Mathematics and Mathematics Education I: magnitudes and measurement

Pedro Nicolás Zaragoza

Contents

CHAPTER 5

Una organización didáctica en torno a la medida de magnitudes en Educación Primaria

1. Introducción

En este último capítulo presentamos el diseño de una serie de actividades para el estudio de la magnitud *masa/peso* en Educación Primaria. Dicho diseño se ha hecho en base al Epistemological Reference Model (ERM) explicado en el Capítulo 4, y lo ha desarrollado María del Pilar López Guevara en su Trabajo Fin de Grado (curso 2012/13).

2. PM_0 y PM_1

2.1. PM_0.

2.1.1. *Tarea* T_1. **Ejercicio en el aula:**

Actividad 1: en esta primera aproximación a la magnitud considerada, el profesor va a presentar a los alumnos, divididos en grupos de cuatro, tres objetos diferentes para que los ordenen de mayor a menor peso. Dichos objetos han de ser "visualmente engañosos", es decir, que la diferencia de tamaño entre los mismos induzca a los alumnos a pensar que, por ejemplo, el más grande y voluminoso es también el más pesado.

En un primer momento, el profesor los muestra sin que los alumnos tengan contacto directo con los mismos, por lo que tendrán que ordenarlos ayudados solo por una estimación visual. A continuación cada grupo dice sus resultados en voz alta y, acto seguido, el docente reparte los objetos a los grupos para que los toquen, los cojan en peso,. . . y vuelve a pedirles que los ordenen.

Ante la similitud en cuanto a los pesos reales de los objetos propuestos, es probable que los alumnos tengan dificultades para afinar la diferencia entre los mismos, a pesar de estar manipulándolos y es, cuando surge este problema, el momento en el que el profesor les presenta un instrumento eficaz para compararlos: la balanza. Finalmente, los alumnos vuelven a ordenar de mayor a menor los tres pesos, pero esta vez ayudados de la balanza.

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá haber:

- Una balanza.

- Tres objetos de tamaños diferentes pero pesos similares, como por ejemplo: un diccionario grande "hueco", un estuche con piedras dentro y un pisapapeles pequeño pero pesado.

Explicación: Ante la T_1 propuesta, los alumnos deberán de hacer uso de técnicas apropiadas que consisten en comparar (mediante inspección visual primero y utilizando sus propias manos y una balanza después ($\tau_{0,2}$) tres objetos distintos, a, b y c, respecto de la magnitud G =peso y decir si uno es mayor que otro (relación $\prec$). Deberán de llegar a la conclusión de que tamaño y peso son independientes, es decir, que aunque sean cantidades presentes no pueden compararlas a simple vista y necesitan, para ganar precisión, un instrumento de medida.

2.1.2. *Tarea T_2.* **Ejercicio en el aula:**

Actividad 2: De cara a futuras actividades es conveniente que cada grupo de cuatro se divida ahora en dos equipos de dos alumnos (A y B). El profesor reparte a cada uno de los equipos un objeto de peso desconocido y ocho sacos de arena de pesos diferentes, sin especificarles el peso en gramos. Los alumnos tienen que colocar en un plato de la balanza el objeto de peso desconocido y, en el otro, deben ir adjuntando sacos de arena hasta que los dos platos queden al mismo nivel. Una vez conseguido esto, apuntan la equivalencia en un papel que utilizarán para actividades posteriores. Por ejemplo, pueden escribir notas del tipo: "Mi objeto X pesa un saco rojo, más un saco amarillo, más tres sacos naranjas".

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá haber:

- Dos balanzas.
- Papel y lápiz.
- Dos objetos de pesos desconocidos para los alumnos. El profesor podría repartir a cada grupo dos sacos de arena de pesos diferentes, por ejemplo, al equipo A uno de 810 g y al equipo B uno de 560 g.
- 16 sacos de arena, 8 para el equipo A y 8 para el equipo B, por ejemplo, de la siguiente manera:
  - Equipo A, debe de obtener los 810 g combinando y adjuntando los siguientes sacos:
    - Dos sacos rosas (de 50 g cada uno).
    - Dos sacos amarillos (de 60 g cada uno).
    - Tres sacos naranjas (de 150 g cada uno).
    - Un saco rojo (de 300g).
  - Equipo B, debe de obtener los 560g combinando y adjuntando los siguientes sacos:
    - Tres sacos azules (de 30 g cada uno).

