Análisis Matemático I: Fórmula de Taylor

Presentaciones de Clase

Universidad de Murcia

Curso 2006-2007

Desarrollos limitados

Proposición

El desarrollo limitado de una función n veces derivable en un punto es único.

Desarrollos limitados

Proposición

El desarrollo limitado de una función n veces derivable en un punto es único.

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)\\
\sin x &= x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})\\
\cos x &= 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)\\
\log(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+o(x^n)\\
(1+x)^\alpha &= 1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n)
\end{aligned}
$$

Operaciones con desarrollos limitados

Proposición

Sean f y g funciones n veces derivables en x_0 e y_0, respectivamente.

1. Si $y_0 = x_0$ entonces el desarrollo limitado de orden n de $f + g$ en x_0 se obtiene sumando los desarrollos limitados de orden n de f y g.
2. Si $y_0 = x_0$ entonces el desarrollo limitado de orden n de $f \cdot g$ en x_0 se obtiene multiplicando los desarrollos limitados de orden n de f y g, y agrupando los términos convenientemente, tanto en la parte polinómica de grado no superior a n como en la parte del resto de Landau.
3. Si $y_0 = x_0$ y $g(x_0) \neq 0$ entonces el desarrollo limitado de orden n de f/g en x_0 se obtiene dividiendo los desarrollos limitados de f y g, y agrupando los términos convenientemente tanto en la parte polinómica de grado no superior a n como en la parte del resto de Landau.

Operaciones con desarrollos limitados: continuación

Proposición:continuación

Sean f y g funciones n veces derivables en x_0 e y_0, respectivamente.

4. El desarrollo limitado de orden $n-1$ de f' se obtiene derivando formalmente el desarrollo limitado de orden n de f y bajando el orden del resto de landau en una unidad.
5. Si $f(x_0) = y_0$ y la función $g \circ f$ está definida en un entorno de x_0 y admite un desarrollo limitado en x_0 entonces tal desarrollo se obtiene sustituyendo formalmente el desarrollo de f en el de g y agrupando los términos convenientemente tanto en la parte polinómica de grado no superior a n como en la parte del resto de Landau.

Ejemplos de desarrollos limitados

Ejemplo

Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x}$$

Ejemplos de desarrollos limitados

Ejemplo

Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x}$$

Ejemplo

Calcular

$$\lim_{x\to 0^+} \cot^2 x \left(1 + \frac{1}{2}x - x^2 - \frac{x}{\log(1+x)}\right)$$

Corolario

Sean $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Supongamos que f es $n-1$ veces derivable en (a, b) siendo $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y que existe $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

1. Si n es par, entonces f presenta en x_0 un máximo relativo en el caso de que $f^{(n)}(x_0) < 0$ o un mínimo relativo en el caso de que $f^{(n)}(x_0) > 0$.
2. Si n es impar, entonces f no tiene extremo relativo en x_0.

Ejemplos para cálculo de extremos

Ejemplo

Determinar los extremos de la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dada por } f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x.$$

Ejemplos para cálculo de extremos

Ejemplo

Determinar los extremos de la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dada por } f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x.$$

Ejemplo

Determinar los extremos de la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \text{ y } g(0) = 0.$$

Fórmula de Taylor con resto

Teorema: Fórmula de Taylor

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ n veces derivable en (a,b) y sean $x_0, x\in(a,b)$. Sea

$$R_{n-1}(x;x_0) := f(x) - P_{n-1}(x;x_0)$$
$$= f(x) - \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-)1}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \right].$$

span

Entonces para cada $k\in\mathbb{N}, 1\le k\le n$, existe c estrictamente contenido entre x y x_0 de modo que

$$R_{n-1}(x,x_0) = \frac{(x-x_0)^k (x-c)^{n-k}}{(n-1)!k} f^{(n)}(c).$$

Esta forma de expresar el resto se llama la forma de Schömilch

Fórmula de Taylor con resto... continuación

Corolario: Fórmula de Taylor...resto de Cauchy y Lagrange

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ n veces derivable en (a,b) y sean $x_0, x \in (a,b)$. Sea

$$R_{n-1}(x;x_0) := f(x) - P_{n-1}(x;x_0)$$

$$= f(x) - \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-)1}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \right].$$

span

Entonces tomando $k=n$ y $k=1$ en la fórmula del resto de Schömilch se obtienen, respectivamente, los siguientes:

1. Resto de Lagrange: existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n.$$

2. Resto de Cauchy: existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-x_0)(x-c)^{n-1}.$$

Ejemplos y aplicaciones de la fórmula de Taylor

Definición

Cuando $x_0 = 0$ la fórmula de Taylor recibe el nombre de *fórmula de Mac-Laurin*. La expresión

$$P_{n-1}(f, x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

se llama el *polinomio de Taylor de grado $n-1$ de f en x_0*.

