Análisis Matemático I: Numeros Reales y Complejos

Presentaciones de Clase

Universidad de Murcia

Curso 2008-2009

Objetivos

Objetivos

1. Definir (y entender) $\mathbb{R}$ introducido axiomáticamente.

Objetivos

Objetivos

1. Definir (y entender) $\mathbb{R}$ introducido axiomáticamente.
2. Saber deducir propiedades de os números reales a partir de los axiomas.

Objetivos

Objetivos

1. Definir (y entender) $\mathbb{R}$ introducido axiomáticamente.
2. Saber deducir propiedades de os números reales a partir de los axiomas.
3. Comprender y utilizar los conceptos de supremo e ínfimo.

Objetivos

Objetivos

1. Definir (y entender) $\mathbb{R}$ introducido axiomáticamente.
2. Saber deducir propiedades de os números reales a partir de los axiomas.
3. Comprender y utilizar los conceptos de supremo e ínfimo.
4. Conocer el principio de inducción y saber utilizarlo.

Objetivos

Objetivos

1. Definir (y entender) $\mathbb{R}$ introducido axiomáticamente.
2. Saber deducir propiedades de os números reales a partir de los axiomas.
3. Comprender y utilizar los conceptos de supremo e ínfimo.
4. Conocer el principio de inducción y saber utilizarlo.
5. Conocer la unicidad de $\mathbb{R}$

Objetivos

Objetivos

1. Definir (y entender) $\mathbb{R}$ introducido axiomáticamente.
2. Saber deducir propiedades de os números reales a partir de los axiomas.
3. Comprender y utilizar los conceptos de supremo e ínfimo.
4. Conocer el principio de inducción y saber utilizarlo.
5. Conocer la unicidad de $\mathbb{R}$
6. Conocer la representación geométrica de los números reales.

Objetivos

Objetivos

1. Definir (y entender) $\mathbb{R}$ introducido axiomáticamente.
2. Saber deducir propiedades de os números reales a partir de los axiomas.
3. Comprender y utilizar los conceptos de supremo e ínfimo.
4. Conocer el principio de inducción y saber utilizarlo.
5. Conocer la unicidad de $\mathbb{R}$
6. Conocer la representación geométrica de los números reales.
7. Definir (y entender) los números complejos.

Objetivos

Objetivos

1. Definir (y entender) $\mathbb{R}$ introducido axiomáticamente.
2. Saber deducir propiedades de os números reales a partir de los axiomas.
3. Comprender y utilizar los conceptos de supremo e ínfimo.
4. Conocer el principio de inducción y saber utilizarlo.
5. Conocer la unicidad de $\mathbb{R}$
6. Conocer la representación geométrica de los números reales.
7. Definir (y entender) los números complejos.
8. Conocer la representación geométrica de los números complejos.

Definición axiomática de $\mathbb{R}$

Definición

Existe un cuerpo totalmente ordenado y completo que recibe el nombre de cuerpo de los números reales y se denota por $\mathbb{R}$.

Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y) &\mapsto x+y\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned}\mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y) &\mapsto x\cdot y\end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$

Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),

Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$

Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),

Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$

Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),

Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho x' se denota con $-x$

Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho x' se denota con $-x$ (elemento opuesto),

Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho x' se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$

Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho x' se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),

Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho x' se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
6. $x\cdot y=y\cdot x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$

Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho x' se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
6. $x\cdot y=y\cdot x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),

Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho x' se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
6. $x\cdot y=y\cdot x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
7. existe un elemento en $\mathbb{R}$ distinto de 0, denotado con 1, con la propiedad de que $1\cdot x=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$

Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho x' se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
6. $x\cdot y=y\cdot x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
7. existe un elemento en $\mathbb{R}$ distinto de 0, denotado con 1, con la propiedad de que $1\cdot x=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro del producto),

Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho x' se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
6. $x\cdot y=y\cdot x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
7. existe un elemento en $\mathbb{R}$ distinto de 0, denotado con 1, con la propiedad de que $1\cdot x=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro del producto),
8. para cada $x\in\mathbb{R}$ con $x\neq 0$ existe $x''\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x\cdot x''=1$, dicho x'' se denota mediante $\dfrac{1}{x}$ o también mediante x^{-1}

Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho x' se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
6. $x\cdot y=y\cdot x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
7. existe un elemento en $\mathbb{R}$ distinto de 0, denotado con 1, con la propiedad de que $1\cdot x=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro del producto),
8. para cada $x\in\mathbb{R}$ con $x\neq 0$ existe $x''\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x\cdot x''=1$, dicho x'' se denota mediante $\dfrac{1}{x}$ o también mediante x^{-1} (elemento inverso),

Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho x' se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
6. $x\cdot y=y\cdot x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
7. existe un elemento en $\mathbb{R}$ distinto de 0, denotado con 1, con la propiedad de que $1\cdot x=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro del producto),
8. para cada $x\in\mathbb{R}$ con $x\neq 0$ existe $x''\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x\cdot x''=1$, dicho x'' se denota mediante $\dfrac{1}{x}$ o también mediante x^{-1} (elemento inverso),
9. $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$

Explicación: cuerpo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

operaciones internas llamadas suma y producto que cumplen:

1. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
2. $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
3. existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),
4. para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho x' se denota con $-x$ (elemento opuesto),
5. $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),
6. $x\cdot y=y\cdot x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),
7. existe un elemento en $\mathbb{R}$ distinto de 0, denotado con 1, con la propiedad de que $1\cdot x=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro del producto),
8. para cada $x\in\mathbb{R}$ con $x\neq 0$ existe $x''\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x\cdot x''=1$, dicho x'' se denota mediante $\dfrac{1}{x}$ o también mediante x^{-1} (elemento inverso),
9. $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (distributiva).

Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),

Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$

Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),

Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$

Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),

Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),
13. para cada dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las dos relaciones: $x \leq y$ ó $y \leq x$

Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),
13. para cada dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las dos relaciones: $x \leq y$ ó $y \leq x$ (el orden es total),

Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),
13. para cada dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las dos relaciones: $x \leq y$ ó $y \leq x$ (el orden es total),
14. $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$,

Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),
13. para cada dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las dos relaciones: $x \leq y$ ó $y \leq x$ (el orden es total),
14. $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, (compatibilidad del orden con la suma),

Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),
13. para cada dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las dos relaciones: $x \leq y$ ó $y \leq x$ (el orden es total),
14. $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, (compatibilidad del orden con la suma),
15. $x \leq y$ y $0 \leq z$ implica $x \cdot z \leq y \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$

Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),
13. para cada dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las dos relaciones: $x \leq y$ ó $y \leq x$ (el orden es total),
14. $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, (compatibilidad del orden con la suma),
15. $x \leq y$ y $0 \leq z$ implica $x \cdot z \leq y \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (compatibilidad del orden con el producto).

Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),
13. para cada dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las dos relaciones: $x \leq y$ ó $y \leq x$ (el orden es total),
14. $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, (compatibilidad del orden con la suma),
15. $x \leq y$ y $0 \leq z$ implica $x \cdot z \leq y \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (compatibilidad del orden con el producto).

1. $x \geq y$ significa, por definición, lo mismo que $y \leq x$;

Explicación: totalmente ordenado

Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

10. $x \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (reflexiva),
11. $x \leq y$ e $y \leq x$ implican $x = y$ (antisimétrica),
12. $x \leq y$ e $y \leq z$ implican $x \leq z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (transitiva),
13. para cada dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las dos relaciones: $x \leq y$ ó $y \leq x$ (el orden es total),
14. $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, (compatibilidad del orden con la suma),
15. $x \leq y$ y $0 \leq z$ implica $x \cdot z \leq y \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ (compatibilidad del orden con el producto).

1. $x \geq y$ significa, por definición, lo mismo que $y \leq x$;
2. si $x \leq y$ siendo $x \neq y$ entonces escribiremos $x < y$ o, indistintamente, $y > x$.

Explicación: completo

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.

Explicación: completo

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.

Definición: cota superior

Un conjunto $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ se dice acotado superiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $a \leq M$, para todo $a \in A$; M se llama una cota superior de A.

Explicación: completo

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.

Definición: cota superior

Un conjunto $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ se dice acotado superiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $a \leq M$, para todo $a \in A$; M se llama una cota superior de A.