- $*$ Dos sacos marrones (de 50 g cada uno).
- $*$ Dos sacos lilas (de 225 g cada uno).
- $*$ Un saco verde (de 300g).

Explicación: Ante la T_2 propuesta, los alumnos deberán de hacer uso de una técnica apropiada ($\tau_{0,1}$) que consiste en construir un objeto nuevo medible adjuntando dos o más objetos. Esta técnica tiene distintas posibles realizaciones según el modo de colocar los sacos en el otro plato. Por ejemplo, la técnica que consistiría en colocar los sacos al azar; la que estaría basada en colocar primero el mayor número posible de los sacos más grandes, luego el mayor número posible de sacos inmediatamente inferiores y así sucesivamente hasta llegar a los más pequeños que sirven para afinar la pesada.

2.1.3. *Limitaciones de la PM_0.* **Ejercicio en el aula:**

Actividad 3: El profesor quiere que los alumnos se percaten de las limitaciones que supone para la medida del peso el uso exclusivo de las técnicas de esta praxeología matemática, y los invita a reflexionar lanzándoles la siguiente cuestión: "Si quisierais doblar, triplicar, multiplicar por un número determinado de veces vuestro objeto de la actividad anterior con los materiales de los que disponéis, ¿podríais hacerlo?, ¿por qué?.

Materiales: Ninguno.

Explicación: El objetivo último de esta actividad es guiar las respuestas de los alumnos para que descubran que las técnicas basadas en la manipulación directa de los objetos tienen poco alcance. Esto se debe a que, por ejemplo, no se puede adjuntar un objeto a sí mismo (pues solo se trabaja con cantidades presentes) como tampoco se puede manipular un número grande de éstos (ya que es imposible comparar una gran cantidad de objetos de la cual no se dispone y, en caso de que se dispusiesen, no cabrían en el mismo platillo de la balanza).

2.2. PM_1.

2.2.1. *Paso de $S(G)$ a $MS(G)$.* **Ejercicio en el aula:**

Actividad 4: el profesor propone un juego de cartas con la finalidad de trabajar el peso de una manera simbólica (paso de $S(G)$ a $MS(G)$, ver $\theta_{1,1}$ en Capítulo § 4) y para ello, los grupos de cuatro vuelven a dividirse en equipos de dos alumnos (A y B). Se trata de un juego de memoria en el que las cartas están boca abajo y repartidas en dos grupos: en un grupo están las preguntas, en otro las respuestas, y en medio una tabla de equivalencias. Por ejemplo, el equipo A se encarga de empezar y toma una carta de la parte de las preguntas, que podría ser: ¿a cuántos sacos rosas equivalen 30 azules?, a continuación y, ayudándose de la tabla de equivalencias, dispone de un minuto para tratar de encontrar la solución. Pasado el tiempo, elige una carta de la parte de las respuestas, si la que toma considera que es la correcta, se la queda y si no, vuelve a poner las dos cartas boca abajo y pasa el turno al equipo siguiente. Para facilitar el recuerdo de los distintos resultados, proponemos que la cantidad de cartas, tanto en las preguntas como en las respuestas, no sea muy elevado (en torno a unas seis de cada). Una vez que todos los equipos han finalizado, el profesor dice los resultados en voz alta para que los comprueben y, por tanto, gana el equipo que más pares de cartas correctas haya acumulado.

Materiales:

- Reloj de arena o cronómetro para un minuto.
- Lápiz y papel para anotar los resultados.
- 6 cartas de preguntas:
  1. ¿A cuántos sacos rojos equivalen 30 marrones?
  2. ¿A cuántos sacos verdes equivalen 12 rosas?
  3. ¿A cuántos sacos rojos equivalen 7 verdes?
  4. ¿A cuántos sacos vedes equivalen 10 azules?
  5. ¿A cuántos sacos verdes equivalen 16 naranjas?
  6. ¿A cuántos sacos rojos equivalen 20 amarillos?
- 6 cartas de respuestas:
  1) 5
  2) 2
  3) 7
  4) 1
  5) 8
  6) 4
- Tabla de equivalencias:
  - 1 rojo = 6 rosas o 2 naranjas
  - 1 rosa = 1 marrón
  - 1 verde = 6 marrones o 5 amarillos
  - 1 amarillo = 2 azules

