Análisis Matemático I: Series e integrales impropias

Presentaciones de Clase

Universidad de Murcia

Curso 2006-2007

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de sucesión.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de sucesión.
2. Definir y entender el concepto de límite de una sucesión y sus propiedades.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de sucesión.
2. Definir y entender el concepto de límite de una sucesión y sus propiedades.
3. Estudiar la relación entre monotonía y convergencia de sucesiones.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de sucesión.
2. Definir y entender el concepto de límite de una sucesión y sus propiedades.
3. Estudiar la relación entre monotonía y convergencia de sucesiones.
4. Estudio de subsucesiones: Teorema de Bolzano.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de sucesión.
2. Definir y entender el concepto de límite de una sucesión y sus propiedades.
3. Estudiar la relación entre monotonía y convergencia de sucesiones.
4. Estudio de subsucesiones: Teorema de Bolzano.
5. Estudio de sucesiones de Cauchy: Completitud.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de sucesión.
2. Definir y entender el concepto de límite de una sucesión y sus propiedades.
3. Estudiar la relación entre monotonía y convergencia de sucesiones.
4. Estudio de subsucesiones: Teorema de Bolzano.
5. Estudio de sucesiones de Cauchy: Completitud.
6. Estudio de las funciones exponencial y logaritmo.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de sucesión.
2. Definir y entender el concepto de límite de una sucesión y sus propiedades.
3. Estudiar la relación entre monotonía y convergencia de sucesiones.
4. Estudio de subsucesiones: Teorema de Bolzano.
5. Estudio de sucesiones de Cauchy: Completitud.
6. Estudio de las funciones exponencial y logaritmo.
7. Infinitos: comparación de infinitos.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de sucesión.
2. Definir y entender el concepto de límite de una sucesión y sus propiedades.
3. Estudiar la relación entre monotonía y convergencia de sucesiones.
4. Estudio de subsucesiones: Teorema de Bolzano.
5. Estudio de sucesiones de Cauchy: Completitud.
6. Estudio de las funciones exponencial y logaritmo.
7. Infinitos: comparación de infinitos.
8. Manipular expresiones involucrando límites. Resolver ejercicios que involucran límites.

Sumas parciales y suma total

Definición

1. Se llama sucesión en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (representados indistintamente por $\mathbb{K}$) a cualquier aplicación $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$. Si $a_n := \varphi(n)$ la sucesión se denota con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o brevemente $(a_n)_n$. El número real a_n recibe el nombre de término general de la sucesión.

Sumas parciales y suma total

Definición

1. Se llama sucesión en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (representados indistintamente por $\mathbb{K}$) a cualquier aplicación $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$. Si $a_n := \varphi(n)$ la sucesión se denota con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o brevemente $(a_n)_n$. El número real a_n recibe el nombre de término general de la sucesión.
2. Se dice que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene por límite $a \in \mathbb{K}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $|a_n - a| < \varepsilon$. La notación que se utiliza es la siguiente:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_n a_n.$$

Sumas parciales y suma total

Definición

1. Se llama sucesión en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ (representados indistintamente por $\mathbb{K}$) a cualquier aplicación $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$. Si $a_n := \varphi(n)$ la sucesión se denota con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o brevemente $(a_n)_n$. El número real a_n recibe el nombre de término general de la sucesión.
2. Se dice que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene por límite $a \in \mathbb{K}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $|a_n - a| < \varepsilon$. La notación que se utiliza es la siguiente:
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_n a_n.$$
3. Una sucesión se dice convergente cuando tiene límite.

Ejemplos de sucesiones convergentes

Ejemplos

1. La sucesión constante dada por $a_n := a \in \mathbb{K}$ es convergente con límite a.

Ejemplos de sucesiones convergentes

Ejemplos

1. La sucesión constante dada por $a_n := a \in \mathbb{K}$ es convergente con límite a.
2. La sucesión dada por $a_n := 1/n$ es convergente y su límite es 0.

