Mathematics and Mathematics Education I: magnitudes and measurement

Pedro Nicolás Zaragoza

Contents

CHAPTER 1

Introduction

During the academic year 2012/13 the course *Mathematics and Mathematics Education I* was taught for the first time in the Degree of Primary Education of the University of Murcia. The subject is homologue to *Matemáticas y su Didáctica I* but, unlike this one, it is taught in English. Therefore, to elaborate new resources written in this language seems particularly convenient.

In Chapter 2 we include some materials of the Unit 1 in the official curriculum of the course. In particular, we explain the basics of the Anthropological Theory of Didactic Phenomena which will be subsequently used in Chapters 4 and 5.

In Chapter 3 we explain fundamental concepts about magnitudes and measurement of magnitudes. This chapter provides the required bit of cultural information the teachers in Primary Education should have in mind before designing a study process about measurement of magnitudes.

The aim of Chapter 4 is twofold:

1) To exemplify the rather abstract (and crucial!) notion of Epistemological Reference Model explained in Chapter 2.
2) To give the required bit of *scientific* (*i.e.* coming from the science Mathematics Education) information the teachers in Primary Education should have in mind before designing a study process about measurement of magnitudes.

Finally, in Chapter 5 we show, in a concrete example of a design of such an study process, how to integrate the notions and tools explained in the three previous chapters.

The material of Chapters 3, 4 and 5 is part of the Unit 3 in the official curriculum of the course.

CHAPTER 2

Anthropological Theory of Didactic Phenomena

In this unit we give a short account of some basic notions of the so-called *Anthropological Theory of Didactic Phenomena*(=ATD).

1. Mathematical praxeologies

According to the ATD *didactic* means *related to the study of some questions.* Thus, all what is done in a certain institution in order to face problematic questions deserves the adjective "didactic". Tipically, the study takes place in a *community of study*, following a *study program*, and under the guidance of one or several *directors* of the community of study.

EXAMPLE 1.1.

- *The researcher undertakes a study activity, typically in a research group (*i.e. *the community of study), following a research program (*i.e. *the study program) under the supervision of one or several main researchers (*i.e. *the director(s) of study).*
- *The student equally undertakes a study activity, tipically in a class (people in the class constitute the community of study), following an official curriculum (*i.e. *the study program) under the supervision of a teacher (*i.e. *the director of study).*

Mathematics can be regarded both as an activity (namely, the study of some problematic questions) and the output of this activity (namely, a certain set of results, called *mathematical knowledge*, which can be organized in several ways).

EXAMPLE 1.2.

- *Activity: to study how to share out a certain amount equitably (*e.g. 57 *stickers among* 3 *children A, B and C)*
- *Possible resulting mathematical knowledge: a possible technique would be to give first a sticker to A, then 1 sticker to B, then 1 sticker to C, start again with A, and go on until I have no stickers left. (Needless to say, this technique has serious problems, but still it is a technique which sometimes works!)*
- *Another possible resulting mathematical knowledge: to subtract* 3 *to* 57 *as many times as possible, say n times. In this case I have to give n stickers to each child. (This technique always works.)*

EXAMPLE 1.3.
- *Activity: to look for a graphical system in order to represent natural numbers.*
- *Possible resulting mathematical knowledge: to write as many sticks as units are in the amount we want represent (*e.g. *IIIIII represents the number seven).*
- *Another possible resulting mathematical knowledge: the previous technique can be developed to get an additive system, which constitutes a new mathematical knowledge facing the same problematic activity.*

Mathematical knowledge can be organized in two levels:
- *praxis:* formed by *types of tasks*, plus the *techniques* to face these types of tasks.
- *logos:* the set of explanations intended to justify and support the validity of the techniques, to study the scope of the techniques,...

In fact, this two-levels organization turns out to be suitable for every human knowledge. We call *praxeology* a 3-tuple $(\{T_1, T_2, T_3, \dots\}, \tau; \theta)$ where T_i is a type of tasks, τ is a set of techniques to face the tasks, and θ is the corresponding logos.

Fundamental Postulate of the ATD: every human activity can be described in terms of praxeologies.

A *mathematical praxeology*(=MP) is a praxeology in which the techniques are of mathematical nature.

EXAMPLE 1.4.
- *Task: to subtract in our positional numeral system in basis 10.*
- *Technique: the borrowing algorithm (el algoritmo de "pedir prestado").*
- *Logos: using a very formal language, this can be summarized as follows*
  - $a \cdot 10^{n+1} + b \cdot 10^n = (a-1) \cdot 10^{n+1} + (10+b) \cdot 10^n$ *with* $1 \leq a, b \leq 9$.
  - *If* $1 \leq a < b \leq 9$, *then* $10 + a - b \leq 10 - 1 = 9$. *This ensures that, once the borrowing activity has ended, the result of every vertical subtraction we have to do (one for each power of 10) is a number between 0 and 9.*

EXAMPLE 1.5.
- *Task: to represent graphically the natural numbers.*
- *Technique: to write as many sticks as units (*e.g. *we write IIIIII for seven).*
- *Logos:* $\emptyset$.

EXAMPLE 1.6.
- *Task: to represent graphically the natural numbers.*
- *Possible techniques: the one corresponding to the additive, hybrid or positional system, using basis b.*
- *Logos: we have to prove that every natural number x can be expressed as a sum of powers of b.*

EXAMPLE 1.7.
- *Task: to calculate the gcd of two numbers.*
- *Technique: to find the decomposition of these numbers as a product of powers of prime numbers, and then the gcd will be the product of the common prime numbers to the smallest power.*
- *Logos: it has several complicated steps*
  1) *To prove that every natural number admit a decomposition as a product of prime numbers.*
  2) *To prove that the product of the common prime numbers to the smallest power does not depend on the decompositions. (Of course, this step woul be achieved if we were abel to prove that these kind of decompostions are always unique!)*
  3) *To prove that the product of the common primer numbers to the smallest power is the gcd.*

EXAMPLE 1.8.
- *Task: to calculate the gcd of two numbers.*
- *Technique: to use repeatedly the Eculidean division until we get a division whose remainder is 0.*
- *Logos: in a division with divisor D, dividend d, quotient q and remainder r, one has that $gcd(D, d) = gcd(d, r)$. Of course, this fact would require, in turn, additional logos!*

To do Mathematics is to put into practice a MP, and *to study Mathematics* is to construct (in the case of the researcher) or to reconstruct (in the case of the sudent) a MP in order to face some problematic tasks.

2. Didactic moments

The study process can be described in terms of six *didactic dimensions* or *didactic moments*. Each dimension can be lived with a different intensity, in several moments, as many times as needed along the study process, and it is even usual the combination of several dimensions at the same time. Anyway, it is important to notice that:

- Each of these dimensions has a specific role, a specific purpose, necessary for the good development of the study process.
- There exists a global internal dynamic which appears in certain relationships between these dimensions.

Chevallard [**3**, pages 249–255], describes the six dimensions of the process of study of a MP, say O, as follows:

1) The *first didactic moment* is the *first meeting* with the mathematical praxeology O. Such a first meeting can happen in different ways, but ideally, if one wants to stress the functional character of mathematics, this would be through the types of tasks. Unfortunately, it is rather frequent to have a first meeting with a mathematical praxeology via its logos part.
2) The *second moment* consits of the *exploration* of the types of tasks T_i and the *construction of techniques* suitable for this types of tasks.
3) The *third moment* is the corresponding *setting-up of the logos enviroment.*
4) The *fourth moment* is the *work of the technique*, which should improve this technique transforming it into a more powerful tool.
5) The *fifth moment* is the *institutionalization.* Here we have to make precise, after having been working for while in O, which are the definitive constituents conforming O. For example, it is probably that we'll have to rule out some weak techniques.
6) The *sixth moment* is the *evaluation*, closely related to the institutionalization. In practice, one always has to look at what has been learned, to evaluate to what extent our purposes have been fulfilled,...

3. Epistemological Reference Model

3.1. Definition.

DEFINITION 3.2. *An* Epistemological Reference Model(=ERM) *is made of:*

1) *A problematic initial question q, which involves one or more types of tasks.*
2) *A tree of MP in which:*
   - 2.1) *each MP can add new types of tasks to the set of types of tasks involved in q,*
   - 2.2) *each MP is a (perhaps partial) answer to q and to the new types of tasks created in a previous MP (in case there is a previous one),*
   - 2.3) *each MP appears as a development of a previous MP (in case there is a previous one) due to the limitations of this one to provide asnwers to some aspects of the types of tasks under consideration.*

REMARK 3.3. *In a ERM, every MP appears as a solution to a problem, and so its functional or practical character is underlined.*

An ERM allows:

- the design, the management and the analysis of a study process,
- to analyse the spontaneous 'epistemology' of a teacher, which usually reflects the dominant epistemological model in a scholar institution.