Explicación: Con esta actividad se pretende que los alumnos pasen de operar en PM_0 a operar en PM_1, es decir que pasen de manipular objetos a manipular símbolos que representan a dichos objetos. De esta manera se superan las limitaciones a las que previamente hacíamos alusión, pues ya pueden adjuntar objetos consigo mismos y manipular un número grande de estos.

2.2.2. *Limitaciones de las PM_0 y PM_1.* **Ejercicio en el aula:**

Actividad 5: El profesor pide a los alumnos que recuerden la actividad 2, en la que tenían que equilibrar la balanza adjuntando sacos de arena de diferentes pesos y les invita a que cada equipo utilice la nota escrita en dicha actividad para transmitir un mensaje al equipo contrario, indicándoles cuántos sacos de arena han necesitado para equilibrar la balanza con respecto al objeto de referencia. Por ejemplo, el equipo A podría escribir un mensaje del tipo: "Para equilibrar la balanza, hemos necesitado un saco rojo, tres naranjas y un amarillo." Y el equipo B, otro como: "Nosotros hemos utilizado un marrón, dos lilas y dos azules." Una vez que se intercambian los mensajes, el equipo A intenta adjuntar sus sacos en el plato de la balanza para reproducir el peso indicado por el equipo B y viceversa. Una vez construido, deben indicar cuál es mayor.

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá de haber:

- Dos balanzas.
- Los mensajes escritos en la actividad 2.
- Los dos objetos de referencia. Para el equipo A uno de 810 g y para el equipo B uno de 560 g.
- Los 16 sacos de arena, 8 para el equipo A y 8 para el equipo B, por ejemplo, de la siguiente manera:
  - Equipo A:
    - Dos sacos rosas (de 50 g cada uno).
    - Dos sacos amarillos (de 60 g cada uno).
    - Tres sacos naranjas (de 150 g cada uno).
    - Un saco rojo (de 300 g).
  - Equipo B:
    - Tres sacos azules (de 30 g cada uno).
    - Dos sacos marrones (de 50 g cada uno).
    - Dos sacos lilas (de 225 g cada uno).
    - Un saco verde (de 300 g).

Explicación: El profesor quiere que los alumnos se percaten de las limitaciones de las praxeologías matemáticas iniciales, relativas a que las técnicas empleadas en ellas pueden resultar poco prácticas en casos de comparación y a que no existe todavía una técnica que permita comunicar a un receptor lejano una cantidad de magnitud sabiendo que nos está entendiendo de manera efectiva. El principal problema que los alumnos encontrarán a la hora de enfrentarse a esta actividad será construir el objeto de referencia del equipo contrario a partir de los sacos de los que disponen. Esta dificultad radica en que no tendrán ningún saco en común y, por tanto, deberán darse cuenta de la necesidad de encontrar un grupo, no demasiado grande, de sacos comunes.

2.3. PM_2.

2.3.1. *Tarea* T_3. T3) Encontrar una familia, no demasiado grande, de símbolos $\{u_1, \ldots, u_n\}$ en $MS(G)$ de tal modo que la mayor parte de símbolos de $MS(G)$ se puedan escribir como combinación lineal de los $u_1, \ldots, u_n$ con coeficientes naturales.

Ejercicio en el aula:

Actividad 6: El equipo A pasa a tener acceso a los sacos de B y el equipo B pasa a tener acceso a los sacos de A. Los alumnos, utilizando la balanza, deben encontrar las equivalencias entre sus propios sacos y los del equipo contrario y, una vez establecidas, escribir un nuevo mensaje para que el grupo contrario pueda reproducir el peso indicado y establecer comparaciones. Por último, los alumnos se quedarán con el conjunto de sacos que ambos equipos hayan utilizado (generadores comunes) y descartarán los que no hayan empleado.

