Análisis Matemático I: Cálculo diferencial

Presentaciones de Clase

Universidad de Murcia

Curso 2007-2008

Objetivos

- Definir, entender y aplicar el concepto de función derivable.
- Estudiar la relación entre derivabilidad, crecimiento, máximos y mínimos, optimización, etc.
- Estudiar la aproximación de funciones mediante polinomios: fórmula de Taylor.
- Estudiar la noción de convexidad: relación con la derivabilidad.

Funciones derivables

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ se dice que es derivable en $c \in I$ si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} := f'(c).$$

El valor $f'(c)$ recibe el nombre de derivada de f en c y es frecuente llamar a

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

cociente incremental de f en c.

Funciones derivables

Definición

Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ se dice que es derivable en $c \in I$ si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} := f'(c).$$

El valor $f'(c)$ recibe el nombre de derivada de f en c y es frecuente llamar a

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

cociente incremental de f en c.

Interpretaciones

1. Geométrica: como la pendiente de la recta tangente.

Funciones derivables

Definición

Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ se dice que es derivable en $c \in I$ si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} := f'(c).$$

El valor $f'(c)$ recibe el nombre de derivada de f en c y es frecuente llamar a

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

cociente incremental de f en c.

Interpretaciones

1. Geométrica: como la pendiente de la recta tangente.
2. Física: como la velocidad.

Funciones derivables

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I se dice derivable en I si f es derivable en cada punto de I. La función $f' : I \to \mathbb{R}$ así definida se llama la función derivada de f.

Funciones derivables

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I se dice derivable en I si f es derivable en cada punto de I. La función $f' : I \to \mathbb{R}$ así definida se llama la función derivada de f.

Ejemplos

1. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función constante en un intervalo I, entonces f es derivable en I con derivada nula

Funciones derivables

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I se dice derivable en I si f es derivable en cada punto de I. La función $f' : I \to \mathbb{R}$ así definida se llama la función derivada de f.

Ejemplos

1. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función constante en un intervalo I, entonces f es derivable en I con derivada nula
2. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = x$ entonces f es derivable en I con derivada $f'(x) = 1$ para todo $x \in I$

Funciones derivables

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I se dice derivable en I si f es derivable en cada punto de I. La función $f' : I \to \mathbb{R}$ así definida se llama la función derivada de f.

Ejemplos

1. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función constante en un intervalo I, entonces f es derivable en I con derivada nula
2. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = x$ entonces f es derivable en I con derivada $f'(x) = 1$ para todo $x \in I$
3. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, es derivable en todo punto $c \neq 0$ y no es derivable en $c = 0$.

Funciones derivables

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I se dice derivable en I si f es derivable en cada punto de I. La función $f' : I \to \mathbb{R}$ así definida se llama la función derivada de f.

Ejemplos

1. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función constante en un intervalo I, entonces f es derivable en I con derivada nula
2. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = x$ entonces f es derivable en I con derivada $f'(x) = 1$ para todo $x \in I$
3. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, es derivable en todo punto $c \neq 0$ y no es derivable en $c = 0$.
4. La función f definida en $\mathbb{R}$ mediante $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es la función $f'(x) = nx^{n-1}$.

Funciones derivables

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I se dice derivable en I si f es derivable en cada punto de I. La función $f' : I \to \mathbb{R}$ así definida se llama la función derivada de f.

Ejemplos

1. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función constante en un intervalo I, entonces f es derivable en I con derivada nula
2. $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = x$ entonces f es derivable en I con derivada $f'(x) = 1$ para todo $x \in I$
3. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, es derivable en todo punto $c \neq 0$ y no es derivable en $c = 0$.
4. La función f definida en $\mathbb{R}$ mediante $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es la función $f'(x) = nx^{n-1}$.
5. La función seno, $g(x) = \sin x$, es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada $g'(x) = \cos x$ y la función coseno, $h(x) = \cos x$, también es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada $h'(x) = -\sin x$.

Funciones derivables

Ejemplos

6. La función exponencial, $f(x) = e^x$, es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es la función $f'(x) = e^x$.

Funciones derivables

Ejemplos

6. La función exponencial, $f(x) = e^x$, es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es la función $f'(x) = e^x$.
7. La función logaritmo, $f(x) = \log x$ es derivable en $(0, \infty)$ y $f'(x) = 1/x$.

