Análisis Matemático I: Fórmula de Taylor

Presentaciones de Clase

Universidad de Murcia

Curso 2006-2007

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de integral de Riemann.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de integral de Riemann.
2. Estudiar las propiedades de la integral.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de integral de Riemann.
2. Estudiar las propiedades de la integral.
3. Demostrar la caracterización de Lebesgue de la integrabilidad de Riemann.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de integral de Riemann.
2. Estudiar las propiedades de la integral.
3. Demostrar la caracterización de Lebesgue de la integrabilidad de Riemann.
4. Estudiar el Teorema Fundamental del Cálculo y sus aplicaciones.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de integral de Riemann.
2. Estudiar las propiedades de la integral.
3. Demostrar la caracterización de Lebesgue de la integrabilidad de Riemann.
4. Estudiar el Teorema Fundamental del Cálculo y sus aplicaciones.
5. Estudiar las distintas aplicaciones de la integral al cálculo de áreas, volúmenes de revolución y longitudes de curvas.

Sumas superiores e inferiores

Definición

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada.

1. Llamaremos partición de $[a, b]$ a cualquier conjunto finito $\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ tal que

$$t_0 = a < t_1 < t_2 \cdots < t_n = b.$$

   El conjunto de todas las particiones de $[a, b]$ lo designaremos con $\Pi[a, b]$. Denotaremos con $M_i = \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f(t)$ y con $m_i = \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f(t)$ siendo $t_0 = a < t_1 < t_2 \cdots < t_n = b$ un elemento de $\Pi[a, b]$.

Sumas superiores e inferiores

Definición

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada.

1. Llamaremos partición de $[a,b]$ a cualquier conjunto finito $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ tal que
$$t_0 = a < t_1 < t_2 \cdots < t_n = b.$$
El conjunto de todas las particiones de $[a,b]$ lo designaremos con $\Pi[a,b]$. Denotaremos con $M_i = \sup_{[t_{i-1},t_i]} f(t)$ y con $m_i = \inf_{[t_{i-1},t_i]} f(t)$ siendo $t_0 = a < t_1 < t_2 \cdots < t_n = b$ un elemento de $\Pi[a,b]$.
2. Si $\pi \in \Pi[a,b]$ llamamos suma superior y suma inferior de f correspondiente a π a los números reales definidos por las siguientes fórmulas
$$S(f,\pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$
$$s(f,\pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

Sumas superiores e inforiores

Definición

1. Si π, π' son particiones de $[a, b]$ diremos que π' es más fina que π, y escribiremos $\pi \prec \pi'$, si todos los elementos de π están en π'. En otras palabras, si π es un subconjunto de π'. s palabras, se trata del conjunto intersección

Sumas superiores e inforiores

Definición

1. Si π, π' son particiones de $[a, b]$ diremos que π' es más fina que π, y escribiremos $\pi \prec \pi'$, si todos los elementos de π están en π'. En otras palabras, si π es un subconjunto de π'. s palabras, se trata del conjunto intersección
2. Denotaremos con $\pi \vee \pi'$ a la partición cuyos elementos son los puntos pertenecientes a alguna de las particiones π o π'

Sumas superiores e inforiores

Definición

1. Si π, π' son particiones de $[a,b]$ diremos que π' es más fina que π, y escribiremos $\pi \prec \pi'$, si todos los elementos de π están en π'. En otras palabras, si π es un subconjunto de π'. s palabras, se trata del conjunto intersección
2. Denotaremos con $\pi \vee \pi'$ a la partición cuyos elementos son los puntos pertenecientes a alguna de las particiones π o π'

Proposición

Sean π, π' particiones de $[a,b]$. Entonces:

1. $\pi \prec \pi'$ implica $s(f,\pi) \leq s(f,\pi')$.

Sumas superiores e inforiores

Definición

1. Si π, π' son particiones de $[a, b]$ diremos que π' es más fina que π, y escribiremos $\pi \prec \pi'$, si todos los elementos de π están en π'. En otras palabras, si π es un subconjunto de π'. s palabras, se trata del conjunto intersección
2. Denotaremos con $\pi \vee \pi'$ a la partición cuyos elementos son los puntos pertenecientes a alguna de las particiones π o π'

Proposición

Sean π, π' particiones de $[a, b]$. Entonces:

1. $\pi \prec \pi'$ implica $s(f, \pi) \leq s(f, \pi')$.
2. $\pi \prec \pi'$ implica $S(f, \pi) \geq S(f, \pi')$.