Ejemplos de sucesiones convergentes

Ejemplos

1. La sucesión constante dada por $a_n := a \in \mathbb{K}$ es convergente con límite a.
2. La sucesión dada por $a_n := 1/n$ es convergente y su límite es 0.
3. La sucesión dada por

$$a_n := \frac{n}{n^6 + 5n^3 + 2n + 1}$$

tiene límite cero.

Ejemplos de sucesiones convergentes

Ejemplos

1. La sucesión constante dada por $a_n := a \in \mathbb{K}$ es convergente con límite a.
2. La sucesión dada por $a_n := 1/n$ es convergente y su límite es 0.
3. La sucesión dada por

$$a_n := \frac{n}{n^6 + 5n^3 + 2n + 1}$$

   tiene límite cero.
4. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{K}$ y $a = \lim_n a_n$, entonces se cumple que $|a| = \lim_n |a_n|$.

Ejemplos de sucesiones convergentes

Ejemplos

1. La sucesión constante dada por $a_n := a \in \mathbb{K}$ es convergente con límite a.
2. La sucesión dada por $a_n := 1/n$ es convergente y su límite es 0.
3. La sucesión dada por
$$a_n := \frac{n}{n^6 + 5n^3 + 2n + 1}$$
tiene límite cero.
4. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{K}$ y $a = \lim_n a_n$, entonces se cumple que $|a| = \lim_n |a_n|$.
5. Si $a_n > 0$ para todo n y existe $a = \lim_n a_n$ entonces $\lim_n \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Ejemplos de sucesiones convergentes

Ejemplos

6. Si $r \in \mathbb{K}$ y $|r| < 1$ entonces la sucesión $(a_n)_n$ donde $a_n := r^n$ tiene límite 0.

Ejemplos de sucesiones convergentes

Ejemplos

6. Si $r \in \mathbb{K}$ y $|r| < 1$ entonces la sucesión $(a_n)_n$ donde $a_n := r^n$ tiene límite 0.
7. La sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde

$$z_n = \frac{1}{n} + \frac{n}{n+1} i$$

tiene por límite i.

Ejemplos de sucesiones convergentes

Ejemplos

6. Si $r \in \mathbb{K}$ y $|r| < 1$ entonces la sucesión $(a_n)_n$ donde $a_n := r^n$ tiene límite 0.
7. La sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde
$$z_n = \frac{1}{n} + \frac{n}{n+1} i$$
tiene por límite i.
8. Una *progresión geométrica* de razón r es una sucesión $(a_n)_n$ en $\mathbb{K}$ donde a_1 es un elemento arbitrario de $\mathbb{K}$ y $a_n := a_1 r^{n-1}$ para $n > 1$. Si $|r| < 1$ se tiene
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \lim_n \frac{a_1 - a_n r}{1-r} = \frac{a_1 - \lim_n a_1 r^{n-1} r}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

Intervalos

Definición

Si $a \leq b$ son números reales:

- Se llama intervalo cerrado de extremos a, b al conjunto

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}.$$

Intervalos

Definición

Si $a \leq b$ son números reales:

- Se llama intervalo cerrado de extremos a, b al conjunto

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}.$$

- Se llama intervalo abierto de extremos a, b al conjunto

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}.$$

Intervalos

Definición

Si $a \leq b$ son números reales:

- Se llama intervalo cerrado de extremos a, b al conjunto
$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}.$$
- Se llama intervalo abierto de extremos a, b al conjunto
$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}.$$
- Los conjuntos $[a,b)$ y $(a,b]$ reciben el nombre de intervalos semiabiertos por la derecha e izquierda respectivamente:
$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\} \quad (a,b] := \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$$

Intervalos

Definición

Si $a \leq b$ son números reales:

- Se llama intervalo cerrado de extremos a, b al conjunto
$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R};\, a \leq x \leq b\}.$$
- Se llama intervalo abierto de extremos a, b al conjunto
$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R};\, a < x < b\}.$$
- Los conjuntos $[a,b)$ y $(a,b]$ reciben el nombre de intervalos semiabiertos por la derecha e izquierda respectivamente:
$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R};\, a \leq x < b\} \quad (a,b] := \{x \in \mathbb{R};\, a < x \leq b\}$$
- Se llama longitud del intervalo al número real $b - a$.