Definición: supremo

Se dice que $\alpha \in \mathbb{R}$ es supremo de A (y se escribe $\alpha = \sup A$) si α es cota superior de A y además cualquier otra cota superior M de A cumple que $\alpha \leq M$.

Explicación: completo

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.

Definición: cota superior

Un conjunto $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ se dice acotado superiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $a \leq M$, para todo $a \in A$; M se llama una cota superior de A.

Definición: supremo

Se dice que $\alpha \in \mathbb{R}$ es supremo de A (y se escribe $\alpha = \sup A$) si α es cota superior de A y además cualquier otra cota superior M de A cumple que $\alpha \leq M$.

Supremo

$\alpha \in \mathbb{R}$ es supremo de A si:

1. $x \leq \alpha$, para cada $x \in M$;
2. Para cada $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in M$ tal que $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Explicación: completo

Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.

Definición: cota superior

Un conjunto $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ se dice acotado superiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $a \leq M$, para todo $a \in A$; M se llama una cota superior de A.

Definición: supremo

Se dice que $\alpha \in \mathbb{R}$ es supremo de A (y se escribe $\alpha = \sup A$) si α es cota superior de A y además cualquier otra cota superior M de A cumple que $\alpha \leq M$.

Supremo

$\alpha \in \mathbb{R}$ es supremo de A si:

1. $x \leq \alpha$, para cada $x \in M$;
2. Para cada $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in M$ tal que $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Completitud

En $\mathbb{R}$ cada conjunto no vacío acotado superiormente posee una cota superior que es la menor de todas las cotas superiores.

Propiedades

Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.

Propiedades

Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Propiedades

Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \dfrac{1}{b} = 1$.

Propiedades

Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \frac{1}{b} = 1$.
4. $c < 0$ equivale a $-c > 0$.

Propiedades

Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \dfrac{1}{b} = 1$.
4. $c < 0$ equivale a $-c > 0$.
5. $(-1) \cdot a = -a$ y por tanto $(-a) \cdot b = -(ab)$.

Propiedades

Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \frac{1}{b} = 1$.
4. $c < 0$ equivale a $-c > 0$.
5. $(-1) \cdot a = -a$ y por tanto $(-a) \cdot b = -(ab)$.
6. Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.

Propiedades

Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \frac{1}{b} = 1$.
4. $c < 0$ equivale a $-c > 0$.
5. $(-1) \cdot a = -a$ y por tanto $(-a) \cdot b = -(ab)$.
6. Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.
7. $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$.

Propiedades

Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \dfrac{1}{b} = 1$.
4. $c < 0$ equivale a $-c > 0$.
5. $(-1) \cdot a = -a$ y por tanto $(-a) \cdot b = -(ab)$.
6. Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.
7. $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$.
8. Si $c < 0$ entonces $a \leq b$ y $ac \geq bc$ son equivalentes.

Propiedades

Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \dfrac{1}{b} = 1$.
4. $c < 0$ equivale a $-c > 0$.
5. $(-1) \cdot a = -a$ y por tanto $(-a) \cdot b = -(ab)$.
6. Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.
7. $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$.
8. Si $c < 0$ entonces $a \leq b$ y $ac \geq bc$ son equivalentes.
9. Si $a \neq 0$ entonces $a \cdot a > 0$; en particular $1 > 0$.

Propiedades

Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \dfrac{1}{b} = 1$.
4. $c < 0$ equivale a $-c > 0$.
5. $(-1) \cdot a = -a$ y por tanto $(-a) \cdot b = -(ab)$.
6. Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.
7. $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$.
8. Si $c < 0$ entonces $a \leq b$ y $ac \geq bc$ son equivalentes.
9. Si $a \neq 0$ entonces $a \cdot a > 0$; en particular $1 > 0$.
10. $a > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > 0$.

Propiedades

Proposición

En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se tiene:

1. Los elementos neutros, opuesto e inverso son únicos.
2. $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \dfrac{1}{b} = 1$.
4. $c < 0$ equivale a $-c > 0$.
5. $(-1) \cdot a = -a$ y por tanto $(-a) \cdot b = -(ab)$.
6. Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.
7. $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$.
8. Si $c < 0$ entonces $a \leq b$ y $ac \geq bc$ son equivalentes.
9. Si $a \neq 0$ entonces $a \cdot a > 0$; en particular $1 > 0$.
10. $a > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > 0$.
11. Si $b > 0$ entonces $a \geq b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} \leq \dfrac{1}{b}$.