Sumas superiores e inforiores

Definición

1. Si π, π' son particiones de $[a, b]$ diremos que π' es más fina que π, y escribiremos $\pi \prec \pi'$, si todos los elementos de π están en π'. En otras palabras, si π es un subconjunto de π'. s palabras, se trata del conjunto intersección
2. Denotaremos con $\pi \vee \pi'$ a la partición cuyos elementos son los puntos pertenecientes a alguna de las particiones π o π'

Proposición

Sean π, π' particiones de $[a, b]$. Entonces:

1. $\pi \prec \pi'$ implica $s(f, \pi) \leq s(f, \pi')$.
2. $\pi \prec \pi'$ implica $S(f, \pi) \geq S(f, \pi')$.

Corolario

Si π, π' son particiones de $[a, b]$ entonces $s(f, \pi) \leq S(f, \pi')$.

Integral Superior e Inferior

Definición

1. Se llama integral inferior (de Darboux) de f al número real

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f,\pi); \pi \in \Pi[a,b]\}.$$

Integral Superior e Inferior

Definición

1. Se llama integral inferior (de Darboux) de f al número real

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f,\pi); \pi \in \Pi[a,b]\}.$$

2. Se llama integral superior (de Darboux) de f al número real

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f,\pi); \pi \in \Pi[a,b]\}.$$

Integral Superior e Inferior

Definición

1. Se llama integral inferior (de Darboux) de f al número real

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f,\pi); \pi \in \Pi[a,b]\}.$$

2. Se llama integral superior (de Darboux) de f al número real

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f,\pi); \pi \in \Pi[a,b]\}.$$

3. Se dice que f es integrable Riemann en $[a,b]$ y se escribe $f \in \mathscr{R}[a,b]$ si las integrales inferior y superior de f coinciden. A ese valor común se llama integral Riemann de f y se denota por

$$\int_a^b f.$$

Caracterización integrabilidad

Teorema

La función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann si y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\pi \in \Pi[a, b]$ tal que $S(f, \pi) - s(f, \pi) < \varepsilon$.

Caracterización integrabilidad

Teorema

La función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann si y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\pi \in \Pi[a,b]$ tal que $S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$.

Ejemplo

La función de Dirichlet D_1, definida como la función característica de los irracionales del intervalo $[0,1]$, es decir, $D_1(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $D_1(x) = 1$ si $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$ no es integrable Riemann en $[0,1]$.

Caracterización integrabilidad

Teorema

La función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann si y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\pi \in \Pi[a,b]$ tal que $S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon$.

Ejemplo

La función de Dirichlet D_1, definida como la función característica de los irracionales del intervalo $[0,1]$, es decir, $D_1(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $D_1(x) = 1$ si $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$ no es integrable Riemann en $[0,1]$.

Corolario

1. Si f es continua entonces $f \in \mathscr{R}[a,b]$.
2. Si f es monótona entonces $f \in \mathscr{R}[a,b]$.

Integrabilidad via sumas de Riemann: refinamiento

Definición

Sean $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ y $\pi=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b\}$ una partición de $[a,b]$. Sea $\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}$ una colección arbitraria de puntos tales que $z_i\in[t_{i-1},t_i]$, para cada $i=1,2,\ldots,n$. Se llama suma de Riemann asociada a la partición π y a los puntos $\{z_i\}_i$ a $S(f,\pi,z_i):=\sum_{i=1}^n f(z_i)(t_i-t_{i-1})$.

Integrabilidad via sumas de Riemann: refinamiento

Definición

Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\pi = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ una partición de $[a,b]$. Sea $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ una colección arbitraria de puntos tales que $z_i \in [t_{i-1}, t_i]$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Se llama suma de Riemann asociada a la partición π y a los puntos $\{z_i\}_i$ a $S(f, \pi, z_i) := \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(t_i - t_{i-1})$.

Teorema

Para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada son equivalentes:

1. f es integrable Riemann en $[a,b]$.
2. Existe un número real A con la propiedad siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\pi_0 \in \Pi[a,b]$ tal que si $\pi_0 \prec \pi \in \Pi[a,b]$ se cumple

$$|A - S(f, \pi, z_i)| < \varepsilon,$$

para cualquier suma de Riemann correspondiente a π.

En este caso $A = \int_a^b f$.

Integrabilidad via sumas de Riemann: norma de particiones

Definición

Si $\pi = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ se llama norma de la partición a

$$\delta := \max\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}.$$

Integrabilidad via sumas de Riemann: norma de particiones

Definición

Si $\pi = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a,b]$ se llama norma de la partición a

$$\delta := \max\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}.$$

Teorema

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es integrable Riemann en $[a,b]$.
2. Existe un número real A con la propiedad siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada partición π de norma menor que δ se cumple

$$|A - S(f, \pi, z_i)| < \varepsilon,$$

para cualquier suma de Riemann correspondiente a π.

Además en ese caso $A = \int_a^b f$.