Bolas. Propiedades de las sucesiones convergentes

Definición

1. Se llama bola cerrada de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B[x_0, r]$ al conjunto $B[x_0, r] := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| \leq r\}$.
2. Se llama bola abierta de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B(x_0, r)$ al conjunto $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| < r\}$.

Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es claro que $B(x, r) = (x - r, x + r)$ y $B[x, r] = [x - r, x + r]$.

Bolas. Propiedades de las sucesiones convergentes

Definición

1. Se llama bola cerrada de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B[x_0, r]$ al conjunto $B[x_0, r] := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| \leq r\}$.
2. Se llama bola abierta de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B(x_0, r)$ al conjunto $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| < r\}$.

Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es claro que $B(x, r) = (x - r, x + r)$ y $B[x, r] = [x - r, x + r]$.

Proposición

El límite de una sucesión convergente es único.

Bolas. Propiedades de las sucesiones convergentes

Definición

1. Se llama bola cerrada de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B[x_0, r]$ al conjunto $B[x_0, r] := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| \leq r\}$.
2. Se llama bola abierta de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B(x_0, r)$ al conjunto $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| < r\}$.

Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es claro que $B(x, r) = (x - r, x + r)$ y $B[x, r] = [x - r, x + r]$.

Proposición

El límite de una sucesión convergente es único.

Definición

Una sucesión se dice acotada si su imagen, es decir el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, es un conjunto acotado de $\mathbb{R}$.

Bolas. Propiedades de las sucesiones convergentes

Definición

1. Se llama bola cerrada de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B[x_0, r]$ al conjunto $B[x_0, r] := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| \leq r\}$.
2. Se llama bola abierta de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B(x_0, r)$ al conjunto $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| < r\}$.

Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es claro que $B(x, r) = (x - r, x + r)$ y $B[x, r] = [x - r, x + r]$.

Proposición

El límite de una sucesión convergente es único.

Definición

Una sucesión se dice acotada si su imagen, es decir el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, es un conjunto acotado de $\mathbb{R}$.

Proposición

Las sucesiones convergentes de $\mathbb{K}$ son acotadas.

Sucesiones complejas

Proposición

Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y sea $z_n = a_n + ib_n$ donde a_n y b_n son, respectivamente, la parte real e imaginaria del complejo z_n.

1. Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite $z = a + bi$, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite a y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite b.
2. Recíprocamente, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite a y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite b, entonces $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite $a + bi$.

Álgebra de límites

Proposición

Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ sucesiones convergentes en $\mathbb{K}$ con límites a y b, respectivamente. Entonces:

1. $(a_n + b_n)_n$ es una sucesión convergente con límite $a + b$.

Álgebra de límites

Proposición

Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ sucesiones convergentes en $\mathbb{K}$ con límites a y b, respectivamente. Entonces:

1. $(a_n + b_n)_n$ es una sucesión convergente con límite $a + b$.
2. $(a_n b_n)_n$ es una sucesión convergente con límite ab.

Álgebra de límites

Proposición

Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ sucesiones convergentes en $\mathbb{K}$ con límites a y b, respectivamente. Entonces:

1. $(a_n + b_n)_n$ es una sucesión convergente con límite $a + b$.
2. $(a_n b_n)_n$ es una sucesión convergente con límite ab.
3. Si $b_n \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces la sucesión $(a_n/b_n)_n$ tiene por límite a/b.

Convergencia y monotonía

Proposición

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes de números reales con límites a y b respectivamente.

1. Si $a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $a \leq b$.

Convergencia y monotonía

Proposición

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes de números reales con límites a y b respectivamente.

1. Si $a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $a \leq b$.
2. Si $a < b$, entonces se verifica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < b_n$ para todo $n > n_0$.

Convergencia y monotonía

Proposición

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes de números reales con límites a y b respectivamente.