3.4. Example. Let us summarize the ERM about numeral systems developed in [**4**].

The initial question q is: *How to write natural numbers in a way useful for the development of elementary aritmetic?*

We can rephrase the initial question as a list of types of tasks:

T_1) To express natural numbers using symbols avoiding any ambiguity.
T_2) To express natural numbers using a small amount of symbols.
T_3) To express each natural numbers using a not very large chain of symbols.
T_4) To express natural numbers in such a way that comparaison is easy.
T_5) To represent natural numbers in such a way that it is possible to develope a reliable and economic algorithm for the addition.
T_6) Idem for the subtraction.
T_7) Idem for the multiplication.
T_8) Idem for the Euclidean division.
T_9) Idem for the calculus of divisors and multiples.

As an answer to this list of types of tasks we have consider a tree of MP:

$$\begin{tikzcd} MP_i \arrow[r] & MP_a \arrow[r] \arrow[d] & MP_h \arrow[r] & MP_p \\ & MP_r & & \end{tikzcd}$$

where MP_i corresponds to the initial numeral system, MP_a corresponds to the additive numeral system (for example the Egyptian), MP_r corresponds to the Roman numeral system, MP_h corresponds to the hybrid numeral system (for example the Chinese) and MP_p corresponds to the positional numeral system.

- Each MP had techniques allowing to face the types of tasks T_1 , . . . , T_9 to some extent.
- Each technique had its logos (except for those that, given its extreme simplicity, did not required a serious explanation, for example the technique facing T_1 in MP_i).

- The step from one MP to the following has been motivated for the quest of new better techniques.

3.5. ERM and didactic moments. An ERM allows to design a study process which pays attention to the sixt didactic moments:

- First meeting moment: starting with a ERM to design a study process allows a first meeting with the types of tasks to which the forthcoming techniques are answers. This emphasizes the functionality of mathematics.
- Exploration and elaboration of the technique: from the moment in which we face the tasks of q we start a quest of an asnwer.
- Setting-up of the logos enviroment: we look for an explanation of the technique.
- Work of the technique: we test the technique with several examples.
- Institucionalization and evaluation: we evaluate what we have done and we decide the elements (tasks, techniques, justifications) we keep and which are the elements we cast aside. The evaluation can be done under different criteria: pertinence of a tasks, scope or reliability or economy of a technique,... After the institucionalization and the evaluation we decide to go from one MP to another in the praxeological tree.

REMARK 3.6. *Sometimes the justitifcation of some technique τ can be regarded as a new task T_*. Thus, the technique τ_* developed to face T_* becomes a part of the logos corresponding to τ.*

4. Glossary

- *to add* = sumar
- *addend* = sumando
- *addition* = suma
- *additive* = aditivo/a
- *didactic* es un adjetivo en Inglés, y no un sustantivo. Así, no podemos traducir "Didáctica de las matemáticas" como "Didactic of Mathematics". La expresión que se usa en Inglés en lugar de "Didáctica de las matemáticas" es "Mathematics Education".
- *to divide* = dividir
- *dividend* = dividendo
- *divisor* = divisor
- *great common divisor (gcd)* = máximo común divisor (mcd)
- *hybrid* = híbrido
- *least common multiple (lcm)* = mínimo común múltiplo (mcm)
- *mathematical* = matemático/a
- *minuend* = minuendo

- *multiple* = múltiplo
- *to multiply* = multiplicar
- *numeral system* = sistema de numeración
- *praxeology* = praxeología
- *quotient* = cociente
- *remainder* = resto
- *to substract* = restar
- *substraction* = rest
- *subtrahend* = sustraendo
- *task* = tarea
- *technique* = técnica

CHAPTER 3

Measurement and magnitudes

1. Magnitudes: amount, measurement, unit and order

A *magnitude* is an attribute that can vary in amount, in a quantitative way. The *amounts of magnitude* are the values of these atributes. Thus, *to measure* an amount of magnitude is to determine the proportion of this amount with respect to a fixed amount taken as a reference, the so-called *unit of measurement*. Two objects have the same *order* according to a certain common magnitude (we speak of *order of magnitude*) if it is reasonable to measure their amount of magnitud by using the same unit of measurement.

2. Situations of measurement

There are two tipical situations in which measurement of magnitudes is involved:

1) To *communicate* to other people (far in space or in time) how many things we have, or which is the size of some object, or how the amounts change as a consequence of certain transformations. The impossibility of transporting some colections of objects in space or in time forces us to take a transportable object (the unit of measurement) which is then taken as a reference.
2) To *look for relations* between amounts of two or more magnitudes. This activity characterizes the experimental scientific work.

3. Precision and measuring errors

The *precision* of a measuring instrument is the minimal variation of amount of magnitude that can be determined without error. The preciser an instrument is, the bigger is the number of significant figures that can be obtained with it.

Example 3.1. *Imagine a meter in which all the milimeters appear. Then this meter has precision of one milimeter, since in the measurements we do with it we are not able to detect precisely differences of less than a milimeter.*

Assume we have a set of measurements x_1 , ... , x_n of amounts of a certain magnitude of an object. The *average value*, $\overline{x}$, of this set of measurements is

$$\overline{x} = (x_1 + \cdots + x_n)/n.$$

The *absolute error* $e_a(x_i)$ of one of this measurements x_i is:

$$e_a = x_i - \overline{x}.$$

The *relative error* $e_r(x_i)$ of one of this measurements x_i is:

$$e_r(x_i) = e_a(x_i)/\overline{x}.$$

The *dispersion error* e_d is:

$$e_d = (e_a(x_1) + \cdots + e_a(x_n))/n.$$

After several measurements and the calculation of the dispersion error, the *result of the measurement* must be expressed as the average value plus/minus the dispersion error:

$$\overline{x} + / - e_d.$$

EXERCISE 3.2. *Nine students have stimate the mass (generally refered to as 'weight') of an object. They have obtained the following weights (in kilograms):*

$$6.2\ ,\ 6.3\ ,\ 6.0\ ,\ 6.2\ ,\ 6.1\ ,\ 6.5\ ,\ 6.2\ ,\ 6.1\ ,\ 6.2$$

Determine the absolute and relative error of each measurement, and the dispersion error. Write the result of the measurement.

4. Measuring systems: regular/irregular, private/public

A measuring system is *irregular* if it uses units of measurement of different nature.

EXAMPLE 4.1. *Using sheets of papers, pencils and forks in order to measure lengths.*

This is problematic to calculate (how many forks fit in the length of a sheet of paper?). Thus, it is convenient to use a *regular* system.

EXAMPLE 4.2. *To measure lengths, one could use a sheet of paper, then half of the sheet, then the quarter of the sheet, and so on.*

It is easy to imagine good reasons for the use of a measuring system universally accepted. These measuring systems have the name of *legal*, as its use is regulated by laws.

The *Metric System* is our regular and legal measuring system. Is a decimalised measuring system, in the sense that the change from units to subunits, and vice versa, is done in tens in *linear* magnitudes (*e.g.* length), and in powers of ten in *multilinear* magnitudes (*e.g.* area, volume).

5. Fundamental or linear magnitudes vs. derivated or multilinear magnitudes

Once the unit of measurement is defined for certain magnitudes, one can define from them the corresponding units for other magnitudes. The first magnitudes are said to be *fundamental* (for example, length, time,...), and the second magnitudes are said to be *derivated* (for example, speed). When a magnitude is derivated from a single fundamental one and the unit of measurement of the derivated magnitude is 'several times' the unit of the fundamental one, then we say the fundamental one is *linear* (for example, length) and the derivated is *multilinear* (for example, area or volume).