El equipo A sabe que su objeto de referencia pesa un saco rojo, más un saco amarillo, más tres sacos naranjas. Lo que hace entonces es utilizar la balanza para ir comprobando a cuántos sacos de B equivalen los suyos. Debe de llegar a las siguientes conclusiones y anotarlas en un papel para actividades sucesivas:

- 1 saco rojo (de A) = 1 saco verde (de B)
- 1 saco amarillo (de A) = 2 sacos azules (de B)
- 3 sacos naranjas (de A) = 2 sacos lilas (de B)

El equipo A escribe un nuevo mensaje a B en términos de sus sacos: "Nuestro objeto de referencia pesa un saco verde, dos sacos azules y dos sacos lilas". El equipo B ahora sí entiende el mensaje, al contrario que en la actividad anterior, por tanto toma los sacos indicados, los pone en un plato de la balanza y en el otro, su objeto de referencia. Una vez hecho esto, puede compararlos y observar que su objeto de referencia es menor, es decir, que pesa menos que el del equipo A.

Por su parte el equipo B, hace lo mismo. Sabe que su objeto de referencia pesa un saco marrón, dos sacos lilas y dos sacos azules. Utiliza la balanza para comprobar a cuántos sacos de A equivalen los suyos y llega a estas conclusiones, que debe anotar para actividades futuras:

- 1 saco marrón (de B) = 1 saco rosa (de A)
- 2 sacos lilas (de B) = 3 sacos naranjas (de A)
- 2 sacos azules (de B) = 1 saco amarillo (de A)

Una vez establecidas las equivalencias, B escribe un nuevo mensaje a A: "Nuestro objeto de referencia pesa un saco rosa, tres sacos naranjas y un saco amarillo". El equipo A lo entiende y pone, en un plato de la balanza los sacos indicados por B y, en el otro su objeto de referencia y comprueba así que este último es el mayor.

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá haber:

- Dos balanzas.
- Los mensajes escritos en la actividad 2.
- Papel y lápiz para escribir las equivalencias y los nuevos mensajes.
- Los dos objetos de referencia. El de 810 g del equipo A y el de 560 g del equipo B.
- Los 16 sacos de arena, los 8 del equipo A y los 8 del equipo B.

Explicación: Los alumnos resuelven el principal problema al que se enfrentaban en la actividad anterior, pues ya pueden reconstruir el objeto de referencia del equipo contrario al observar que existen equivalencias entre los sacos de ambos equipos. Utilizan un número de sacos que todavía es bastante amplio, pero lo irán reduciendo a lo largo de las sucesivas actividades. Lo importante es que los alumnos, tras esto, vean como con un único conjunto de generadores sí es posible comunicar a un receptor lejano una cantidad de magnitud dada, sabiendo con certeza que éste los va a entender y que podrá, por tanto, reproducir sus mensajes.

Los equipos A y B observan que existen equivalencias entre sus propios sacos y los del equipo contrario y que, una vez establecidas, hay 4 sacos (uno rojo, uno amarillo, uno azul y uno marrón) que no necesitan para expresar los objetos de A y de B. Eliminan esos 4, pasando de tener 16 sacos a tener 12.

2.3.2. *Tarea T_6.* T6) ¿Admite cada símbolo de MS(G) una única escritura como combinación lineal de un sistema de generadores dado?

Ejercicio en el aula:

Actividad 7: Los alumnos, que al comienzo de la secuencia de actividades tenían 16 sacos entre los de A y los de B, han visto reducido el número de los mismos a 12, tras la actividad anterior. El profesor propone ahora que pesen, con ayuda de esos 12 sacos, objetos cotidianos del aula como, por ejemplo, el libro de matemáticas y un pequeño diccionario. Es importante que todos los grupos tengan los mismos objetos. Los alumnos van a trabajar esta vez en sus grupos de cuatro, sin distinciones entre A y B. Cuando se dispongan a pesar, colocarán en un plato de la balanza el objeto en cuestión y, en el otro irán adjuntando los sacos para que quede equilibrada. Supongamos que el libro de matemáticas que van a utilizar pesa 750 g. El profesor pide a los alumnos que anoten cuántos sacos de cada color son necesarios para equilibrar la balanza y que den el resultado de la siguiente manera:

- El primer número que digan corresponderá al número de sacos azules.
- El segundo, al número de sacos rosas.
- El tercero, al número de sacos marrones.
- El cuarto, al número de sacos amarillos.
- El quinto, al número de sacos naranjas.
- El sexto, al número de sacos lilas. tem El séptimo, al número de sacos rojos.
- El octavo, al número de sacos verdes.