1. Si $a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $a \leq b$.
2. Si $a < b$, entonces se verifica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < b_n$ para todo $n > n_0$.
3. Si $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ y $(c_n)_n$ son sucesiones de números reales tales que

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

   y $\lim_n a_n = \lim_n b_n = \alpha$, entonces $\lim_n c_n = \alpha$ (regla del sandwich).

Convergencia y monotonía

Proposición

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes de números reales con límites a y b respectivamente.

1. Si $a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $a \leq b$.
2. Si $a < b$, entonces se verifica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < b_n$ para todo $n > n_0$.
3. Si $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ y $(c_n)_n$ son sucesiones de números reales tales que
$$a_n \leq c_n \leq b_n$$
y $\lim_n a_n = \lim_n b_n = \alpha$, entonces $\lim_n c_n = \alpha$ (regla del sandwich).

Aplicación

Sea $\mathbb{R}_+ := [0,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $x \in \mathbb{R}_+$ y $[x]$ su parte entera. Calcular:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2}.$$

Convergencia y monotonía

Proposición

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$.

1. Se dice que la sucesión es monótona creciente o simplemente creciente si $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Se dice que la sucesión es monótona decreciente o simplemente decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Se dice que la sucesión es monótona si es creciente o decreciente.

Convergencia y monotonía

Proposición

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$.

1. Se dice que la sucesión es monótona creciente o simplemente creciente si $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Se dice que la sucesión es monótona decreciente o simplemente decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Se dice que la sucesión es monótona si es creciente o decreciente.

Proposición

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona de números reales.

1. Si la sucesión es creciente y acotada superiormente entonces es convergente siendo su límite el número real $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si la sucesión es decreciente y acotada inferiormente entonces es convergente siendo su límite el número real $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Convergencia y monotonía

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $(a_n)_n$ definida recurrentemente por las fórmulas

$$a_1 = \sqrt{2} \quad , \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Convergencia y monotonía

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $(a_n)_n$ definida recurrentemente por las fórmulas

$$a_1 = \sqrt{2} \quad , \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Proposición

1. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es es monótona creciente y acotada.

Convergencia y monotonía

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $(a_n)_n$ definida recurrentemente por las fórmulas

$$a_1 = \sqrt{2} \quad , \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Proposición

1. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es es monótona creciente y acotada.
2. La sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ es monótona decreciente y acotada.

Convergencia y monotonía

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $(a_n)_n$ definida recurrentemente por las fórmulas

$$a_1 = \sqrt{2} \quad , \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Proposición

1. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es es monótona creciente y acotada.
2. La sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ es monótona decreciente y acotada.
3. $\lim_n a_n = \lim_n b_n =: e$.

Convergencia y monotonía

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $(a_n)_n$ definida recurrentemente por las fórmulas

$$a_1 = \sqrt{2} \quad , \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Proposición

1. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es es monótona creciente y acotada.
2. La sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ es monótona decreciente y acotada.
3. $\lim_n a_n = \lim_n b_n =: e$.
4. El número e también es el límite de la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Convergencia y monotonía

Ejemplo

Calcular el límite de la sucesión $(a_n)_n$ definida recurrentemente por las fórmulas

$$a_1 = \sqrt{2} \quad , \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Proposición

1. La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es es monótona creciente y acotada.
2. La sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ es monótona decreciente y acotada.
3. $\lim_n a_n = \lim_n b_n =: e$.
4. El número e también es el límite de la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por
$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$
5. El número real e es irracional.

Teorema de Bolzano-Weierstras

Proposición (Principio del encaje de Cantor)

Sea $\{(I_n)_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ tales que:

1. $I_{n+1} \subset I_n$;
2. la longitud de I_n tiene por límite cero.

Entonces existe un único número real común a todos los intervalos.

Teorema de Bolzano-Weierstras

Proposición (Principio del encaje de Cantor)

Sea $\{(I_n)_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ tales que:

1. $I_{n+1} \subset I_n$;
2. la longitud de I_n tiene por límite cero.

Entonces existe un único número real común a todos los intervalos.

?

Considere la sucesión de intervalos $I_n = (0, 1/n)$. Calcule $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Analice el resultado a la luz de la proposición anterior. ¿La contradice? ¿Qué ocurre?