REMARK 5.1. *The fact of being fundamental or derivated is not intrisic to the magnitude. A measuring system has to set precisely which are the fundamental magnitudes from which any other magnitude is to be derivated.*

6. International System of Units (SI)

6.1. Tables. This is the name adopted in the XI General conference of weights and measures (which took place in Paris in 1960) to set a universal measuring system, based on the mks (meter-kilogram-second) system. In this conference six fundamental and two complementary magnitudes where defined. In 1971 another fundamental magnitude was added, the *mole*. See the following table:

Magnitudes	**Name of the basic unit**	**Symbol**
Length	Meter	m
Mass	Kilogram	kg
Time	Second	s
Electric current	Ampere	A
Temperature	Kelvin	K
Amount of a chemical substance	Mole	mol
Luminous intensity	Candela	cd
Complementary magnitudes		
Planar angle	Radian	rad
Solid angle	Steradian	sr

In the following tabel we have multiples and submultiples:

10^n	Prefix	Symbol
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	hecto	h
10	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n

6.2. Metro. This unit was created by the French Academy of Sciences in 1791. It was originally defined as one ten-millionth of the distance from the Earth's equator to the North Pole (at sea level). Since 1983, it has been defined as *the length of the path travelled by light in vacuum during a time interval of 1/299792458 of a second.*

6.3. Second. For centuries, the time has been measured around the world using the rotation of the Earth. The second, the unit of time, was defined as 1/86400 of a mean solar day. However, the Earth rotation is not constant enough to be used as a reference to measure time. Thus, in 1967 the second was redefined using properties of the caesium atom: *the duration of 9192631770 periods of the radiation corresponding to the transition between the two hyperfine levels of the ground state of the caesium 133 atom.*

6.4. Kilogram. Is the only unit of measurement of the SI which is still defined by using a reference object, the so-called *International Prototype of the Kilogram*, instead of a fundamental physical property. This object is in the custody of the International Bureau for Weights and Measures (BIPM) who hold it on behalf of the General Conference on Weights and Measures (CGPM). After the International Prototype Kilogram had been found to vary in mass over time, the International Committee for Weights and Measures (CIPM) recommended in 2005 that the kilogram be redefined in terms of a fundamental constant of nature. At its 2011 meeting, the General Conference on Weights and Measures (CGPM) agreed in principle that the kilogram should be redefined in terms of the Planck constant, but deferred a final decision until its next meeting, scheduled for 2014.

7. Relationship between different magnitudes

7.1. Mass and weigth. The *mass* is the quantity of matter in an object. More specifically, *inertial mass* is a quantitative measure of an object's resistance to acceleration. In addition to this, *gravitational* *mass* is a quantitative measure that is proportional to the magnitude of the *gravitational force* which is

- exerted by an object (*active gravitational mass*), or
- experienced by an object (*passive gravitational force*)

when interacting with a second object.

Weight is the gravitational force acting on a given body –which differs depending on the gravitational pull of the opposing body (e.g., a person's weight on Earth vs on the Moon)– while mass is an intrinsic property of that body that never changes.

In other words, an object's weight depends on its environment, while its mass does not. On the surface of the Earth, an object with a mass of 50 kilograms weighs 491 newtons; on the surface of the Moon, the same object still has a mass of 50 kilograms but weighs only 81.5 newtons. Restated in mathematical terms, on the surface of the Earth, the weight W of an object is related to its mass m by W = mg, where g = 9.80665 m/s2 is the Earth's gravitational field, (expressed as the acceleration experienced by a free-falling object).

The identification of mass with weight at a popular level is very big. In schoolar practice it is very difficult to distinguish these two magnitudes. Moreover, many familiar tools intended to measure mass (*e.g.* balance scales = balanzas) are in fact tools to measure weight. Thus, it is not recomended to distinghish these two magnitudes in Primary Education.

7.2. Volume and capacity. *Volume* is the quantity of three-dimensional space enclosed by some closed boundary, for example, the space that a substance or shape occupies. Volume is often quantified numerically using the SI derived unit, the *cubic metre* m^3.

Capacity of a container is the amount of fluid (gas or liquid) that the container could hold, rather than the amount of space the container itself displaces.

Capacity is usually quantified numerically using the liter, l. A liter is a non-SI metric system unit of volume corresponding to 1 cubic decimetre, dm^3. That is to say, the volume of a closed container with a capacity of 1 liter is 1 dm^3.

7.3. Area and surface. A *surface* is a geometric object (a set of points satisfying certain properties) but not a magnitude. We can speak of planar surfaces, warped surfaces,...

Area is a quantity that expresses the extent of a surface or shape, or planar lamina. The area of a shape can be measured by comparing the shape to squares of a fixed size. In the International System of Units (SI), the standard unit of area is the *square metre* (written as m^2), which is the area of a square whose sides are one metre long.

8. Glossary

- *absolute error* = error absoluto
- *acceleration* = aceleración
- *active gravitational mass* = masa gravitacional activa
- *amount* = cantidad
- *amount of a chemical substance* = cantidad de sustancia química
- *ampere* = amperio
- *area* = área
- *attribute* = atributo
- *average value* = valor medio
- *candela* = candela
- *capacity* = capacidad
- *cubic* = cúbico/a
- *dispersion error* = error de dispersión
- *electric current* = corriente eléctrica
- *to exert* = ejercer
- *gravitational force* = fuerza gravitacional
- *inertial mass* = masa inercial
- *kilogram* = kilogramo
- *length* = longitud
- *linear* = lineal
- *luminous intensity* = intensidad luminosa
- *magnitude* = magnitud
- *mass* = masa
- *to measure* = medir
- *measure* = medida
- *measurement* = medición
- *measuring instrument* = instrumento de medida
- *measuring system* = sistema de medida
- *meter* = metro
- *metric system* = sistema métrico
- *milimeter* = milímetro
- *mole* = mol
- *multilinear* = multilineal
- *order* = orden
- *order of magnitude* = orden de magnitud
- *passive gravitational force* = fuerza gravitacional pasiva
- *planar angle* = ángulo plano
- *precision* = precisión
- *quantitative* = cuantitativo
- *quantity* = cantidad
- *radian* = radian
- *relative error* = error relativo

- *second* = segundo (como unidad de tiempo y como número ordinal)
- *solid angle* = ángulo sólido
- *square* = cuadrado
- *steradian* = estereoradián
- *temperature* = temperatura
- *time* = tiempo
- *unit* = unidad
- *unit of measurement* = unidad de medida
- *volume* = volumen
- *warped* = alabeado/a
- *weight* = peso

CHAPTER 4

ERM about measurement of magnitudes

According to Brousseau [**1**] there are three domains linked to the measurement of magnitudes, namely:

1) The domain of the specific measurable objects.
2) The domain corresponding to the process of defining the measurement map.
3) The domain of the numerical structure.

Despite these three domains are frequently presented to the students as disconected, they are strongly related, as can be seen in the ERM proposed in [**4**].

1. Description of the ERM

1.1. Initial praxeologies: MP_0 y MP_1. We consider a system $S(G)$ of objects $\{a_i\}_{i\in I}$ (specific material or mathematical objects) which can be measured according to some magnitude G.

We consider the following tasks, which conform our initial question:

T_1) To compare (present or absent) amounts of magnitude.

T_2) To construct an amount of magnitude equivalent to a given (present or absent) amount.

The initial techniques[1] to face these tasks consist of direct manipulation of objects:

$\tau_{0,1}$) We can construct a new measurable object attaching two or more objects (binary operation denoted by $a_i \oplus a_j$, only defined when $a_i \neq a_j$).

$\tau_{0,2}$) We can do a naive comparison (via visual examination, using an instrument -for example, a balance scale-,...) of two different objects, a y b, with respect to G and decide whether they are equivalent (in this case we write $a \sim b$) or one is smaller than the other (we write $a \prec b$).

The logos underlying these techniques is the following:

$\theta_{0,1}$) The binary relation $\sim$ in $S(G)$ is symmetric and transitive, namely, it satisfies:

- if $a \sim b$ then $b \sim a$,

[1] Warning about numbering: the subindex i, j in the technique $\tau_{i,j}$ means that it is the jth technique we have considered in the ith praxeology.

– if $a \sim b$ and $b \sim c$ then $a \sim c$.

$\theta_{0,2}$) The binary relation $\prec$ in $S(G)$ satisfies:
- if $a \prec b$ and $b \prec c$ then $a \prec c$,
- if $a \prec b$ then we do not have that $b \prec a$,
- for every pair of objects a , $b \in S(G)$ we have that, if $a \nsim b$, then either $a \prec b$ or $b \prec a$.

$\theta_{0,3}$) There is a certain compatibility between $\oplus$, $\sim$ and $\prec$. For example,
- if $a \sim b$ then $a \oplus c \sim b \oplus c$,
- if $a \prec b$ then $a \oplus c \prec b \oplus c$.

Thus, the first praxeology would be:

$$MP_0 = (\{T_1, T_2\}, \{\tau_{0,1}, \tau_{0,2}\}; \{\theta_{0,1}, \theta_{0,2}, \theta_{0,3}, ...\})$$

Example 1.2.
- *G=length.*
- *S(G)= several cardboard bands of different colors.*
- $\sim$*: two bands are equivalent if we check they have the same amount of length after putting them together.*
- $\prec$*: we have $a \prec b$ if after putting them together we check that a is shorter than b.*
- $\oplus$*= juxtaposition of bands, with coincidental tails.*

Example 1.3.
- *G=weight.*
- *S(G)= several objects with different amounts of weight, allowing the use of a scale.*
- $\sim$*: two objects are equivalent if they balance the scale.*
- $\prec$*: we have $a \prec b$ if, after putting a and b in the two pans of a balance scale, the pan of a falls more than the pan of b.*
- $\oplus$*= we put both objects in the same pan of the scale.*

We can see that the techniques based on direct handling have a small scope. For instance, the fact that one object can not be attached to itself might be a problem in order to check whether one object has twice the amount of magnitude of another one. It is also a problem the imposibility of handling a big set of objects (for example, because they do not fit all together in the pan of the scale).

