Análisis Matemático I: Cálculo diferencial

Presentaciones de Clase

Universidad de Murcia

Curso 2007-2008

Objetivos

- Definir, entender y aplicar el concepto de función derivable.
- Estudiar la relación entre derivabilidad, crecimiento, máximos y mínimos, optimización, etc.
- Estudiar la aproximación de funciones mediante polinomios: fórmula de Taylor.
- Estudiar la noción de convexidad: relación con la derivabilidad.

Crecimiento y extremos

Definición

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Sea $c \in I$, se dice que:

1. f es creciente (respectivamente, estrictamente creciente) en c, si existe un entorno reducido V de c tal que
$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \quad (\text{respectivamente } \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0)$$
para cada $x \in I \cap V$.
2. f es decreciente (respectivamente, estrictamente decreciente) en c, si existe un entorno reducido V de c tal que para cada $x \in I \cap V$
$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \quad (\text{respectivamente } \frac{f(x)-f(c)}{x-c} < 0).$$
3. f tiene un máximo local en $c \in I$ si existe un entorno V de c tal que para todo $x \in V \cap V$
$$f(x) \leq f(c).$$
4. f tiene un mínimo local en $c \in I$ si existe un entorno V de c tal que para todo $x \in \cap V$
$$f(x) \geq f(c).$$
5. f tiene un extremo relativo en c si f tiene en c un máximo o un mínimo relativo.

Funciones derivables: crecimiento

Proposición

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Son equivalentes:

1. f es creciente (decreciente) en I.
2. f es creciente (decreciente) en cada $x \in I$.

Funciones derivables: crecimiento

Proposición

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Son equivalentes:

1. f es creciente (decreciente) en I.
2. f es creciente (decreciente) en cada $x \in I$.

Proposición

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I y sea $c \in I$.

1. Si f es derivable en c y $f'(c) > 0$ entonces f es estrictamente creciente en c.
2. Si f es derivable en c y $f'(c) < 0$ entonces f es estrictamente decreciente en c.
3. Si c es un punto interior del intervalo I, f es derivable en c y c es un extremo relativo, entonces $f'(c) = 0$.

Funciones derivables: crecimento

Observaciones

1. La anulación de la derivada en un punto no implica que la función tenga un extremo en dicho punto. Un ejemplo de ello es la función $f(x) = x^3$, que es estrictamente creciente en $x = 0$ pero para la que $f'(0) = 0$.

Funciones derivables: crecimento

Observaciones

1. La anulación de la derivada en un punto no implica que la función tenga un extremo en dicho punto. Un ejemplo de ello es la función $f(x) = x^3$, que es estrictamente creciente en $x = 0$ pero para la que $f'(0) = 0$.
2. La función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$, tiene un máximo relativo en $x = 1$ y sin embargo $f'(1) = 1 \neq 0$.

Funciones derivables: crecimento

Observaciones

1. La anulación de la derivada en un punto no implica que la función tenga un extremo en dicho punto. Un ejemplo de ello es la función $f(x) = x^3$, que es estrictamente creciente en $x = 0$ pero para la que $f'(0) = 0$.
2. La función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$, tiene un máximo relativo en $x = 1$ y sin embargo $f'(1) = 1 \neq 0$.
3. No debe confundirse el que una función sea creciente en un punto con que lo sea en un entorno del punto. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 2x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ verifica que $f'(0) = 1$ y por tanto es estrictamente creciente en $x = 0$; sin embargo su derivada $f'(x) = 1 + 4x \operatorname{sen}(1/x) - 2\cos(1/x^2)$, para $x \neq 0$, toma valores positivos y negativos en cada entorno reducido de 0.

Teorema de Rolle y del valor medio

Teorema de Rolle

Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema de Rolle y del valor medio

Teorema de Rolle

Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema de Cauchy

Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas. Si f, g son derivables en (a, b) entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

Teorema de Rolle y del valor medio

Corolario: Teorema del valor medio de Lagrange

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si f es derivable en (a, b), entonces existe $\theta \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(\theta)(b - a)$.

Teorema de Rolle y del valor medio

Corolario: Teorema del valor medio de Lagrange

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si f es derivable en (a,b), entonces existe $\theta \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(\theta)(b-a)$.

T. de Rolle $\Rightarrow$ T. de Cauchy $\Rightarrow$ T. de Lagrange $\Rightarrow$ T. de Rolle

Teorema de Rolle y del valor medio

Corolario: Teorema del valor medio de Lagrange

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si f es derivable en (a,b), entonces existe $\theta \in (a,b)$ tal que $f(b)-f(a) = f'(\theta)(b-a)$.

T. de Rolle $\Rightarrow$ T. de Cauchy $\Rightarrow$ T. de Lagrange $\Rightarrow$ T. de Rolle

Corolario

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)

1. Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es constante en $[a,b]$.
2. $f'(x) \geq 0$ en (a,b) si y sólo si f es creciente en $[a,b]$.
3. $f'(x) \leq 0$ en (a,b) si y sólo si f es decreciente en $[a,b]$.
4. Si $f'(x) > 0$, en (a,b), entonces f es estrictamente creciente en $[a,b]$.
5. Si $f'(x) < 0$, en (a,b), entonces f es estrictamente decreciente en $[a,b]$.