Teorema de Bolzano-Weierstras

Proposición (Principio del encaje de Cantor)

Sea $\{(I_n)_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ tales que:

1. $I_{n+1} \subset I_n$;
2. la longitud de I_n tiene por límite cero.

Entonces existe un único número real común a todos los intervalos.

?

Considere la sucesión de intervalos $I_n = (0, 1/n)$. Calcule $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Analice el resultado a la luz de la proposición anterior. ¿La contradice? ¿Qué ocurre?

Definición

Sea $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ una sucesión y sea $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ monótona estrictamente creciente. La sucesión $\varphi \circ \tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ se dice que es una subsucesión de la anterior. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión inicial entonces la subsucesión se denota del siguiente modo $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} := (\varphi \circ \tau(k))_{k\in\mathbb{N}}$.

Teorema de Bolzano-Weierstras

Proposición

Si una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente cualquier subsucesión suya converge al mismo límite.

Teorema de Bolzano-Weierstras

Proposición

Si una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente cualquier subsucesión suya converge al mismo límite.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Cualquier sucesión acotada en $\mathbb{R}$ posee una subsucesión convergente.

Teorema de Bolzano-Weierstras

Proposición

Si una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente cualquier subsucesión suya converge al mismo límite.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Cualquier sucesión acotada en $\mathbb{R}$ posee una subsucesión convergente.

Proposición

Cualquier sucesión acotada en $\mathbb{C}$ posee una subsucesión convergente.

Teorema de Bolzano-Weierstras

Proposición

Si una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente cualquier subsucesión suya converge al mismo límite.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Cualquier sucesión acotada en $\mathbb{R}$ posee una subsucesión convergente.

Proposición

Cualquier sucesión acotada en $\mathbb{C}$ posee una subsucesión convergente.

Proposición

Si una sucesión acotada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$ tiene la propiedad de que cualquier subsucesión suya que converja tiene por límite un valor fijo $a \in \mathbb{K}$, entonces

$$a = \lim_n a_n.$$

Sucesiones de Cauchy: completitud

Definición

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$ se dice de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si n, m son números naturales verificando $n_0 \leq n$ y $n_0 \leq m$ entonces $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Sucesiones de Cauchy: completitud

Definición

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$ se dice de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si n, m son números naturales verificando $n_0 \leq n$ y $n_0 \leq m$ entonces $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Ejemplo

Las sucesiones de términos generales

$$a_n = 1/n \quad \text{y} \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

son de Cauchy.

Sucesiones de Cauchy: completitud

Definición

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$ se dice de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si n, m son números naturales verificando $n_0 \leq n$ y $n_0 \leq m$ entonces $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Ejemplo

Las sucesiones de términos generales

$$a_n = 1/n \quad \text{y} \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

son de Cauchy.

Teorema. Completitud de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

Una sucesión en $\mathbb{K}$ es convergente si y sólo si es de Cauchy.

Funciones elementales: potencias de exponentes enteros

Definición

Cuando $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, con a^n se denota el producto de a por sí mismo n-veces.

Funciones elementales: potencias de exponentes enteros

Definición

Cuando $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, con a^n se denota el producto de a por sí mismo n-veces.

Proposición

Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ entonces:

1. $a^{n+m} = a^n a^m$.
2. $(ab)^n = a^n b^n$.
3. $(a^n)^m = a^{nm}$.
4. • Si $a > 1$ y $n < m$, entonces $a^n < a^m$.
   • Si $a < 1$ y $n < m$, entonces $a^n > a^m$.
5. • Si $0 < a < b$ y $n > 0$, entonces $a^n < b^n$.

Funciones elementales: potencias de exponentes enteros

Definición

Cuando $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, con a^n se denota el producto de a por sí mismo n-veces.