We can find a solution to these problems after delving in the logos of the previous praxeology. The following would be part of the following logos:

$\theta_{1,1}$) When two objects a and b satisfy that $a \sim b$ we can consider they to be 'the same' object to some extent. Formally, this corresponds to go from $S(G)$ to the quotient set $MS(G) = S(G)/\sim$. Note that in this new praxeology we can write

green band = blue band,

not meaning that they are the same band but that they have the same amount of length.

This allows new techniques:

$\tau_{1,1}$) We go from $\oplus$ to a symbolic operation denoted by $+$. It is symbolic in the sense that it is made not with real fisical objects but with writings symbolizing fisical objects. Anyway, these writings can be names of fisical objects, *e.g.*

$$\text{green band} + \text{blue band} + \text{blue band}.$$

$\tau_{1,2}$) We go from $\prec$ to a symbolic operation denoted by $\leq$. Again, it is a symbolic operation in the sense that it is not applied to fisical objects but with writings. For example, we can write

$$\text{green band} \leq \text{blue band}.$$

This means that the amount of length of the green band is smaller or equal to the amount of length of the blue one.

EXAMPLE 1.4. *A student do the step from MP_0 to MP_1 when she stops to confine herself in the realm of fisical objects and starts to handle symbols. For example, assume we are studying the magnitude length using a set of cardboard bands:*

$$S(\mathit{length}) = \{\mathit{cardboard\ bands}\}.$$

Let b_1 , b_2 and b_3 be different cardboard bands. In $S(length)$ I can not attach b_3 to itself 5 *times, however in $MS(longitud)$ I do can write*

$$b_1 = b_2 + 5 \cdot b_3$$

to say that the amount of length of b_1 equals the amount of length of b_2 plus 5 *times the amount of length of b_3.*

Let us make a little bit explicit the logos of the new MP:

$\theta_{1,3}$) The new operation $+$ is defined in $MS(G)$ as follows:

$$[a] + [b] = [a \oplus b].$$

Note that, despite we could not add an object with itself in $S(G)$, that is to say, the operation $a \oplus a$ did not make sense, in $MS(G)$ we can add an object with itself, that is to say, we can do $[a] + [a]$. Indeed, we can do

$$[a] + [a] = [a \oplus b]$$

where $b \sim a$. Thus,

$$\text{green band} + \text{blue band} + \text{blue band}$$

is meaningful, since it might mean that we attach a blue band to a green band, and then we attach another band with the same amount of length that the blue one.

$\theta_{1,4}$) The new operation $\leq$ is defined in $MS(G)$ as follows:

$$[a] \leq [b] \text{ if and only if } \begin{cases} a \prec b \text{ and so we can write } [a] \lneq [b] \\ a \sim b \text{ and so we can write } [a] = [b]. \end{cases}$$

This operation is a *total order*, *i.e.* it satisfies the following properties:

- Reflexivity: $[a] \leq [a]$.
- Antisymmetry: if $[a] \leq [b]$ and $[b] \leq [a]$ then $[a] = [b]$.
- Tansitivity: if $[a] \leq [b]$ and $[b] \leq [c]$ then $[a] \leq [c]$.
- Total: for any two symbols $[a]$ and $[b]$ we have either $[a] \leq [b]$ or $[b] \leq [a]$.

$\theta_{1,5}$) Compatibility between $+$ and $\leq$: if $[a] \leq [b]$ then $[a] + [c] \leq [b] + [c]$.

Thus, we have move from MP_0 to a new praxeology which results from developing the logos of MP_0 and enlarging the set of techniques and the logos of MP_0:

$$MP_1 = (\{T_1, T_2\}, \{\tau_{0,1}, \tau_{0,2}, \tau_{1,1}, \tau_{1,2}\}; \{\theta_{0,1}, \theta_{0,2}, \theta_{0,3}, ...\} \cup \{\theta_{1,i}\}_{i=1}^{5})$$

1.5. A transition praxeology: MP_2**.** Problems of MP_0 and MP_1:

1) The techniques $\tau_{1,1}$, $\tau_{1,2}$, consisting in the working with symbols according to some rules explicited by the logos $\theta_{1,i}$, $1 \leq i \leq 5$, could not be suitable when doing comparisons.
2) We still do not have a technique allowing to communicate a faraway receiver an amount of magnitude effectively. For example, I can say "Construct a cardboard band with the same amount of length that my yellow band plus my blue band." But if the receiver doesn't know whether any of her bands has the same amount of length that my yellow band, then she could not profit my message.

To solve these difficulties we consider a new type of tasks:

T_3) To find a not too big family of symbols $\{u_i\}_{i\in I}$ in $MS(G)$ allowing to write most of the symbols of $MS(G)$ as a linear combination of the u_i with natural coefficients:

$$\Sigma_{i\in I}\lambda_i u_i \ , \ \lambda_i \in \mathbf{N}.$$

The symbols u_i will be said to be *generators* of $MS(G)$.

The solution of this type of tasks implies a solution to the problems (1) and (2) mentioned before. Indeed:

1) The comparison is simpler, since we have

$$\Sigma_{i\in I}\lambda_i u_i \leq \Sigma_{i\in I}\mu_i u_i$$

when

$$\lambda_i \leq \mu_i \text{ for every } i \in I.$$

2) The communication of an amount of magnitude to a receiver is also simpler since to communicate

$$\Sigma_{i\in I}\lambda_i u_i$$

it suffices to communicate the numbers λ_i once the receiver knows which are the generators.

In relation to T_3 we have more types of tasks:

T_4) Given a family of generators, can we still **reduce** the number of generators?

T_5) Given a family of generators, can we express **every** symbol as a linear combination of the generators? If not, which are the nearest linear combinations?

T_6) Can the symbols of $MS(G)$ be written **in a unique way** as a linear combination of the generators?

T_7) Given two families of generators, $\{u_i\}_{i\in I}$ and $\{v_j\}_{j\in J}$, for example one owned by a transmitter and another one owned by a receiver, how can we express in terms of the $\{v_j\}_{j\in J}$ the messages written in terms of $\{u_i\}_{i\in I}$?

The suitable techniques to face $T_3 - T_7$ are:

$\tau_{2,1}$) To solve T_7 it suffices to know how to express each u_i in terms of the v_j.

$\tau_{2,2}$) To face T_4 and T_6 it is useful to have linearly independent generators. Thus, if for exampe $u_j = 2 \cdot u_i$, it is better not to include u_j as a generator.

$\tau_{2,3}$) Another way of facing T_4, and at the same time T_7, is to enlarge the set of numbers we use as coefficients. For example, if $3\cdot u_j = 2 \cdot u_i$, we can keep u_i in our set of generators, and eliminate u_j, using in turn the rational number $\frac{2}{3}$ as a coefficient. Also, if a symbol can not be expressed in terms of $\{u_i\}_{i\in I}$ if we only use natural numbers as coefficients, perhaps this symbols can be expressed in terms of the generators if we allow ourselves to use rational coefficients. Moreover, to enlarge the set of numbers used as coefficients is useful to tackle T_5, since we also enlarge the set of measurable objects.

$\tau_{2,4}$) As we enlarge the set of numbers we use as coefficients

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}' \subseteq \dots$$

we have to develope techniques to transform expressions or relations with coefficients in $\mathbb{K}$ into expressions or relations with coeficientes en $\mathbb{K}'$. Por example,

$$3 \cdot u_j = 2 \cdot u_i \Leftrightarrow u_j = \frac{2}{3} \cdot u_i.$$

Note that in this MP the *measurement map* appears for the first time:

$$MS(G) \subseteq \langle u_1 , u_2 , \ldots , u_s \rangle \to \mathbb{K}^s , \Sigma_{i=1}^{s} \lambda_i u_i \mapsto (\lambda_1 , \ldots , \lambda_s)$$

This map enables to conect the domain of specific measurable objects with the domain of the numerical structure.

1.6. Final praxeology: MP_3. The MP_2 gives rise to the following techniques which solve all the tasks under consideration:

$\tau_{3,1}$) Fix a single generator $\{u\}$ and enlarge the set of numbers used as coefficients to get the whole set of positive rational numbers $\mathbb{Q}^+$. We try to choose a generator u with an *order of magnitude* (see § 1) suitable for the objects we tipically deal with.