Por ejemplo, si un grupo pone un saco naranja, más un saco rojo, más un saco verde, su respuesta al profesor debería de ser:

$$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1).$$

Una vez que todos los equipos tienen sus equivalencias deben decir en voz alta los resultados para que el profesor los anote en la pizarra.

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá de haber:

- Una balanza.
- Los objetos de referencia a pesar, por ejemplo, el libro de matemáticas y el pequeño diccionario.
- Los 12 sacos de arena.

Explicación: Una vez que el profesor anote en la pizarra los resultados de los equipos, verán que éstos son diferentes y que las posibilidades de respuesta son muy amplias. Por ejemplo, pueden obtener resultados tan variados como (0, 0, 0, 0, 2, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 1), ... El profesor ha de hacer ver a los alumnos que, al principio, trabajar con tantos generadores puede estar bien porque da mucha libertad, pero al mismo tiempo también da problemas, como la existencia de escrituras distintas y muy extensas. Un ejercicio de síntesis, que reflexione sobre estos aspectos, motivará a los alumnos a reducir el número de generadores para disfrutar de sus principales ventajas que son: economizar la escritura y minimizar el número de escrituras posibles.

2.3.3. *Tarea T_4.* T4) Dado un sistema de generadores, ¿podemos reducir aún más el conjunto de los mismos?

Ejercicio en el aula:

Actividad 8: a fin de reducir el número de generadores, el profesor propone que cada equipo se quede solo con dos sacos. Para que la actividad tenga un razonamiento lógico y no se convierta la elección en algo aleatorio, los alumnos van a tener que analizar cada una de las posibilidades.

El equipo A verá que:

- Su saco rojo es igual al verde del equipo B y, por lo tanto, puede eliminar este último.
- Las otras dos equivalencias las comparte con el equipo B, por tanto, puede llegar al acuerdo con éste de que cada uno de ellos se centre en una equivalencia distinta. Por ejemplo, el equipo A se queda con la de tres naranjas = dos lilas. Como adjuntando tres sacos naranjas tenemos el mismo peso que al poner dos lilas, deben quedarse con la unidad más pequeña, en este caso, con un saco naranja.

Finalmente el equipo A tendrá dos generadores: un rojo y un naranja.

El equipo B, por su parte, hará lo mismo:

- Su saco marrón es igual al rosa del equipo A y, por lo tanto, puede eliminar este último.
- Trabaja con la equivalencia restante: dos azules = un amarillo. Como dos sacos azules pesan lo mismo que un amarillo, es mejor no incluir al amarillo como generador.

Por tanto, B tendrá como generadores a los sacos marrón y azul.

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá de haber: Las dos anotaciones tomadas en la actividad 6 donde aparecen las equivalencias entre los sacos de los dos equipos.

Explicación: Una vez que los alumnos han aceptado que el conjunto de generadores elegido previamente (el de los 12 sacos) tenía opción de ser reducido por los inconvenientes que generaba (escrituras distintas y poco económicas), con esta actividad han de reflexionar, apoyándose en argumentos lógicos arriba descritos, sobre dicho conjunto para intentar mejorarlo y así hacer más fácil el trabajo con el mismo.

2.3.4. *Tareas T_5 y T_7.* T5) Dado un sistema de generadores, ¿podemos expresar cada símbolo como combinación lineal de dichos generadores? Si no, ¿cuál es la combinación lineal de generadores que más se le aproxima?

T7) Dados dos sistemas de generadores, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\{v_1, \ldots, v_m\}$, por ejemplo uno que tenga el emisor y otro que tenga el receptor, ¿cómo expresar en términos de $\{v_1, \ldots, v_m\}$ los mensajes que vengan expresados en términos de $\{u_1, \ldots, u_n\}$?

