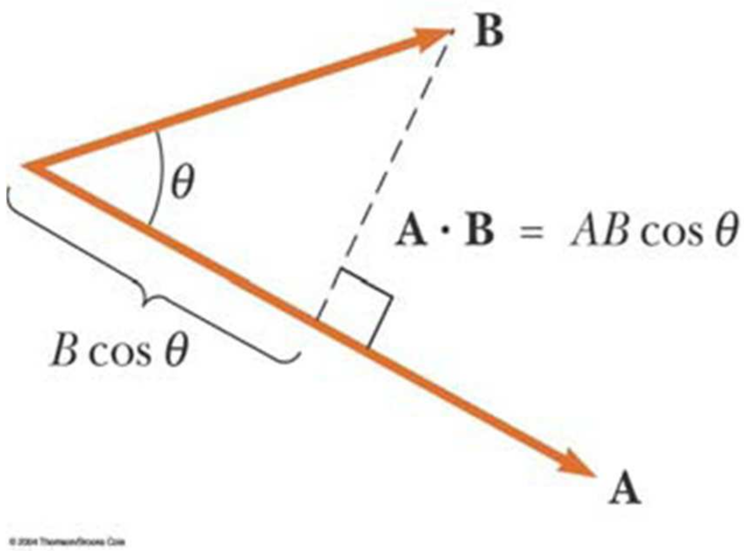
- El resultado de la multiplicación o de la división es un vector.
- El módulo del vector se multiplica o divide por el escalar.
- Si el escalar es positivo, la dirección y sentido del resultado son los mismos que los del vector original.
- Si el escalar es negativo, la dirección del resultado es la misma que la del vector original, pero su sentido es opuesto.

Operaciones con vectores.
Producto escalar.

- El producto escalar de dos vectores se escribe **A . B**
- Se define como:

$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta$$

  - θ es el ángulo entre A y B



- **¡Es un escalar !**

Operaciones con vectores. Producto escalar.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR.

- Propiedad conmutativa
  - **A . B = B . A**
- Propiedad distributiva
  - **A . (B + C) = A . B + A . C**

Operaciones con vectores.

Producto escalar.

PRODUCTO ESCALAR VECTORES UNITARIOS.

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=\hat{j}\cdot\hat{j}=\hat{k}\cdot\hat{k}=1$$

$$\hat{i}\cdot\hat{j}=\hat{i}\cdot\hat{k}=\hat{j}\cdot\hat{k}=0$$

- Utilizando la expresión de **A y B** en sus componentes

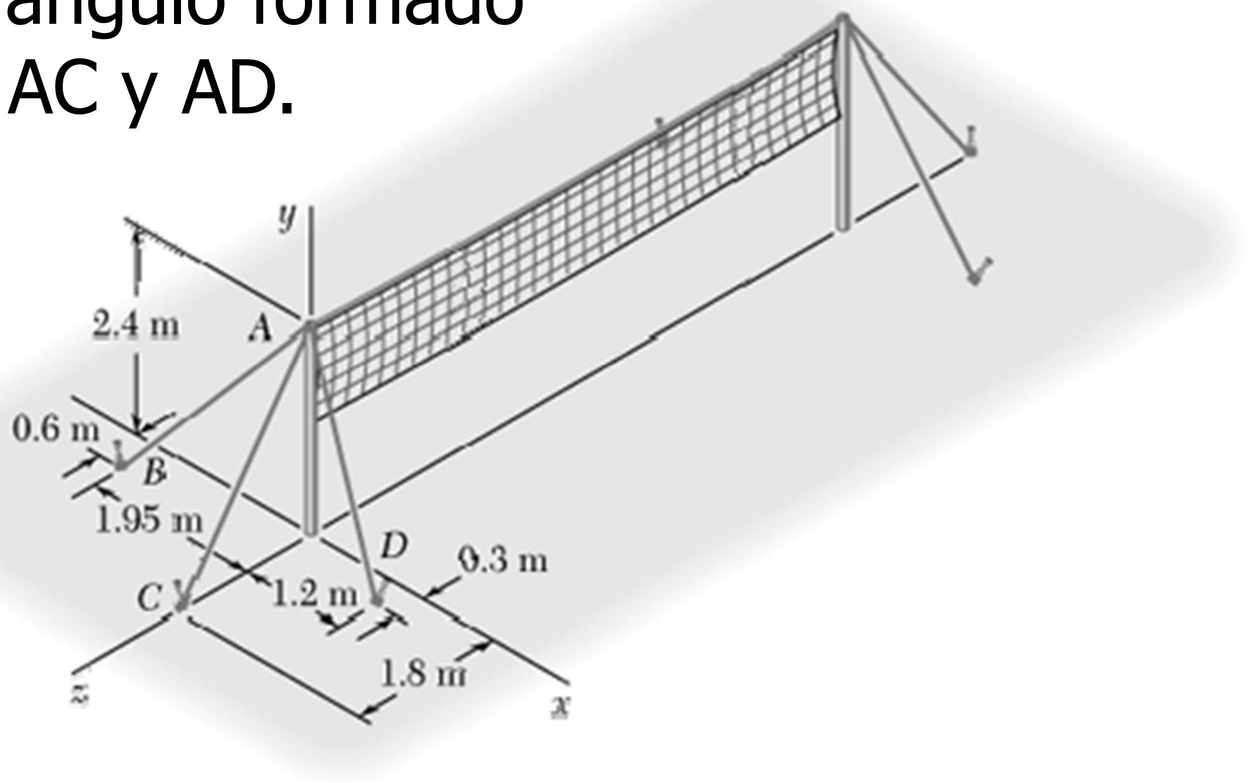
$$A=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$$