Ejemplos y aplicaciones de la fórmula de Taylor

Definición

Cuando $x_0 = 0$ la fórmula de Taylor recibe el nombre de *fórmula de Mac-Laurin*. La expresión

$$P_{n-1}(f, x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

se llama el *polinomio de Taylor de grado $n-1$ de f en x_0*.

Observación

1. Una cuestión natural para funciones de clase $\mathscr{C}^{(\infty)}$ (por ejemplo en todo $\mathbb{R}$) es estudiar si f coincidirá con su polinomio de Taylor «infinito».

Ejemplos y aplicaciones de la fórmula de Taylor

Definición

Cuando $x_0 = 0$ la fórmula de Taylor recibe el nombre de *fórmula de Mac-Laurin*. La expresión

$$P_{n-1}(f,x;x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

se llama el *polinomio de Taylor de grado $n-1$ de f en x_0*.

Observación

1. Una cuestión natural para funciones de clase $\mathscr{C}^{(\infty)}$ (por ejemplo en todo $\mathbb{R}$) es estudiar si f coincidirá con su polinomio de Taylor «infinito».
2. La función $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$ muestra que la respuesta a la pregunta anterior es NO.

Ejemplos y aplicaciones de la fórmula de Taylor

Definición

Cuando $x_0 = 0$ la fórmula de Taylor recibe el nombre de *fórmula de Mac-Laurin*. La expresión

$$P_{n-1}(f,x;x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

se llama el *polinomio de Taylor de grado $n-1$ de f en x_0*.

Observación

1. Una cuestión natural para funciones de clase $\mathscr{C}^{(\infty)}$ (por ejemplo en todo $\mathbb{R}$) es estudiar si f coincidirá con su polinomio de Taylor «infinito».
2. La función $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$ muestra que la respuesta a la pregunta anterior es NO.
3. Sin embargo los desarrollos de Taylor se pueden utilizar siempre para obtener aproximaciones.

Algunos desarrollos de McLaurin

1. $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$

Algunos desarrollos de McLaurin

1. $$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$
2. $$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{\sin(\theta x + n\pi/2)}{n!}x^n$$

Algunos desarrollos de McLaurin

1. $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$
2. $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{\sin(\theta x + n\pi/2)}{n!}x^n$
3. $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{\cos(\theta x + n\pi/2)}{n!}x^n$

Algunos desarrollos de McLaurin

1. $$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$
2. $$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{\sin(\theta x + n\pi/2)}{n!}x^n$$
3. $$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{\cos(\theta x + n\pi/2)}{n!}x^n$$
4. $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n(1+\theta x)^{-(n+1)}x^n$$

Algunos desarrollos de McLaurin

1. $$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$
2. $$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{\sin(\theta x + n\pi/2)}{n!}x^n$$
3. $$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{\cos(\theta x + n\pi/2)}{n!}x^n$$
4. $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n(1+\theta x)^{-(n+1)}x^n$$
5. $$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n(1+\theta x)^n}x^n$$

Algunos desarrollos de McLaurin

1. $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$
2. $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{\sin(\theta x + n\pi/2)}{n!}x^n$
3. $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{\cos(\theta x + n\pi/2)}{n!}x^n$
4. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n(1+\theta x)^{-(n+1)}x^n$
5. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n(1+\theta x)^n}x^n$
6. $(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}\frac{(1+\theta x)^\alpha}{(1+\theta x)^n}x^n.$

Ejemplos para cálculo de extremos

Ejemplo

Utilizando el desarrollo de McLaurin de e^x obtener una aproximación al número e con un error menor de $1/1000$.

Ejemplos para cálculo de extremos

Ejemplo

Utilizando el desarrollo de McLaurin de e^x obtener una aproximación al número e con un error menor de $1/1000$.

Ejemplo

Utilizando el desarrollo de McLaurin de $\sin x$ obtener una aproximación al número $\sin 31^0$ con un error inferior a $1/10000$.

Funciones convexas

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I.

1. f se dice convexa en I si para todo $x, x' \in I$ y $0 \leq t \leq 1$ se verifica
$$f((1-t)x + tx') \leq (1-t)f(x) + tf(x').$$
2. f se dice cóncava en I si para todo $x, x' \in I$ y $0 \leq t \leq 1$ se verifica
$$f((1-t)x + tx') \geq (1-t)f(x) + tf(x').$$

Funciones convexas

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I.

1. f se dice convexa en I si para todo $x, x' \in I$ y $0 \leq t \leq 1$ se verifica
$$f((1-t)x + tx') \leq (1-t)f(x) + tf(x').$$
2. f se dice cóncava en I si para todo $x, x' \in I$ y $0 \leq t \leq 1$ se verifica
$$f((1-t)x + tx') \geq (1-t)f(x) + tf(x').$$

Observación

De la definición de convexidad se sigue que f es convexa si para cada para de puntos x, x' en su dominio la secante que pasa por $(x, f(x))$ y $(x', f(x'))$ está por encima de la gráfica de la función.