Proposición

Si $n, m \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ entonces:

1. $a^{n+m} = a^n a^m$.
2. $(ab)^n = a^n b^n$.
3. $(a^n)^m = a^{nm}$.
4. • Si $a > 1$ y $n < m$, entonces $a^n < a^m$.
   • Si $a < 1$ y $n < m$, entonces $a^n > a^m$.
5. • Si $0 < a < b$ y $n > 0$, entonces $a^n < b^n$.

Definición

La definición de a^n puede extenderse para $n \in \mathbb{Z}$ definiendo $a^0 := 1$ y $a^n = 1/a^{-n}$ si n es un entero negativo.

Funciones elementales: potencias de exponentes racionales

Definición

- Dado un real positivo a y $n \in \mathbb{N}$ existe un único real positivo b denotado como $\sqrt[n]{b}$ que cumple $b^n = a$ y que recibe el nombre de raíz n-ésima de a. Definimos entonces $a^{1/n} := \sqrt[n]{a}$.

Funciones elementales: potencias de exponentes racionales

Definición

- Dado un real positivo a y $n \in \mathbb{N}$ existe un único real positivo b denotado como $\sqrt[n]{b}$ que cumple $b^n = a$ y que recibe el nombre de raíz n-ésima de a. Definimos entonces $a^{1/n} := \sqrt[n]{a}$.
- Se define $a^{\frac{m}{n}}$ donde $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ mediante la fórmula

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}.$$

Funciones elementales: potencias de exponentes racionales

Definición

- Dado un real positivo a y $n \in \mathbb{N}$ existe un único real positivo b denotado como $\sqrt[n]{b}$ que cumple $b^n = a$ y que recibe el nombre de raíz n-ésima de a. Definimos entonces $a^{1/n} := \sqrt[n]{a}$.
- Se define $a^{\frac{m}{n}}$ donde $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ mediante la fórmula

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}.$$

Nota

Si $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ entonces se cumple que

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p]{a^p} = a^{\frac{p}{q}},$$

con lo que queda unívocamente definido a^r para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Funciones elementales: potencias de exponentes racionales

Proposición

Sean $r, s \in \mathbb{Q}$ y a, b reales estrictamente mayores que cero.

1. $a^{r+s} = a^r a^s$.
2. $(ab)^r = a^r b^r$.
3. $(a^r)^s = a^{rs}$.
4. - Si $a > 1$ y $r < s$, entonces $a^r < a^s$.
   - Si $0 < a < 1$ y $r < s$, entonces $a^r > a^s$.
5. - Si $0 < a < b$ y $r > 0$, entonces $a^r < b^r$.
   - Si $0 < a < b$ y $r < 0$, entonces $a^r > b^r$.

Funciones elementales: potencias de exponentes reales

Proposición

Si a es un número real positivo entonces:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$;
2. para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a^r - 1| < \varepsilon$ para cada racional r que cumpla $0 < r \leq 1/n_0$.

Funciones elementales: potencias de exponentes reales

Proposición

Si a es un número real positivo entonces:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$;
2. para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a^r - 1| < \varepsilon$ para cada racional r que cumpla $0 < r \leq 1/n_0$.

Proposición

1. Si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de racionales con límite x, entonces existe $\lim\limits_{n} a^{r_n}$.
2. El límite anterior es independiente de la sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Funciones elementales: potencias de exponentes reales

Proposición

Si a es un número real positivo entonces:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$;
2. para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a^r - 1| < \varepsilon$ para cada racional r que cumpla $0 < r \leq 1/n_0$.

Proposición

1. Si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de racionales con límite x, entonces existe $\lim\limits_n a^{r_n}$.
2. El límite anterior es independiente de la sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición

Si $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ se define $a^x := \lim_n a^{r_n}$, donde $(r_n)_n$ es cualquier sucesión de racionales convergente a x.

Funciones elementales: potencias de exponentes reales

Proposición

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $a, b > 0$.