Ejercicio en el aula:

Actividad 9: Ambos equipos deben utilizar sus generadores (sacos naranja y rojo para el equipo A y sacos azul y marrón para el equipo B) para mostrar que a partir de ellos pueden obtenerse el resto de sacos. Para llevar la tarea a cabo, los alumnos utilizan además de los sacos y la balanza, unas tuercas dadas por el profesor. En un plato de la balanza colocan un generador y en el otro van adjuntando tuercas hasta que quede equilibrada; una vez conseguido anotan en una tabla el resultado, que servirá como referencia para el resto de medidas. Vuelven a repetir el proceso, anotando en una columna de la tabla las tuercas a las que equivalen el resto de sacos y, en la otra, la fracción correspondiente con respecto al generador en cuestión. Por ejemplo, los generadores del equipo A son el saco naranja y el saco rojo. El primero de ellos pesa 30 tuercas y el segundo 60. Debemos construir dos tablas que muestren las equivalencias del resto de los sacos con respecto a estos dos:

Tabla 1: comparación del saco naranja (generador equipo A) con el resto de sacos.

Sacos	Tuercas	Comparación con el saco naranja (30 tuercas)
1.Amarillo	12	2/5
2.Rojo	60	2
3.Rosa	10	1/3
4.Azul	6	1/5
5.Verde	60	2
6.Lila	45	3/2
7.Marrón	10	1/3

Así:

1. El saco amarillo es 2/5 del naranja.
2. El saco rojo es el doble que el naranja.
3. El saco rosa es 1/3 del naranja.
4. El saco azul es 1/5 del naranja.
5. El saco verde es el doble que el naranja.
6. El saco lila es 3/2 del naranja.
7. El saco marrón es 1/3 del naranja.

Tabla 2: comparación del saco rojo (generador equipo A) con el resto de sacos.

Sacos	Tuercas	Comparación con el saco rojo (60 tuercas)
1.Amarillo	12	1/5
2.Naranja	30	1/2
3.Rosa	10	1/6
4.Azul	6	1/10
5.Verde	60	1/1
6.Lila	45	3/4
7.Marrón	10	1/6

Así:

1. El saco amarillo es 1/5 del rojo
2. El saco naranja es la mitad del rojo.
3. El saco rosa es 1/6 del rojo.
4. El saco azul es 1/10 del rojo.
5. El saco verde es igual que el rojo.

6. El saco lila es 3/4 del rojo.
7. El saco marrón es 1/6 del rojo.

Por su parte, el equipo B hará lo mismo usando sus generadores. Sabiendo que el marrón pesa 10 tuercas y el azul 6, construyen dos tablas como las anteriores que reflejen las equivalencias con respecto a los otros sacos:

Tabla 3: comparación del saco marrón (generador equipo B) con el resto de sacos.

Sacos	Tuercas	Comparación con el saco marrón (10 tuercas)
1.Amarillo	12	6/5
2.Rojo	60	6
3.Naranja	30	3
4.Rosa	10	1/1
5.Verde	60	6
6.Lila	45	2/9
7.Azul	6	3/5

Así:

1. El saco amarillo es 6/5 del marrón.
2. El saco rojo es seis veces el marrón.
3. El saco naranja es tres veces el marrón.
4. El saco rosa es igual que el marrón.
5. El saco verde es seis veces el marrón.
6. El saco lila es 2/9 del marrón.
7. El saco azul es 3/5 del marrón.

Tabla 4: comparación del saco azul (generador equipo B) con el resto de sacos.

Sacos	Tuercas	Comparación con el saco azul (6 tuercas)
1.Amarillo	12	2
2.Rojo	60	10
3.Naranja	30	5
4.Rosa	10	5/3
5.Verde	60	10
6.Lila	45	2/15
7.Marrón	10	5/3

Así:

1. El saco amarillo es el doble que el azul.
2. El saco rojo es diez veces el azul.
3. El saco naranja es cinco veces el azul.
4. El saco rosa es 5/3 del azul.
5. El saco verde es diez veces el azul.
6. El saco lila es 2/15 del azul.
7. El saco marrón es 5/3 del azul.

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá haber:

- Dos balanzas.
- Dieciséis sacos de arena (ocho en total para cada equipo y uno de cada color).
- Dos cajas de tuercas.
- Cuatro tablas vacías como las anteriores.