$\tau_{3,2}$) In fact, instead of considering all the positive rational numbers we just consider the coefficients of the form

$$a \cdot 10^m , m \in \mathbb{Z},$$

and we give a proper name to the symbols of the form $10^m \cdot u , m \in \mathbb{Z}$. This is directly related to the fact that our numeral system is a positional one of basis 10. Thus, if u is one meter we give names (. . . , milimeter, centimeter, decameter, hectometer,. . .) to the symbols of the form

$$10^m \cdot u.$$

2. Glossary

- *antisymmetry* = antisimetría
- *attach* = adjuntar
- *band* = banda
- *binary* = binario/a
- *cardboard* = cartulina
- *coefficient* = coeficiente
- *to compare* = comparar
- *comparison* = comparación
- *domain* = dominio
- *to enlarge* = ampliar
- *generator* = generador
- *to handle* = manejar
- *magnitude* = magnitud
- *map* = aplicación
- *measurable* = medible
- *measurement* = medición
- *order of magnitud* = orden de magnitud
- *rational number* = número racional
- *receiver* = receptor
- *reflexive* = reflexivo/a

- *reflexivity* = reflexividad
- *set* = conjunto
- *symmetric* = simétrico/a
- *symmetry* = simetría
- *transitive* = transitivo/a
- *transitivity* = transitividad

CHAPTER 5

Una organización didáctica en torno a la medida de magnitudes en Educación Primaria

1. Introducción

En este último capítulo presentamos el diseño de una serie de actividades para el estudio de la magnitud *masa/peso* en Educación Primaria. Dicho diseño se ha hecho en base al Epistemological Reference Model (ERM) explicado en el Capítulo 4, y lo ha desarrollado María del Pilar López Guevara en su Trabajo Fin de Grado (curso 2012/13).

2. PM_0 y PM_1

2.1. PM_0.

2.1.1. *Tarea* T_1. **Ejercicio en el aula:**

Actividad 1: en esta primera aproximación a la magnitud considerada, el profesor va a presentar a los alumnos, divididos en grupos de cuatro, tres objetos diferentes para que los ordenen de mayor a menor peso. Dichos objetos han de ser "visualmente engañosos", es decir, que la diferencia de tamaño entre los mismos induzca a los alumnos a pensar que, por ejemplo, el más grande y voluminoso es también el más pesado.

En un primer momento, el profesor los muestra sin que los alumnos tengan contacto directo con los mismos, por lo que tendrán que ordenarlos ayudados solo por una estimación visual. A continuación cada grupo dice sus resultados en voz alta y, acto seguido, el docente reparte los objetos a los grupos para que los toquen, los cojan en peso,... y vuelve a pedirles que los ordenen.

Ante la similitud en cuanto a los pesos reales de los objetos propuestos, es probable que los alumnos tengan dificultades para afinar la diferencia entre los mismos, a pesar de estar manipulándolos y es, cuando surge este problema, el momento en el que el profesor les presenta un instrumento eficaz para compararlos: la balanza. Finalmente, los alumnos vuelven a ordenar de mayor a menor los tres pesos, pero esta vez ayudados de la balanza.

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá haber:

- Una balanza.

- Tres objetos de tamaños diferentes pero pesos similares, como por ejemplo: un diccionario grande "hueco", un estuche con piedras dentro y un pisapapeles pequeño pero pesado.

Explicación: Ante la T_1 propuesta, los alumnos deberán de hacer uso de técnicas apropiadas que consisten en comparar (mediante inspección visual primero y utilizando sus propias manos y una balanza después ($\tau_{0,2}$) tres objetos distintos, a, b y c, respecto de la magnitud G =peso y decir si uno es mayor que otro (relación $\prec$). Deberán de llegar a la conclusión de que tamaño y peso son independientes, es decir, que aunque sean cantidades presentes no pueden compararlas a simple vista y necesitan, para ganar precisión, un instrumento de medida.

2.1.2. *Tarea T_2*. **Ejercicio en el aula:**

Actividad 2: De cara a futuras actividades es conveniente que cada grupo de cuatro se divida ahora en dos equipos de dos alumnos (A y B). El profesor reparte a cada uno de los equipos un objeto de peso desconocido y ocho sacos de arena de pesos diferentes, sin especificarles el peso en gramos. Los alumnos tienen que colocar en un plato de la balanza el objeto de peso desconocido y, en el otro, deben ir adjuntando sacos de arena hasta que los dos platos queden al mismo nivel. Una vez conseguido esto, apuntan la equivalencia en un papel que utilizarán para actividades posteriores. Por ejemplo, pueden escribir notas del tipo: "Mi objeto X pesa un saco rojo, más un saco amarillo, más tres sacos naranjas".

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá haber:

- Dos balanzas.
- Papel y lápiz.
- Dos objetos de pesos desconocidos para los alumnos. El profesor podría repartir a cada grupo dos sacos de arena de pesos diferentes, por ejemplo, al equipo A uno de 810 g y al equipo B uno de 560 g.
- 16 sacos de arena, 8 para el equipo A y 8 para el equipo B, por ejemplo, de la siguiente manera:
  - Equipo A, debe de obtener los 810 g combinando y adjuntando los siguientes sacos:
    - Dos sacos rosas (de 50 g cada uno).
    - Dos sacos amarillos (de 60 g cada uno).
    - Tres sacos naranjas (de 150 g cada uno).
    - Un saco rojo (de 300g).
  - Equipo B, debe de obtener los 560g combinando y adjuntando los siguientes sacos:
    - Tres sacos azules (de 30 g cada uno).

∗ Dos sacos marrones (de 50 g cada uno).
∗ Dos sacos lilas (de 225 g cada uno).
∗ Un saco verde (de 300g).

Explicación: Ante la T_2 propuesta, los alumnos deberán de hacer uso de una técnica apropiada ($\tau_{0,1}$) que consiste en construir un objeto nuevo medible adjuntando dos o más objetos. Esta técnica tiene distintas posibles realizaciones según el modo de colocar los sacos en el otro plato. Por ejemplo, la técnica que consistiría en colocar los sacos al azar; la que estaría basada en colocar primero el mayor número posible de los sacos más grandes, luego el mayor número posible de sacos inmediatamente inferiores y así sucesivamente hasta llegar a los más pequeños que sirven para afinar la pesada.

2.1.3. *Limitaciones de la PM_0.* **Ejercicio en el aula:**

Actividad 3: El profesor quiere que los alumnos se percaten de las limitaciones que supone para la medida del peso el uso exclusivo de las técnicas de esta praxeología matemática, y los invita a reflexionar lanzándoles la siguiente cuestión: "Si quisierais doblar, triplicar, multiplicar por un número determinado de veces vuestro objeto de la actividad anterior con los materiales de los que disponéis, ¿podríais hacerlo?, ¿por qué?.

Materiales: Ninguno.

Explicación: El objetivo último de esta actividad es guiar las respuestas de los alumnos para que descubran que las técnicas basadas en la manipulación directa de los objetos tienen poco alcance. Esto se debe a que, por ejemplo, no se puede adjuntar un objeto a sí mismo (pues solo se trabaja con cantidades presentes) como tampoco se puede manipular un número grande de éstos (ya que es imposible comparar una gran cantidad de objetos de la cual no se dispone y, en caso de que se dispusiesen, no cabrían en el mismo platillo de la balanza).

2.2. PM_1.

2.2.1. *Paso de $S(G)$ a $MS(G)$.* **Ejercicio en el aula:**

Actividad 4: el profesor propone un juego de cartas con la finalidad de trabajar el peso de una manera simbólica (paso de $S(G)$ a $MS(G)$, ver $\theta_{1,1}$ en Capítulo § 4) y para ello, los grupos de cuatro vuelven a dividirse en equipos de dos alumnos (A y B). Se trata de un juego de memoria en el que las cartas están boca abajo y repartidas en dos grupos: en un grupo están las preguntas, en otro las respuestas, y en medio una tabla de equivalencias. Por ejemplo, el equipo A se encarga de empezar y toma una carta de la parte de las preguntas, que podría ser: ¿a cuántos sacos rosas equivalen 30 azules?, a continuación y, ayudándose de la tabla de equivalencias, dispone de un minuto para tratar de encontrar la solución. Pasado el tiempo, elige una carta de la parte de las respuestas, si la que toma considera que es la correcta, se la queda y si no, vuelve a poner las dos cartas boca abajo y pasa el turno al equipo siguiente. Para facilitar el recuerdo de los distintos resultados, proponemos que la cantidad de cartas, tanto en las preguntas como en las respuestas, no sea muy elevado (en torno a unas seis de cada). Una vez que todos los equipos han finalizado, el profesor dice los resultados en voz alta para que los comprueben y, por tanto, gana el equipo que más pares de cartas correctas haya acumulado.