Cotas inferiores. Ínfimos

27 Octubre 2008.

Definición

Un subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ se dice acotado inferiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \leq a$ para todo $a \in A$. Cualquier valor M que cumpla la relación anterior se llama una cota inferior de A. Si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ que es cota inferior de A y además cumple que $M \leq \alpha$ para cualquier otra cota inferior M de A, entonces α se llama ínfimo de A y se denota en la forma $\alpha = \inf A$.

Cotas inferiores. Ínfimos

27 Octubre 2008.

Definición

Un subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ se dice acotado inferiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \leq a$ para todo $a \in A$. Cualquier valor M que cumpla la relación anterior se llama una cota inferior de A. Si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ que es cota inferior de A y además cumple que $M \leq \alpha$ para cualquier otra cota inferior M de A, entonces α se llama ínfimo de A y se denota en la forma $\alpha = \inf A$.

Proposición

Si en un cuerpo ordenado se verifica el axioma del supremo, entonces todo subconjunto no vacío acotado inferiormente tiene ínfimo.

Números naturales: $\mathbb{N}$

Definición

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama inductivo si cumple las siguientes condiciones:

- $1 \in I$.
- Si $x \in I$ entonces $x + 1 \in I$.

Números naturales: $\mathbb{N}$

Definición

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama inductivo si cumple las siguientes condiciones:

- $1 \in I$.
- Si $x \in I$ entonces $x+1 \in I$.

Observación

- $\mathbb{R}$ es un conjunto inductivo.
- La intersección de conjuntos inductivos es inductivo.

Números naturales: $\mathbb{N}$

Definición

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama inductivo si cumple las siguientes condiciones:

- $1 \in I$.
- Si $x \in I$ entonces $x + 1 \in I$.

Observación

- $\mathbb{R}$ es un conjunto inductivo.
- La intersección de conjuntos inductivos es inductivo.

Definición

Se llama conjunto de los números naturales y se denota con $\mathbb{N}$ al siguiente conjunto

$$\mathbb{N} := \bigcap \{ I : \text{ donde } I \text{ es un conjunto inductivo de } \mathbb{R} \}.$$

Números naturales: $\mathbb{N}$

Corolario (Método de Inducción)

Cualquier subconjunto $S \subset \mathbb{N}$ que satisfaga las siguientes propiedades

1. $1 \in S$,
2. si $n \in S$ entonces $n+1 \in S$,

verifica que $S = \mathbb{N}$.

Números naturales: $\mathbb{N}$

Corolario (Método de Inducción)

Cualquier subconjunto $S \subset \mathbb{N}$ que satisfaga las siguientes propiedades

1. $1 \in S$,
2. si $n \in S$ entonces $n+1 \in S$,

verifica que $S = \mathbb{N}$.

Los primeros elementos de $\mathbb{N}$ se denotan de la siguiente manera:

	$10 = 9+1$	$20 = 19+1$	$\ldots$	$100 = 99+1$	$\ldots$
1	$11 = 10+1$	$21 = 20+1$		$101 = 100+1$	
$2 = 1+1$	$12 = 11+1$	$22 = 21+1$		$102 = 101+1$	
$3 = 2+1$	$13 = 12+1$	$23 = 22+1$		$103 = 102+1$	
$4 = 3+1$	$14 = 13+1$	$24 = 23+1$		$104 = 103+1$	
$5 = 4+1$	$15 = 14+1$	$25 = 24+1$		$105 = 104+1$	
$6 = 5+1$	$16 = 15+1$	$26 = 25+1$		$106 = 105+1$	
$7 = 6+1$	$17 = 16+1$	$27 = 26+1$		$107 = 106+1$	
$8 = 7+1$	$18 = 17+1$	$28 = 27+1$		$108 = 107+1$	
$9 = 8+1$	$19 = 18+1$	$29 = 28+1$		$109 = 108+1$	

Método de inducción

El método de inducción es usado con frecuencia en la demostración de fórmulas y resultados relativos a números naturales.