Explicación: A fin de reducir el número de generadores, debemos aumentar el campo numérico de nuestros escalares, pues si queremos reflejar el peso de todos los sacos utilizando solo cuatro de ellos, algunos de estos pesos no se van a poder expresar si solo utilizamos coeficientes naturales, pero sí se podrá si aceptamos trabajar con números racionales, ya que cuantos más coeficientes aceptemos, mayor será el conjunto de objetos medibles.

2.3.5. *Tarea T_6.* T6) ¿Admite cada símbolo de MS(G) una única escritura como combinación lineal de un sistema de generadores dado?

Ejercicio en el aula:

Actividad 10: Una vez que los alumnos han reducido el número de generadores y que han comprobado que a partir de ellos se pueden obtener todos los demás sacos, el profesor les recuerda la actividad 7 (§ 2.3.2) en la que tenían que pesar con ayuda de una gran cantidad de sacos, objetos cotidianos del aula como el libro de matemáticas. A continuación, les plantea la siguiente cuestión: "?Pensáis que ahora que el número de sacos es mucho menor se habrá resuelto el problema de las escrituras diversas y poco económicas que teníamos en la actividad 7?" Tras ello, les propone que vuelvan a realizar la misma actividad (colocar en un plato de la balanza el objeto en cuestión y en el otro adjuntar los sacos para que quede equilibrada) pero utilizando solo los cuatro tipos de generadores (aunque debe haber varios sacos de cada color). Esta vez:

- El primer número que digan corresponderá al número de sacos rojos;
- el segundo, al número de sacos naranjas;
- el tercero, al de sacos marrones, y
- el cuarto, al de sacos azules.

Una vez que todos los equipos tengan sus equivalencias volverán a decir en voz alta los resultados para que el profesor los anote en la pizarra.

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá haber:

- Una balanza.
- Los objetos de referencia a pesar, por ejemplo, el libro de matemáticas y el pequeño diccionario.

- Los sacos generadores: rojo, naranja, marrón y azul (debe haber varios sacos de cada color).

Explicación: Una vez que el profesor anote en la pizarra los resultados, verán que estos siguen siendo diferentes aunque las posibilidades de respuesta hayan disminuido. Por ejemplo, pueden obtener resultados como (1, 2, 3, 0); (0, 3, 3, 5); (2, 0, 0, 5); ... Esto hará darse cuenta a los alumnos de que a pesar de tener el mismo objeto para pesar y de haber reducido el número de generadores con respecto a la actividad 7, siguen obteniendo resultados distintos. Deberán de llegar a la conclusión de que si quieren tener una escritura única común a todos, necesitan un único generador.

2.4. PM_3.

2.4.1. *Tarea* T_8. T8) Fijamos un solo generador, u, y ampliamos el campo numérico hasta llegar a $\mathbb{Q}^+$ (números racionales positivos).

Ejercicio en el aula:

Actividad 11: El objetivo de esta actividad es que los alumnos elijan de entre los cuatro generadores "finalistas" (rojo, naranja, marrón y azul) el "ganador", es decir, el que utilizarán como unidad fundamental. Para ayudarles en esta elección, que no es aleatoria, el profesor hace que los alumnos recuerden el número de tuercas al que equivale cada uno de los cuatro sacos y les pide que lo especifiquen (saco rojo= 60 tuercas; saco naranja = 30 tuercas; saco marrón = 10 tuercas y saco azul = 6 tuercas). Tras ello, introduce un nuevo elemento, las monedas, y explica que cada tuerca equivale a 10 de ellas.