Materiales:

- Reloj de arena o cronómetro para un minuto.
- Lápiz y papel para anotar los resultados.
- 6 cartas de preguntas:
  1. ¿A cuántos sacos rojos equivalen 30 marrones?
  2. ¿A cuántos sacos verdes equivalen 12 rosas?
  3. ¿A cuántos sacos rojos equivalen 7 verdes?
  4. ¿A cuántos sacos vedes equivalen 10 azules?
  5. ¿A cuántos sacos verdes equivalen 16 naranjas?
  6. ¿A cuántos sacos rojos equivalen 20 amarillos?
- 6 cartas de respuestas:
  1) 5
  2) 2
  3) 7
  4) 1
  5) 8
  6) 4
- Tabla de equivalencias:
  - 1 rojo = 6 rosas o 2 naranjas
  - 1 rosa = 1 marrón
  - 1 verde = 6 marrones o 5 amarillos
  - 1 amarillo = 2 azules

Explicación: Con esta actividad se pretende que los alumnos pasen de operar en PM_0 a operar en PM_1, es decir que pasen de manipular objetos a manipular símbolos que representan a dichos objetos. De esta manera se superan las limitaciones a las que previamente hacíamos alusión, pues ya pueden adjuntar objetos consigo mismos y manipular un número grande de estos.

2.2.2. *Limitaciones de las PM_0 y PM_1.* **Ejercicio en el aula:**

Actividad 5: El profesor pide a los alumnos que recuerden la actividad 2, en la que tenían que equilibrar la balanza adjuntando sacos de arena de diferentes pesos y les invita a que cada equipo utilice la nota escrita en dicha actividad para transmitir un mensaje al equipo contrario, indicándoles cuántos sacos de arena han necesitado para equilibrar la balanza con respecto al objeto de referencia. Por ejemplo, el equipo A podría escribir un mensaje del tipo: "Para equilibrar la balanza, hemos necesitado un saco rojo, tres naranjas y un amarillo." Y el equipo B, otro como: "Nosotros hemos utilizado un marrón, dos lilas y dos azules." Una vez que se intercambian los mensajes, el equipo A intenta adjuntar sus sacos en el plato de la balanza para reproducir el peso indicado por el equipo B y viceversa. Una vez construido, deben indicar cuál es mayor.

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá de haber:

- Dos balanzas.
- Los mensajes escritos en la actividad 2.
- Los dos objetos de referencia. Para el equipo A uno de 810 g y para el equipo B uno de 560 g.
- Los 16 sacos de arena, 8 para el equipo A y 8 para el equipo B, por ejemplo, de la siguiente manera:
  - Equipo A:
    - Dos sacos rosas (de 50 g cada uno).
    - Dos sacos amarillos (de 60 g cada uno).
    - Tres sacos naranjas (de 150 g cada uno).
    - Un saco rojo (de 300 g).
  - Equipo B:
    - Tres sacos azules (de 30 g cada uno).
    - Dos sacos marrones (de 50 g cada uno).
    - Dos sacos lilas (de 225 g cada uno).
    - Un saco verde (de 300 g).

Explicación: El profesor quiere que los alumnos se percaten de las limitaciones de las praxeologías matemáticas iniciales, relativas a que las técnicas empleadas en ellas pueden resultar poco prácticas en casos de comparación y a que no existe todavía una técnica que permita comunicar a un receptor lejano una cantidad de magnitud sabiendo que nos está entendiendo de manera efectiva. El principal problema que los alumnos encontrarán a la hora de enfrentarse a esta actividad será construir el objeto de referencia del equipo contrario a partir de los sacos de los que disponen. Esta dificultad radica en que no tendrán ningún saco en común y, por tanto, deberán darse cuenta de la necesidad de encontrar un grupo, no demasiado grande, de sacos comunes.

2.3. PM_2.

2.3.1. *Tarea* T_3. T3) Encontrar una familia, no demasiado grande, de símbolos $\{u_1, \ldots, u_n\}$ en $MS(G)$ de tal modo que la mayor parte de símbolos de $MS(G)$ se puedan escribir como combinación lineal de los u_1, ..., u_n con coeficientes naturales.

Ejercicio en el aula:

Actividad 6: El equipo A pasa a tener acceso a los sacos de B y el equipo B pasa a tener acceso a los sacos de A. Los alumnos, utilizando la balanza, deben encontrar las equivalencias entre sus propios sacos y los del equipo contrario y, una vez establecidas, escribir un nuevo mensaje para que el grupo contrario pueda reproducir el peso indicado y establecer comparaciones. Por último, los alumnos se quedarán con el conjunto de sacos que ambos equipos hayan utilizado (generadores comunes) y descartarán los que no hayan empleado.

El equipo A sabe que su objeto de referencia pesa un saco rojo, más un saco amarillo, más tres sacos naranjas. Lo que hace entonces es utilizar la balanza para ir comprobando a cuántos sacos de B equivalen los suyos. Debe de llegar a las siguientes conclusiones y anotarlas en un papel para actividades sucesivas:

- 1 saco rojo (de A) = 1 saco verde (de B)
- 1 saco amarillo (de A) = 2 sacos azules (de B)
- 3 sacos naranjas (de A) = 2 sacos lilas (de B)

El equipo A escribe un nuevo mensaje a B en términos de sus sacos: "Nuestro objeto de referencia pesa un saco verde, dos sacos azules y dos sacos lilas". El equipo B ahora sí entiende el mensaje, al contrario que en la actividad anterior, por tanto toma los sacos indicados, los pone en un plato de la balanza y en el otro, su objeto de referencia. Una vez hecho esto, puede compararlos y observar que su objeto de referencia es menor, es decir, que pesa menos que el del equipo A.

Por su parte el equipo B, hace lo mismo. Sabe que su objeto de referencia pesa un saco marrón, dos sacos lilas y dos sacos azules. Utiliza la balanza para comprobar a cuántos sacos de A equivalen los suyos y llega a estas conclusiones, que debe anotar para actividades futuras:

- 1 saco marrón (de B) = 1 saco rosa (de A)
- 2 sacos lilas (de B) = 3 sacos naranjas (de A)
- 2 sacos azules (de B) = 1 saco amarillo (de A)

Una vez establecidas las equivalencias, B escribe un nuevo mensaje a A: "Nuestro objeto de referencia pesa un saco rosa, tres sacos naranjas y un saco amarillo". El equipo A lo entiende y pone, en un plato de la balanza los sacos indicados por B y, en el otro su objeto de referencia y comprueba así que este último es el mayor.

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá haber:

- Dos balanzas.
- Los mensajes escritos en la actividad 2.
- Papel y lápiz para escribir las equivalencias y los nuevos mensajes.
- Los dos objetos de referencia. El de 810 g del equipo A y el de 560 g del equipo B.
- Los 16 sacos de arena, los 8 del equipo A y los 8 del equipo B.

Explicación: Los alumnos resuelven el principal problema al que se enfrentaban en la actividad anterior, pues ya pueden reconstruir el objeto de referencia del equipo contrario al observar que existen equivalencias entre los sacos de ambos equipos. Utilizan un número de sacos que todavía es bastante amplio, pero lo irán reduciendo a lo largo de las sucesivas actividades. Lo importante es que los alumnos, tras esto, vean como con un único conjunto de generadores sí es posible comunicar a un receptor lejano una cantidad de magnitud dada, sabiendo con certeza que éste los va a entender y que podrá, por tanto, reproducir sus mensajes.

Los equipos A y B observan que existen equivalencias entre sus propios sacos y los del equipo contrario y que, una vez establecidas, hay 4 sacos (uno rojo, uno amarillo, uno azul y uno marrón) que no necesitan para expresar los objetos de A y de B. Eliminan esos 4, pasando de tener 16 sacos a tener 12.

2.3.2. *Tarea T_6.* T6) ¿Admite cada símbolo de MS(G) una única escritura como combinación lineal de un sistema de generadores dado?

Ejercicio en el aula:

Actividad 7: Los alumnos, que al comienzo de la secuencia de actividades tenían 16 sacos entre los de A y los de B, han visto reducido el número de los mismos a 12, tras la actividad anterior. El profesor propone ahora que pesen, con ayuda de esos 12 sacos, objetos cotidianos del aula como, por ejemplo, el libro de matemáticas y un pequeño diccionario. Es importante que todos los grupos tengan los mismos objetos. Los alumnos van a trabajar esta vez en sus grupos de cuatro, sin distinciones entre A y B. Cuando se dispongan a pesar, colocarán en un plato de la balanza el objeto en cuestión y, en el otro irán adjuntando los sacos para que quede equilibrada. Supongamos que el libro de matemáticas que van a utilizar pesa 750 g. El profesor pide a los alumnos que anoten cuántos sacos de cada color son necesarios para equilibrar la balanza y que den el resultado de la siguiente manera:

- El primer número que digan corresponderá al número de sacos azules.
- El segundo, al número de sacos rosas.
- El tercero, al número de sacos marrones.
- El cuarto, al número de sacos amarillos.
- El quinto, al número de sacos naranjas.
- El sexto, al número de sacos lilas. tem El séptimo, al número de sacos rojos.
- El octavo, al número de sacos verdes.