Teorema de Rolle y del valor medio

Corolario: Teorema del valor medio de Lagrange

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si f es derivable en (a,b), entonces existe $\theta \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(\theta)(b-a)$.

T. de Rolle $\Rightarrow$ T. de Cauchy $\Rightarrow$ T. de Lagrange $\Rightarrow$ T. de Rolle

Corolario

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)

1. Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es constante en $[a,b]$.
2. $f'(x) \geq 0$ en (a,b) si y sólo si f es creciente en $[a,b]$.
3. $f'(x) \leq 0$ en (a,b) si y sólo si f es decreciente en $[a,b]$.
4. Si $f'(x) > 0$, en (a,b), entonces f es estrictamente creciente en $[a,b]$.
5. Si $f'(x) < 0$, en (a,b), entonces f es estrictamente decreciente en $[a,b]$.

Puede ser f estrictamente creciente y sin embargo tener que $f'(x) = 0$ para algún x: tomar por ejemplo $f(x) = x^3$.

Derivadas extremos relativos

Corolario

Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivable y sea $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

1. Si existe $\delta>0$ tal que $f'(x)\leq 0$ si $x\in(c-\delta,c)\subset(a,b)$ y $f'(x)\geq 0$ si $x\in(c,c+\delta)\subset(a,b)$, entonces f posee un mínimo relativo en c.
2. Si existe $\delta>0$ tal que $f'(x)\geq 0$ si $x\in(c-\delta,c)\subset(a,b)$ y $f'(x)\leq 0$ si $x\in(c,c+\delta)\subset(a,b)$, entonces f posee un máximo relativo en c.

Derivadas extremos relativos

Corolario

Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y sea $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

1. Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) \leq 0$ si $x \in (c-\delta, c) \subset (a,b)$ y $f'(x) \geq 0$ si $x \in (c, c+\delta) \subset (a,b)$, entonces f posee un mínimo relativo en c.
2. Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) \geq 0$ si $x \in (c-\delta, c) \subset (a,b)$ y $f'(x) \leq 0$ si $x \in (c, c+\delta) \subset (a,b)$, entonces f posee un máximo relativo en c.

Ejemplo

La desigualdad de Bernoulli

$$(1+x)^n > 1+nx; \quad \text{si } x > -1, x \neq 0 \text{ y } n \in \mathbb{N} \text{ con } n > 1$$

puede ser demostrada por inducción sobre n cuando n es un número natural (ejercicio 1.**??**). Pero es cierta incluso cuando $n > 1$ es un número real.

Derivadas extremos relativos

Corolario

Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivable y sea $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

1. Si existe $\delta>0$ tal que $f'(x)\leq 0$ si $x\in(c-\delta,c)\subset(a,b)$ y $f'(x)\geq 0$ si $x\in(c,c+\delta)\subset(a,b)$, entonces f posee un mínimo relativo en c.
2. Si existe $\delta>0$ tal que $f'(x)\geq 0$ si $x\in(c-\delta,c)\subset(a,b)$ y $f'(x)\leq 0$ si $x\in(c,c+\delta)\subset(a,b)$, entonces f posee un máximo relativo en c.

Ejemplo

La desigualdad de Bernoulli

$$(1+x)^n>1+nx;\qquad \text{si } x>-1, x\neq 0 \text{ y } n\in\mathbb{N} \text{ con } n>1$$

puede ser demostrada por inducción sobre n cuando n es un número natural (ejercicio 1.**??**). Pero es cierta incluso cuando $n>1$ es un número real.

Proposición: Propiedad de los valores intermedios en derivadas

Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ derivable y sean $x,y\in(a,b)$ tales que $f'(x)<\eta<f'(y)$. Entonces existe $z\in(a,b)$ tal que $f(z)=\eta$

Teorema de la función inversa

Teorema de la función inversa

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I y derivable en el interior de I con derivada no nula. Entonces f es una biyección de I sobre un intervalo J de $\mathbb{R}$ y $f^{-1} : J \longrightarrow I$ es continua en J y derivable en el interior de J con

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Teorema de la función inversa

Teorema de la función inversa

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I y derivable en el interior de I con derivada no nula. Entonces f es una biyección de I sobre un intervalo J de $\mathbb{R}$ y $f^{-1} : J \longrightarrow I$ es continua en J y derivable en el interior de J con

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Ejemplos

1. $f = \log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable con derivada $f'(x) = \frac{1}{x}$.
2. $f = \operatorname{arcsen} : (-1, 1) \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ es derivable con derivada $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. $f : \arccos : (-1, 1) \longrightarrow (0, \pi)$ es derivable con derivada $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. $f = \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ es derivable con derivada $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Regla de L'Hospital

Proposición (Regla de L'Hospital)

Sean f, g funciones derivables en $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Supongamos que g y g' no tienen ceros en I y que se cumple una de las condiciones siguientes:

1. $\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$.
2. $\lim_{x \to b^-} g(x) = \pm\infty$.

Entonces, si existe

$$L := \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \widetilde{\mathbb{R}} \text{ también existe } \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Observación

El recíproco de la proposición anterior no es cierto.
En efecto:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1.$$

Pero, sin embargo, no existe el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x + \operatorname{sen} x)'}{(x - \operatorname{sen} x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}.$$