Integrabilidad via sumas de Riemann: norma de particiones

Lema

Sea π' una partición de $[a,b]$ obtenida a partir de la partición π añadiéndole k puntos y sea δ la norma de la partición π. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada con $m\leq f(x)\leq M$ para todo $x\in[a,b]$. Entonces

$$|S(f,\pi,z_i)-S(f,\pi',z_j')|<\delta(M-m)k$$

supuesto que los puntos z_i y z_j' coinciden en aquellos intervalos de π que no han sido subdivididos por la partición π'.

Integrabilidad via sumas de Riemann: norma de particiones

Lema

Sea π' una partición de $[a,b]$ obtenida a partir de la partición π añadiéndole k puntos y sea δ la norma de la partición π. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada con $m\leq f(x)\leq M$ para todo $x\in[a,b]$. Entonces

$$|S(f,\pi,z_i)-S(f,\pi',z_j')|<\delta(M-m)k$$

supuesto que los puntos $z_i=z_j'$ en aquellos intervalos de π que no han sido subdivididos por la partición π'.

Integrabilidad via sumas de Riemann: norma de particiones

Lema

Sea π' una partición de $[a,b]$ obtenida a partir de la partición π añadiéndole k puntos y sea δ la norma de la partición π. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada con $m\leq f(x)\leq M$ para todo $x\in[a,b]$. Entonces

$$|S(f,\pi,z_i)-S(f,\pi',z_j')|<\delta(M-m)k$$

supuesto que los puntos $z_i=z_j'$ en aquellos intervalos de π que no han sido subdivididos por la partición π'.

Teorema

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es integrable Riemann en $[a,b]$.
2. Existe un número real A con la propiedad siguiente: para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que para cada partición π de norma menor que δ se cumple

$$|A-S(f,\pi,z_i)|<\varepsilon,$$

para cualquier suma de Riemann correspondiente a π.

Además en ese caso $A=\int_a^b f$.

Propiedades de la integral

Proposición

$\mathscr{R}[a,b]$ es un espacio vectorial y el operador $\displaystyle\int_a^b$ es lineal.

Propiedades de la integral

Proposición

$\mathscr{R}[a,b]$ es un espacio vectorial y el operador $\displaystyle\int_a^b$ es lineal.

Proposición

Sean $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$.

1. Si $f(x) \le g(x)$, para todo $x \in [a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f \le \int_a^b g$.
2. Si $m \le f(x) \le M$, para todo $x \in [a,b]$, entonces $\displaystyle m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$.

Propiedades de la integral

Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se definen las funciones parte positiva de f y parte negativa de f mediante:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \; f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}.$$

Se tienen las siguientes igualdades:

$$f = f^+ - f^- \quad \text{y} \quad |f| = f^+ + f^-$$

Propiedades de la integral

Dada una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se definen las funciones parte positiva de f y parte negativa de f mediante:

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\}\ f^-(x)=-\min\{f(x),0\}.$$

Se tienen las siguientes igualdades:

$$f=f^+-f^- \quad \text{y} \quad |f|=f^++f^-$$

Proposición

Si $f\in\mathscr{R}[a,b]$ entonces f^+, f^-, $|f|\in\mathscr{R}[a,b]$ y se verifica

$$\left|\int_a^b f\right|\leq\int_a^b|f|$$

Propiedades de la integral

Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se definen las funciones parte positiva de f y parte negativa de f mediante:

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \; f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}.$$

Se tienen las siguientes igualdades:

$$f = f^+ - f^- \quad \text{y} \quad |f| = f^+ + f^-$$

Proposición

Si $f \in \mathscr{R}[a,b]$ entonces f^+, f^-, $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$ y se verifica

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Observación

Si $f \in \mathscr{R}[a,b]$ y $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$ entonces

$$\left| \int_a^b f \right| \leq M(b-a)$$

Aditividad respecto del intervalo de integración

Proposición

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y sea $c \in [a,b]$.

1. $f \in \mathscr{R}[a,b]$ implica $f \in \mathscr{R}[a,c]$ y $f \in \mathscr{R}[c,b]$ siendo además

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

2. $f \in \mathscr{R}[a,c]$ y $f \in \mathscr{R}[c,b]$ implica $f \in \mathscr{R}[a,b]$.

Aditividad respecto del intervalo de integración

Proposición

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y sea $c \in [a, b]$.

1. $f \in \mathscr{R}[a, b]$ implica $f \in \mathscr{R}[a, c]$ y $f \in \mathscr{R}[c, b]$ siendo además
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$
2. $f \in \mathscr{R}[a, c]$ y $f \in \mathscr{R}[c, b]$ implica $f \in \mathscr{R}[a, b]$.

Proposición

Si $f \in \mathscr{R}[a, b]$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ coincide con f salvo en un número finito de puntos, entonces $g \in \mathscr{R}[a, b]$ y
$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$