$$B=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$$

$$A\cdot B=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

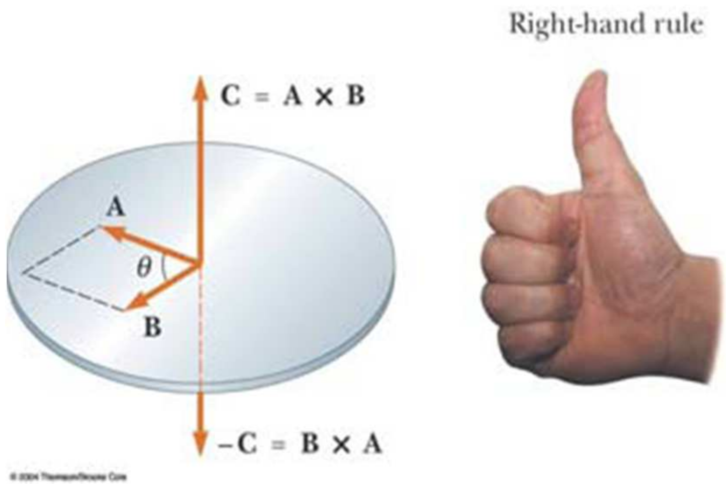
Operaciones con vectores.
Problema 3. Producto escalar.

- En la red de volleyball mostrada en la figura. Determinar el ángulo formado por los cables AC y AD.



Operaciones con vectores.
Producto Vectorial

- Dados dos vectores, A y B definimos producto vectorial como un vector, C=AxB con las siguientes características:
  - El módulo es: $\left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| sen\,\theta$
    donde θ es el ángulo entre A y B
  - La dirección es perpendicular al plano formado por A y B
  - El sentido viene dado por el sentido de avance del sacacorchos llevando el vector A hacia B
  - El módulo es igual al área del paralelogramo formado por **A y B**



Operaciones con vectores. Producto vectorial.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO VECTORIAL

- El producto vectorial no es conmutativo. El orden en el que los vectores se multiplican es importante.
- Al cambiar de orden aparece un signo menos
  A x B = - B x A
- Si **A** es paralelo a **B** (θ = 0º ó 180º), entonces
  A x B = 0
  - Por lo tanto, **A x A = 0**

Operaciones con vectores.
Producto vectorial.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO VECTORIAL

- Si **A es perpendicular a B,** entonces se cumple **|A x B| = AB**
- El producto vectorial cumple la ley distributiva **A x (B + C) = A x B + A x C**

Operaciones con vectores. Producto vectorial.

PRODUCTO VECTORIAL DE VECTORES UNITARIOS.

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}$$

Operaciones con vectores.
Producto vectorial.

PRODUCTO VECTORIAL DE VECTORES UNITARIOS.

- Los signos son intercambiables en el producto vectorial

$$\vec{A}\times\left(-\vec{B}\right)=-\vec{A}\times\vec{B}$$

$$\vec{i}\times(-\vec{j})=-\vec{i}\times\vec{j}$$

Operaciones con vectores.
Producto vectorial.

- El producto vectorial se puede expresar como:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}\hat{\mathbf{i}}-\begin{vmatrix}A_x & A_z\\ B_x & B_z\end{vmatrix}\hat{\mathbf{j}}+\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}\hat{\mathbf{k}}$$

- Expandiendo los determinantes nos da:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\hat{\mathbf{i}}-\left(A_xB_z-A_zB_x\right)\hat{\mathbf{j}}+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Operaciones con vectores.
Problema 4. Producto vectorial.

- Un plano contiene a los vectores A y B. Determinar el vector unitario normal al plano en los siguientes casos:
   a. A = 4i – 2j + 3k y B = -2i + 6j – 5k
   b. A = 7i + j – 4k y B = -6i – 3j + 2k