Método de inducción

El método de inducción es usado con frecuencia en la demostración de fórmulas y resultados relativos a números naturales.

Ejemplo

Para cualquier número natural $n \geq 1$ se verifica que $4^n > n^2$.

Método de inducción

El método de inducción es usado con frecuencia en la demostración de fórmulas y resultados relativos a números naturales.

Ejemplo

Para cualquier número natural $n \geq 1$ se verifica que $4^n > n^2$.

Ejemplo

Para cualquier número natural $n \geq 1$ y $x \in \mathbb{R}, x \geq -1$ se tiene que $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Método de inducción

El método de inducción es usado con frecuencia en la demostración de fórmulas y resultados relativos a números naturales.

Ejemplo

Para cualquier número natural $n \geq 1$ se verifica que $4^n > n^2$.

Ejemplo

Para cualquier número natural $n \geq 1$ y $x \in \mathbb{R}, x \geq -1$ se tiene que $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Observación

1. La formulación del método de inducción tiene dos propiedades. A) $1 \in S$ B) si $n \in S$ entonces $n+1 \in S$.
2. Si $S \subset \mathbb{N}$ es tal que $N \in S$ y $n \in S$ entonces $n+1 \in S$, entonces $S = \{N, N+1, N+2, \ldots\}$.

Método de inducción

Corolario, Método de inducción, versión fuerte

Sea $S \subset \mathbb{N}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $1 \in S$
2. si $1, 2, \ldots, n \in S$ entonces $n+1 \in S$

Entonces $S = \mathbb{N}$.

Método de inducción

Corolario, Método de inducción, versión fuerte

Sea $S \subset \mathbb{N}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $1 \in S$
2. si $1, 2, \ldots, n \in S$ entonces $n+1 \in S$

Entonces $S = \mathbb{N}$.

Ejemplo, Teorema Fundamental de la Aritmética

Todo número entero $n \geq 2$ es primo o producto de números primos.

Enteros, racionales y propiedad arquimediana

Definición

El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y el de los números racionales $\mathbb{Q}$ están definidos del siguiente modo:

1. $\mathbb{Z} := \{0\} \bigcup \{n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, \text{ o bien } -n \in \mathbb{N}\}$
2. $\mathbb{Q} := \{m \cdot \frac{1}{n} : m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$. El número real $m \cdot \frac{1}{n}$ se denota indistintamente como $\frac{m}{n}$ o como m/n.

Enteros, racionales y propiedad arquimediana

Definición

El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y el de los números racionales $\mathbb{Q}$ están definidos del siguiente modo:

1. $\mathbb{Z} := \{0\} \bigcup \{n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, \text{ o bien } -n \in \mathbb{N}\}$
2. $\mathbb{Q} := \{m \cdot \frac{1}{n} : m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$. El número real $m \cdot \frac{1}{n}$ se denota indistintamente como $\frac{m}{n}$ o como m/n.

Proposición

El cuerpo $\mathbb{R}$ tiene la propiedad arquimediana, es decir, dados $x, y \in \mathbb{R}$, con $0 < y$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < ny$.

Enteros, racionales y propiedad arquimediana

Definición

El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y el de los números racionales $\mathbb{Q}$ están definidos del siguiente modo:

1. $\mathbb{Z} := \{0\} \bigcup \{n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, \text{ o bien } -n \in \mathbb{N}\}$
2. $\mathbb{Q} := \{m \cdot \frac{1}{n} : m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$. El número real $m \cdot \frac{1}{n}$ se denota indistintamente como $\frac{m}{n}$ o como m/n.

Proposición

El cuerpo $\mathbb{R}$ tiene la propiedad arquimediana, es decir, dados $x, y \in \mathbb{R}$, con $0 < y$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < ny$.

Proposición

- $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.
- $\mathbb{Z}$ no está acotado ni superior ni inferiormente.

Enteros, racionales y propiedad arquimediana

Proposición

Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ tiene primer elemento.

Enteros, racionales y propiedad arquimediana

Proposición

Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ tiene primer elemento.