Por ejemplo, si un grupo pone un saco naranja, más un saco rojo, más un saco verde, su respuesta al profesor debería de ser:

$$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1).$$

Una vez que todos los equipos tienen sus equivalencias deben decir en voz alta los resultados para que el profesor los anote en la pizarra.

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá de haber:

- Una balanza.
- Los objetos de referencia a pesar, por ejemplo, el libro de matemáticas y el pequeño diccionario.
- Los 12 sacos de arena.

Explicación: Una vez que el profesor anote en la pizarra los resultados de los equipos, verán que éstos son diferentes y que las posibilidades de respuesta son muy amplias. Por ejemplo, pueden obtener resultados tan variados como (0, 0, 0, 0, 2, 2, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 1), ... El profesor ha de hacer ver a los alumnos que, al principio, trabajar con tantos generadores puede estar bien porque da mucha libertad, pero al mismo tiempo también da problemas, como la existencia de escrituras distintas y muy extensas. Un ejercicio de síntesis, que reflexione sobre estos aspectos, motivará a los alumnos a reducir el número de generadores para disfrutar de sus principales ventajas que son: economizar la escritura y minimizar el número de escrituras posibles.

2.3.3. *Tarea T_4.* T4) Dado un sistema de generadores, ¿podemos reducir aún más el conjunto de los mismos?

Ejercicio en el aula:

Actividad 8: a fin de reducir el número de generadores, el profesor propone que cada equipo se quede solo con dos sacos. Para que la actividad tenga un razonamiento lógico y no se convierta la elección en algo aleatorio, los alumnos van a tener que analizar cada una de las posibilidades.

El equipo A verá que:

- Su saco rojo es igual al verde del equipo B y, por lo tanto, puede eliminar este último.
- Las otras dos equivalencias las comparte con el equipo B, por tanto, puede llegar al acuerdo con éste de que cada uno de ellos se centre en una equivalencia distinta. Por ejemplo, el equipo A se queda con la de tres naranjas = dos lilas. Como adjuntando tres sacos naranjas tenemos el mismo peso que al poner dos lilas, deben quedarse con la unidad más pequeña, en este caso, con un saco naranja.

Finalmente el equipo A tendrá dos generadores: un rojo y un naranja.

El equipo B, por su parte, hará lo mismo:

- Su saco marrón es igual al rosa del equipo A y, por lo tanto, puede eliminar este último.
- Trabaja con la equivalencia restante: dos azules = un amarillo. Como dos sacos azules pesan lo mismo que un amarillo, es mejor no incluir al amarillo como generador.

Por tanto, B tendrá como generadores a los sacos marrón y azul.

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá de haber: Las dos anotaciones tomadas en la actividad 6 donde aparecen las equivalencias entre los sacos de los dos equipos.

Explicación: Una vez que los alumnos han aceptado que el conjunto de generadores elegido previamente (el de los 12 sacos) tenía opción de ser reducido por los inconvenientes que generaba (escrituras distintas y poco económicas), con esta actividad han de reflexionar, apoyándose en argumentos lógicos arriba descritos, sobre dicho conjunto para intentar mejorarlo y así hacer más fácil el trabajo con el mismo.

2.3.4. *Tareas T_5 y T_7.* T5) Dado un sistema de generadores, ¿podemos expresar cada símbolo como combinación lineal de dichos generadores? Si no, ¿cuál es la combinación lineal de generadores que más se le aproxima?

T7) Dados dos sistemas de generadores, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\{v_1, \ldots, v_m\}$, por ejemplo uno que tenga el emisor y otro que tenga el receptor, ¿cómo expresar en términos de $\{v_1, \ldots, v_m\}$ los mensajes que vengan expresados en términos de $\{u_1, \ldots, u_n\}$?

Ejercicio en el aula:

Actividad 9: Ambos equipos deben utilizar sus generadores (sacos naranja y rojo para el equipo A y sacos azul y marrón para el equipo B) para mostrar que a partir de ellos pueden obtenerse el resto de sacos. Para llevar la tarea a cabo, los alumnos utilizan además de los sacos y la balanza, unas tuercas dadas por el profesor. En un plato de la balanza colocan un generador y en el otro van adjuntando tuercas hasta que quede equilibrada; una vez conseguido anotan en una tabla el resultado, que servirá como referencia para el resto de medidas. Vuelven a repetir el proceso, anotando en una columna de la tabla las tuercas a las que equivalen el resto de sacos y, en la otra, la fracción correspondiente con respecto al generador en cuestión. Por ejemplo, los generadores del equipo A son el saco naranja y el saco rojo. El primero de ellos pesa 30 tuercas y el segundo 60. Debemos construir dos tablas que muestren las equivalencias del resto de los sacos con respecto a estos dos:

Tabla 1: comparación del saco naranja (generador equipo A) con el resto de sacos.

Sacos	Tuercas	Comparación con el saco naranja (30 tuercas)
1.Amarillo	12	2/5
2.Rojo	60	2
3.Rosa	10	1/3
4.Azul	6	1/5
5.Verde	60	2
6.Lila	45	3/2
7.Marrón	10	1/3

Así:

1. El saco amarillo es 2/5 del naranja.
2. El saco rojo es el doble que el naranja.
3. El saco rosa es 1/3 del naranja.
4. El saco azul es 1/5 del naranja.
5. El saco verde es el doble que el naranja.
6. El saco lila es 3/2 del naranja.
7. El saco marrón es 1/3 del naranja.

Tabla 2: comparación del saco rojo (generador equipo A) con el resto de sacos.

Sacos	Tuercas	Comparación con el saco rojo (60 tuercas)
1.Amarillo	12	1/5
2.Naranja	30	1/2
3.Rosa	10	1/6
4.Azul	6	1/10
5.Verde	60	1/1
6.Lila	45	3/4
7.Marrón	10	1/6

Así:

1. El saco amarillo es 1/5 del rojo
2. El saco naranja es la mitad del rojo.
3. El saco rosa es 1/6 del rojo.
4. El saco azul es 1/10 del rojo.
5. El saco verde es igual que el rojo.

6. El saco lila es 3/4 del rojo.
7. El saco marrón es 1/6 del rojo.

Por su parte, el equipo B hará lo mismo usando sus generadores. Sabiendo que el marrón pesa 10 tuercas y el azul 6, construyen dos tablas como las anteriores que reflejen las equivalencias con respecto a los otros sacos:

Tabla 3: comparación del saco marrón (generador equipo B) con el resto de sacos.

Sacos	Tuercas	Comparación con el saco marrón (10 tuercas)
1.Amarillo	12	6/5
2.Rojo	60	6
3.Naranja	30	3
4.Rosa	10	1/1
5.Verde	60	6
6.Lila	45	2/9
7.Azul	6	3/5

Así:

1. El saco amarillo es 6/5 del marrón.
2. El saco rojo es seis veces el marrón.
3. El saco naranja es tres veces el marrón.
4. El saco rosa es igual que el marrón.
5. El saco verde es seis veces el marrón.
6. El saco lila es 2/9 del marrón.
7. El saco azul es 3/5 del marrón.

Tabla 4: comparación del saco azul (generador equipo B) con el resto de sacos.

Sacos	Tuercas	Comparación con el saco azul (6 tuercas)
1.Amarillo	12	2
2.Rojo	60	10
3.Naranja	30	5
4.Rosa	10	5/3
5.Verde	60	10
6.Lila	45	2/15
7.Marrón	10	5/3

Así:

1. El saco amarillo es el doble que el azul.
2. El saco rojo es diez veces el azul.
3. El saco naranja es cinco veces el azul.
4. El saco rosa es 5/3 del azul.
5. El saco verde es diez veces el azul.
6. El saco lila es 2/15 del azul.
7. El saco marrón es 5/3 del azul.

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá haber:

- Dos balanzas.
- Dieciséis sacos de arena (ocho en total para cada equipo y uno de cada color).
- Dos cajas de tuercas.
- Cuatro tablas vacías como las anteriores.

Explicación: A fin de reducir el número de generadores, debemos aumentar el campo numérico de nuestros escalares, pues si queremos reflejar el peso de todos los sacos utilizando solo cuatro de ellos, algunos de estos pesos no se van a poder expresar si solo utilizamos coeficientes naturales, pero sí se podrá si aceptamos trabajar con números racionales, ya que cuantos más coeficientes aceptemos, mayor será el conjunto de objetos medibles.