Funciones convexas

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I.

1. f se dice convexa en I si para todo $x, x' \in I$ y $0 \leq t \leq 1$ se verifica
$$f((1-t)x + tx') \leq (1-t)f(x) + tf(x').$$
2. f se dice cóncava en I si para todo $x, x' \in I$ y $0 \leq t \leq 1$ se verifica
$$f((1-t)x + tx') \geq (1-t)f(x) + tf(x').$$

Observación

De la definición de convexidad se sigue que f es convexa si para cada para de puntos x, x' en su dominio la secante que pasa por $(x, f(x))$ y $(x', f(x')))$ está por encima de la gráfica de la función.

Ejemplos de funciones convexas

1. $f(x) = ax + b$ para todo a, b.
2. $f(x) = x^2$.
3. $f(x) = |x|$.

Funciones convexas

Notación

Para la pendiente de la recta secante pasando por los puntos $(x, f(x))$ y $(x', f(x'))$

$$p_x(x') = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}.$$

Funciones convexas

Notación

Para la pendiente de la recta secante pasando por los puntos $(x, f(x))$ y $(x', f(x'))$

$$p_x(x') = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}.$$

Proposición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es convexa en I.
2. Cualesquiera que sean $a < x < b$ en I se verifica que $p_a(x) \leq p_b(x)$.

Funciones convexas

Observación

1. p_a es creciente

Funciones convexas

Observación

1. p_a es creciente
2. *(Lema de las tres pendientes)* $p_a(x) \leq p_a(b) \leq p_b(x)$.

Funciones convexas

Observación

1. p_a es creciente
2. *(Lema de las tres pendientes)* $p_a(x) \leq p_a(b) \leq p_b(x)$.

Proposición

Una función convexa definida en un intervalo es continua en los puntos del interior.

Funciones convexas

Observación

1. p_a es creciente
2. *(Lema de las tres pendientes)* $p_a(x) \leq p_a(b) \leq p_b(x)$.

Proposición

Una función convexa definida en un intervalo es continua en los puntos del interior.

Proposición

Aunque las funciones convexas definidas en un intervalo sean continuas en los puntos del interior pueden no ser continuas en los extremos del mismo. Por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \in (0,1) \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Funciones convexas y derivabilidad

Proposición

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en el intervalo abierto I. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es convexa.
2. f' es una función creciente en I.
3. Para cada punto de I la gráfica de la función f está situada por encima de la recta tangente correspondiente a dicho punto.

Además, si f es dos veces derivable en I, se verifica que f es convexa si y sólo si $f'' \geq 0$ en I.

Convexidad local

Proposición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en el intervalo I derivable en $x_0 \in I$.

1. Diremos que f es convexa en x_0 si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x_0, \delta) \cap I$ entonces se verifica que $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
2. Diremos que f es cóncava en x_0 si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x_0, \delta) \cap I$ entonces se verifica que $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
3. Diremos que x_0 es un punto de inflexión si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x_0, \delta) \cap I$ entonces se verifica que, o bien
$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ para } x < x_0 \text{ y}$$
$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ para } x > x_0.$$
o bien
$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ para } x < x_0 \text{ y}$$
$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ para } x > x_0.$$

Convexidad local y derivabilidad

Observación

No siempre se presenta una de las tres situaciones: la función $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ en $x_0 = 0$ es un buen ejemplo de ello.

Convexidad local y derivabilidad

Observación

No siempre se presenta una de las tres situaciones: la función $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ en $x_0 = 0$ es un buen ejemplo de ello.

Proposición

1. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ donde I es un intervalo abierto. Sea $x_0 \in I$ y supongamos que f es derivable en un entorno de x_0 y que existe $f''(x_0)$.
   1. Si $f''(x_0) > 0$ entonces f es convexa en x_0.
   2. Si $f''(x_0) < 0$ entonces f es cóncava en x_0.
   3. Si x_0 es un punto de inflexión entonces $f''(x_0) = 0$.
2. Si f es $n-1$ veces derivable en un entorno de x_0 y existe $f^{(n)}(x_0)$ siendo además $f^{(2)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, pero $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ entonces:
   1. Si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0$ se verifica que f es convexa en un entorno de x_0.
   2. Si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0$ se verifica que f es cóncava en un entorno de x_0.
   3. Si n es impar, se verifica que x_0 es un punto de inflexión para f.

Convexidad local vs. convexidad global

Proposición

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en el intervalo abierto I. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es (globalmente) convexa en I.
2. f es (localmente) convexa para cada $x \in I$.