1. $a^{x+y} = a^x a^y$.
2. $(ab)^x = a^x b^x$.
3. $(a^x)^y = a^{xy}$.
4. • Si $a > 1$ y $x < y$, entonces $a^x < a^y$ (la función a^x es creciente si $a > 1$).
   • Si $0 < a < 1$ y $x < y$, entonces $a^x > a^y$ (a^x es decreciente si $a < 1$).
5. • Si $0 < a < b$ y $x > 0$, entonces $a^x < b^x$.
   • Si $0 < a < b$ y $x < 0$, entonces $a^x > b^x$.
6. Si $(x_n)_n$ converge a x entonces $\lim a^{x_n} = a^x$.
7. • Si $a > 1$, para cada $k \in \mathbb{R}$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $x > t$ implica $a^x > k$ (a^x no está acotada superiormente si $a > 1$).
   • Si $a < 1$ para cada $\varepsilon > 0$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $x > t$ implica $a^x < \varepsilon$ (a^x tiene ínfimo 0 si $a < 1$).

La función logaritmo

Proposición

Si $0 < a \neq 1$ y $x > 0$ existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $a^y = x$.

La función logaritmo

Proposición

Si $0 < a \neq 1$ y $x > 0$ existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $a^y = x$.

Definición

Para $a > 0$, $a \neq 1$, y $x > 0$, se llama logaritmo en base a de x al único número real y que satisface la ecuación $a^y = x$. Se escribe $\log_a x := y$. Cuando $a = e$ se llama logaritmo neperiano y se denota simplemente con $\log x$.

La función logaritmo

Proposición

La función logaritmo en base a tiene las siguientes propiedades:

1. • Es una función estrictamente creciente cuando $a > 1$, es decir, si $0 < x < y$ entonces $\log_a x < \log_a y$;
   • Es una función estrictamente decreciente cuando $a < 1$, es decir, si $0 < x < y$ entonces $\log_a x > \log_a y$;
2. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.
3. $\log_a x/y = \log_a x - \log_a y$.
4. $\log_a x^z = z \log_a x$.
5. Si $\lim_n x_n = x$ con $x_n > 0$ y $x > 0$ entonces $\lim_n \log_a x_n = \log_a x$.

siendo x, y, z números reales, con $x > 0$, $y > 0$.

Límites infinitos

Definición

1. Se dice que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales tiene por límite *más infinito*, y se escribe $\lim_n a_n = +\infty$, si para cada $M > 0$ existe un número natural n_0 tal que $a_n > M$ si $n > n_0$.
2. Se dice que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales tiene por límite *menos infinito*, y se escribe $\lim_n a_n = -\infty$, si para cada $M < 0$ existe un número natural n_0 tal que $a_n < M$ si $n > n_0$.

Límites infinitos

Aritmética con el ∞

1. Si $\lim_n a_n = \infty$ (resp. $-\infty$) y $\lim_n b_n = \infty$ (resp. $-\infty$) entonces
$$\lim_n (a_n + b_n) = \infty \text{ (resp. } -\infty).$$
2. Si $\lim_n a_n = +\infty$ y $\lim_n b_n = b \neq 0$ entonces
$$\lim_n a_n b_n = +\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_n a_n b_n = -\infty$$
según que b sea positivo o negativo.
3. Si $\lim_n a_n = +\infty$ y $\lim_n b_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) entonces $\lim_n a_n b_n = \infty$ (resp. $-\infty$).
4. Si $\lim_n a_n = a \in \mathbb{R}$ y $\lim_n b_n = \pm\infty$ entonces $\lim_n a_n / b_n = 0$.

El segundo apartado se obtiene del primero. En efecto: fijado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene

$$1 - \varepsilon < a^{1/n} < 1 + \varepsilon.$$

Si $0 < r \leq 1/n_0$ y suponemos $a > 1$, utilizando el apartado 4 de la proposión **??** se tiene

$$1 - \varepsilon < a^{1/n} < a^r \leq a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon$$

para cada $n_0 < n \in \mathbb{N}$ que cumpla $1/n < r$.
Cuando $a < 1$, aplicando de nuevo la mencionada proposión, se tiene

$$1 - \varepsilon < a^{1/n_0} < a^r < a^{1/n} < 1 + \varepsilon$$

de modo que en ambos casos

$$|a^r - 1| < \varepsilon$$

lo cual prueba el segundo apartado.