Funciones derivables

Ejemplos

6. La función exponencial, $f(x) = e^x$, es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es la función $f'(x) = e^x$.
7. La función logaritmo, $f(x) = \log x$ es derivable en $(0, \infty)$ y $f'(x) = 1/x$.
8. $f(x) = x \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ no es derivable en $x = 0$. En cambio sí es derivable en todo $\mathbb{R}$ la función g dada por $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$.

Derivadas laterales

Definición

Para funciones definidas en un intervalo en que los límites

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} := f'(c^+) \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} := f'(c^-)$$

existan, llamamos derivada por la izquierda $f'(c^-)$ de f en c y de derivada por la derecha $f'(c^+)$ de f en c.

Derivadas laterales

Definición

Para funciones definidas en un intervalo en que los límites

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} := f'(c^+) \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} := f'(c^-)$$

existan, llamamos derivada por la izquierda $f'(c^-)$ de f en c y de derivada por la derecha $f'(c^+)$ de f en c.

Ejemplo

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=|x|$. En $x=0$ la función no es derivable, pero tiene derivada por la izquierda y por la derecha.

Aproximación local: diferenciabilidad

Observación

El hecho de que exista la derivada de f en c y valga m puede formularse diciendo que

$$f(c+h) = f(c) + mh + h\alpha(h) \tag{1}$$

donde $\alpha(h)$ es una función definida en un entorno reducido del origen con la propiedad de que $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$.

Aproximación local: diferenciabilidad

Observación

El hecho de que exista la derivada de f en c y valga m puede formularse diciendo que

$$f(c+h) = f(c) + mh + h\alpha(h) \tag{1}$$

donde $\alpha(h)$ es una función definida en un entorno reducido del origen con la propiedad de que $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$.

Definición

Llamaremos entorno reducido de $a \in \mathbb{K}$ a cualquier conjunto de la forma $V \setminus \{a\}$ siendo V un entorno de a.

Aproximación local: diferenciabilidad

Observación

El hecho de que exista la derivada de f en c y valga m puede formularse diciendo que

$$f(c+h) = f(c) + mh + h\alpha(h) \tag{1}$$

donde $\alpha(h)$ es una función definida en un entorno reducido del origen con la propiedad de que $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$.

Definición

Llamaremos entorno reducido de $a \in \mathbb{K}$ a cualquier conjunto de la forma $V \setminus \{a\}$ siendo V un entorno de a.

La ecuación anterior también se escribe a veces en la forma

$$f(c+h) = f(c) + mh + o(h) \tag{2}$$

donde $o(h)$ representa una función definida en un entorno reducido de 0 con la propiedad de que $\lim_{h\to 0} \dfrac{o(h)}{h} = 0$. La función $o(h)$ se llama una *«o pequeña de h»*.

Aproximación local: diferenciabilidad

Definición

Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice diferenciable en el punto $c \in I$ si existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, llamada diferencial de f en c y denotada con $df(c)$, tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c) - L(h)}{h} = 0$$

Aproximación local: diferenciabilidad

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice diferenciable en el punto $c \in I$ si existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamada diferencial de f en c y denotada con $df(c)$, tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c) - L(h)}{h} = 0$$

Definición

f es una función derivable en el punto c si y sólo si f es diferenciable en c y, en ese caso, $df(c)(x) = f'(c)x$.

Aproximación local: diferenciabilidad

Definición

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice diferenciable en el punto $c \in I$ si existe una aplicación lineal $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamada diferencial de f en c y denotada con $df(c)$, tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c) - L(h)}{h} = 0$$

Definición

f es una función derivable en el punto c si y sólo si f es diferenciable en c y, en ese caso, $df(c)(x) = f'(c)x$.

Proposición

Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable en $c \in I$ entonces f es continua en c.

Propiedades de funciones derivables

Proposición

Si f, g son funciones del intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ derivables en un punto $c \in I$ entonces:

1. La suma $f+g$ es derivable en c con
$$(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c).$$
2. El producto fg es derivable en c con
$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$
3. Si $g(c) \neq 0$ en I entonces f/g es derivable en c y
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)}.$$

Propiedades de funciones derivables

Regla de la cadena

Sean I_1, I_2 intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ y sean las funciones $f_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f_1(I_1) \subset I_2$. Si f_1 es derivable en $c \in I_1$ y f_2 es derivable en $f_1(c)$ entonces $f_2 \circ f_1$ es derivable en c y

$$(f_2 \circ f_1)'(c) = f_2'(f_1(c))f_1'(c).$$