- Saco rojo=R
- Saco naranja=N
- Saco marrón=M
- Saco azul=A
- Tuercas=t
- Monedas=m
- R = 60 t
- N = 30 t
- M = 10 t
- A = 6 t
- t = 10 m

A continuación pasa a exponer la actividad principal, que va a consistir en hacer operaciones aritméticas utilizando los sacos, las tuercas y las monedas. Es fácil observar que hacer operaciones utilizando un conjunto mixto de unidades (sumando por ejemplo distantos múltiplos de los distintos sacos) es problemático. Se trata entonces de quedarnos con un solo saco. Uno que nos permita expresar el resto de sacos de manera sencilla. A la vista de las igualdades:

- $R = 6M$, $N = 3M$ y $A = \frac{6}{10}M = \frac{3}{5}M$
- $N = \frac{1}{2}R$, $M = \frac{1}{6}R$ y $A = \frac{1}{10}R$
- $R = 2N$, $M = \frac{1}{3}N$ y $A = \frac{6}{30}N = \frac{1}{5}N$
- $R = 10A$, $N = 5A$ y $M = \frac{10}{6}A = \frac{5}{3}A$.

parece razonable reducirlo todo o bien al M o bien al A. Teniendo en cuenta el orden de magnitud, es probable que la elección más razonable sea quedarse con el M.

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá haber: lápiz y papel para resolver las operaciones.

Explicación: Con esta actividad los alumnos verán la forma más adecuada para llevar a cabo la selección del generador fundamental, en este caso el marrón ya que las cuentas son mucho más fáciles. Una opción razonable hubiera sido quedarse con el azul por ser el más pequeño, pero el cambio de unidades es más complicado.

Ejercicio en el aula:

Actividad 12: Una vez que todos han entendido las razones por las cuales el saco marrón debe ser el fundamental, el profesor propone que utilicen las fracciones decimales para expresar los dos casos referentes a los sacos marrones de la actividad anterior (el 3 y el 7), todo en término de sacos marrones exclusivamente. Teniendo en cuenta que M=10 t y que t = 10 m, si queremos expresar a cuántas monedas equivale un saco diremos que a 100, y que una moneda son 1/100 sacos.

Conociendo esto diremos por ejemplo que

$$2M + 8t + 3m = (2 + 8/10 + 3/100)M = 2,83M$$

y que

$$5M + 7t + 2m = (5 + 7/10 + 2/100)M = 5,72M.$$

Los alumnos conocerán el por qué de esta actividad en la siguiente.

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá haber: lápiz y papel para resolver las operaciones.

Explicación: El fin de esta actividad es que los alumnos, más que considerar todos los racionales positivos como posibles coeficientes, consideren todos los del tipo $a \cdot 10^m$, $m \in \mathbb{Z}$, ya que esto está directamente relacionado con el hecho de que nuestro sistema de numeración es posicional en base 10.

Ejercicio en el aula:

Actividad 13: Durante esta última actividad, el profesor lleva a cabo la institucionalización del saber. En primer lugar, se realiza una lluvia de ideas en la que les pregunta a los alumnos si saben con qué unidad de las que utilizan en su vida diaria se podría relacionar "nuestro saco marrón". Es probable que salgan nombres como el gramo o el kilogramo y cuando esto ocurra, el profesor debe aprovechar la ocasión para explicar el kilogramo (kg), es decir, para decirles que lo que ellos ven como "saco fundamental", en realidad corresponde a una unidad de medida del Sistema Internacional, consensuado por toda la comunidad científica.

Debe explicar los submúltiplos del kilogramo: hectogramo, decagramo, gramo, decigramo, centigramo y miligramo y que, el hectogramo y el decagramo se corresponderían con las tuercas y las monedas, respectivamente, utilizadas en las actividades previas y que el resto de las unidades, corresponderían con otros objetos todavía más pequeños que las monedas.

Es importante que también señale cómo se hace el paso de una unidad a otra, en el caso del kilogramo, multiplicando por 10, al igual que ellos habían hecho en la actividad 11 y que el uso de fracciones decimales es muy común al hablar de pesos, como habían trabajado en la actividad 12.

Además, aunque la unidad fundamental sea el kilogramo, en la vida diaria y con objetos que normalmente tomamos en consideración, hay otra unidad cuyo uso está igual o más extendido que el kilogramo (por ejemplo en cocina) y es la milésima parte del mismo: el gramo.

Por último, sería conveniente mostrarles una balanza diferente a la de platos con la que han estado trabajando y que muchos probablemente conozcan, la balanza digital, que da directamente el peso en gramos.

Materiales: Balanza digital.

Explicación: Con la explicación del kilogramo como unidad fundamental, se superan todas las limitaciones de las PM anteriores, siendo capaz de resolver todas las tareas propuestas en este MER.