2.3.5. *Tarea T_6.* T6) ¿Admite cada símbolo de MS(G) una única escritura como combinación lineal de un sistema de generadores dado?

Ejercicio en el aula:

Actividad 10: Una vez que los alumnos han reducido el número de generadores y que han comprobado que a partir de ellos se pueden obtener todos los demás sacos, el profesor les recuerda la actividad 7 (§ 2.3.2) en la que tenían que pesar con ayuda de una gran cantidad de sacos, objetos cotidianos del aula como el libro de matemáticas. A continuación, les plantea la siguiente cuestión: "?Pensáis que ahora que el número de sacos es mucho menor se habrá resuelto el problema de las escrituras diversas y poco económicas que teníamos en la actividad 7?" Tras ello, les propone que vuelvan a realizar la misma actividad (colocar en un plato de la balanza el objeto en cuestión y en el otro adjuntar los sacos para que quede equilibrada) pero utilizando solo los cuatro tipos de generadores (aunque debe haber varios sacos de cada color). Esta vez:

- El primer número que digan corresponderá al número de sacos rojos;
- el segundo, al número de sacos naranjas;
- el tercero, al de sacos marrones, y
- el cuarto, al de sacos azules.

Una vez que todos los equipos tengan sus equivalencias volverán a decir en voz alta los resultados para que el profesor los anote en la pizarra.

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá haber:

- Una balanza.
- Los objetos de referencia a pesar, por ejemplo, el libro de matemáticas y el pequeño diccionario.

- Los sacos generadores: rojo, naranja, marrón y azul (debe haber varios sacos de cada color).

Explicación: Una vez que el profesor anote en la pizarra los resultados, verán que estos siguen siendo diferentes aunque las posibilidades de respuesta hayan disminuido. Por ejemplo, pueden obtener resultados como (1, 2, 3, 0); (0, 3, 3, 5); (2, 0, 0, 5); . . . Esto hará darse cuenta a los alumnos de que a pesar de tener el mismo objeto para pesar y de haber reducido el número de generadores con respecto a la actividad 7, siguen obteniendo resultados distintos. Deberán de llegar a la conclusión de que si quieren tener una escritura única común a todos, necesitan un único generador.

2.4. PM_3.

2.4.1. *Tarea* T_8. T8) Fijamos un solo generador, u, y ampliamos el campo numérico hasta llegar a $\mathbb{Q}^+$ (números racionales positivos).

Ejercicio en el aula:

Actividad 11: El objetivo de esta actividad es que los alumnos elijan de entre los cuatro generadores "finalistas" (rojo, naranja, marrón y azul) el "ganador", es decir, el que utilizarán como unidad fundamental. Para ayudarles en esta elección, que no es aleatoria, el profesor hace que los alumnos recuerden el número de tuercas al que equivale cada uno de los cuatro sacos y les pide que lo especifiquen (saco rojo= 60 tuercas; saco naranja = 30 tuercas; saco marrón = 10 tuercas y saco azul = 6 tuercas). Tras ello, introduce un nuevo elemento, las monedas, y explica que cada tuerca equivale a 10 de ellas.

- Saco rojo=R
- Saco naranja=N
- Saco marrón=M
- Saco azul=A
- Tuercas=t
- Monedas=m
- R = 60 t
- N = 30 t
- M = 10 t
- A = 6 t
- t = 10 m

A continuación pasa a exponer la actividad principal, que va a consistir en hacer operaciones aritméticas utilizando los sacos, las tuercas y las monedas. Es fácil observar que hacer operaciones utilizando un conjunto mixto de unidades (sumando por ejemplo distantos múltiplos de los distintos sacos) es problemático. Se trata entonces de quedarnos con un solo saco. Uno que nos permita expresar el resto de sacos de manera sencilla. A la vista de las igualdades:

- $R = 6M$, $N = 3M$ y $A = \frac{6}{10}M = \frac{3}{5}M$
- $N = \frac{1}{2}R$, $M = \frac{1}{6}R$ y $A = \frac{1}{10}R$
- $R = 2N$, $M = \frac{1}{3}N$ y $A = \frac{6}{30}N = \frac{1}{5}N$
- $R = 10A$, $N = 5A$ y $M = \frac{10}{6}A = \frac{5}{3}A$.

parece razonable reducirlo todo o bien al M o bien al A. Teniendo en cuenta el orden de magnitud, es probable que la elección más razonable sea quedarse con el M.

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá haber: lápiz y papel para resolver las operaciones.

Explicación: Con esta actividad los alumnos verán la forma más adecuada para llevar a cabo la selección del generador fundamental, en este caso el marrón ya que las cuentas son mucho más fáciles. Una opción razonable hubiera sido quedarse con el azul por ser el más pequeño, pero el cambio de unidades es más complicado.

Ejercicio en el aula:

Actividad 12: Una vez que todos han entendido las razones por las cuales el saco marrón debe ser el fundamental, el profesor propone que utilicen las fracciones decimales para expresar los dos casos referentes a los sacos marrones de la actividad anterior (el 3 y el 7), todo en término de sacos marrones exclusivamente. Teniendo en cuenta que M=10 t y que t = 10 m, si queremos expresar a cuántas monedas equivale un saco diremos que a 100, y que una moneda son 1/100 sacos.

Conociendo esto diremos por ejemplo que

$$2M + 8t + 3m = (2 + 8/10 + 3/100)M = 2,83M$$

y que

$$5M + 7t + 2m = (5 + 7/10 + 2/100)M = 5,72M.$$

Los alumnos conocerán el por qué de esta actividad en la siguiente.

Materiales: Para cada grupo de cuatro alumnos deberá haber: lápiz y papel para resolver las operaciones.

Explicación: El fin de esta actividad es que los alumnos, más que considerar todos los racionales positivos como posibles coeficientes, consideren todos los del tipo $a \cdot 10^m$, $m \in \mathbb{Z}$, ya que esto está directamente relacionado con el hecho de que nuestro sistema de numeración es posicional en base 10.

Ejercicio en el aula:

Actividad 13: Durante esta última actividad, el profesor lleva a cabo la institucionalización del saber. En primer lugar, se realiza una lluvia de ideas en la que les pregunta a los alumnos si saben con qué unidad de las que utilizan en su vida diaria se podría relacionar “nuestro saco marrón”. Es probable que salgan nombres como el gramo o el kilogramo y cuando esto ocurra, el profesor debe aprovechar la ocasión para explicar el kilogramo (kg), es decir, para decirles que lo que ellos ven como “saco fundamental”, en realidad corresponde a una unidad de medida del Sistema Internacional, consensuado por toda la comunidad científica.

Debe explicar los submúltiplos del kilogramo: hectogramo, decagramo, gramo, decigramo, centigramo y miligramo y que, el hectogramo y el decagramo se corresponderían con las tuercas y las monedas, respectivamente, utilizadas en las actividades previas y que el resto de las unidades, corresponderían con otros objetos todavía más pequeños que las monedas.

Es importante que también señale cómo se hace el paso de una unidad a otra, en el caso del kilogramo, multiplicando por 10, al igual que ellos habían hecho en la actividad 11 y que el uso de fracciones decimales es muy común al hablar de pesos, como habían trabajado en la actividad 12.

Además, aunque la unidad fundamental sea el kilogramo, en la vida diaria y con objetos que normalmente tomamos en consideración, hay otra unidad cuyo uso está igual o más extendido que el kilogramo (por ejemplo en cocina) y es la milésima parte del mismo: el gramo.

Por último, sería conveniente mostrarles una balanza diferente a la de platos con la que han estado trabajando y que muchos probablemente conozcan, la balanza digital, que da directamente el peso en gramos.

Materiales: Balanza digital.

Explicación: Con la explicación del kilogramo como unidad fundamental, se superan todas las limitaciones de las PM anteriores, siendo capaz de resolver todas las tareas propuestas en este MER.

Bibliography

[1] Guy Brousseau. (2000) Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales. Un exemple dutilisation de la théorie des situations pour l'ingénierie, *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 9. Disponible en: `http://dipmat.math.unipa.it/~grim/quaderno9.htm`

[2] Mª del Carmen Chamorro et al. (2003) *Didáctica de las Matemáticas*, Colección Didáctica Primaria, Pearson Educación, Madrid.

[3] Yves Chevallard. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/2, 221–266.

[4] Tomás Angel Sierra Delgado. (2006) *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas los sistemas de numeración y la medida de magnitudes.* Tesis doctoral dirigida por Marianna Bosch i Casabò, Josep Gascón Pérez. Universidad Complutense de Madrid.