Proposición

Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único número entero m que verifica $m \leq x < m+1$.

Enteros, racionales y propiedad arquimediana

Proposición

Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ tiene primer elemento.

Proposición

Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único número entero m que verifica $m \leq x < m+1$.

Definición

Sea $x \in \mathbb{R}$, el único número entero m que verifica

$$m \leq x < m+1$$

se llama parte entera de x y se denota con $[x]$, es decir $[x] := m$.

Enteros, racionales y propiedad arquimediana

Proposición

Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ tiene primer elemento.

Proposición

Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único número entero m que verifica $m \leq x < m+1$.

Definición

Sea $x \in \mathbb{R}$, el único número entero m que verifica

$$m \leq x < m+1$$

se llama parte entera de x y se denota con $[x]$, es decir $[x] := m$.

Proposición

Si $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

Raíces cuadradas

Definición

En un cuerpo ordenado X, si $x = y^2$ se dice que y es una raíz cuadrada de x. Es muy fácil observar que si y es una raíz cuadrada de x, $-y$ también es una raíz cuadrada de x,y que x no puede tener más raíces cuadradas.

Raíces cuadradas

Definición

En un cuerpo ordenado X, si $x = y^2$ se dice que y es una raíz cuadrada de x. Es muy fácil observar que si y es una raíz cuadrada de x, $-y$ también es una raíz cuadrada de x,y que x no puede tener más raíces cuadradas.

Proposición

No existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.

Raíces cuadradas

Definición

En un cuerpo ordenado X, si $x = y^2$ se dice que y es una raíz cuadrada de x. Es muy fácil observar que si y es una raíz cuadrada de x, $-y$ también es una raíz cuadrada de x,y que x no puede tener más raíces cuadradas.

Proposición

No existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.

Definición

$$(1+\varepsilon)^n < 1 + 3^n\varepsilon \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad 0 < \varepsilon < 1; \tag{1}$$

Raíces cuadradas

Definición

En un cuerpo ordenado X, si $x = y^2$ se dice que y es una raíz cuadrada de x. Es muy fácil observar que si y es una raíz cuadrada de x, $-y$ también es una raíz cuadrada de x,y que x no puede tener más raíces cuadradas.

Proposición

No existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.

Definición

$$(1+\varepsilon)^n < 1 + 3^n\varepsilon \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad 0 < \varepsilon < 1; \tag{1}$$

Proposición

Si $0 < r \in \mathbb{Q}$ cumple $r^2 < 2$, entonces existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $r < t$ y $r^2 < t^2 < 2$.
Análogamente si $0 < s \in \mathbb{Q}$ cumple $s^2 > 2$, entonces existe $w \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < w < s$ y $s^2 > w^2 > 2$.
Además las afirmaciones anteriores son también ciertas si los números reales r y s no son racionales.

Raíces cuadradas

Definición

En un cuerpo ordenado X, si $x = y^2$ se dice que y es una raíz cuadrada de x. Es muy fácil observar que si y es una raíz cuadrada de x, $-y$ también es una raíz cuadrada de x,y que x no puede tener más raíces cuadradas.

Proposición

No existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.

Definición

$$(1+\varepsilon)^n < 1+3^n\varepsilon \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad 0 < \varepsilon < 1; \tag{1}$$

Proposición

Si $0 < r \in \mathbb{Q}$ cumple $r^2 < 2$, entonces existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $r < t$ y $r^2 < t^2 < 2$.
Análogamente si $0 < s \in \mathbb{Q}$ cumple $s^2 > 2$, entonces existe $w \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < w < s$ y $s^2 > w^2 > 2$.
Además las afirmaciones anteriores son también ciertas si los números reales r y s no son racionales.

Raíces cuadradas

Proposición

Existe un número $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $\alpha^2 = 2$. Además

$$\alpha = \sup\{0 \leq r \in \mathbb{Q} : \ r^2 < 2\}$$

Raíces cuadradas

Proposición

Existe un número $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $\alpha^2 = 2$. Además

$$\alpha = \sup\{0 \leq r \in \mathbb{Q} : \; r^2 < 2\}$$

Proposición

Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, entonces existe $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < z < y$.