Análisis Matemático I: Series e integrales impropias

Presentaciones de Clase

Universidad de Murcia

Curso 2006-2007

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de serie.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de serie.
2. Definir y entender el concepto de integral impropia.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de serie.
2. Definir y entender el concepto de integral impropia.
3. Analizar los primeros ejemplos de series e integrales impropias.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de serie.
2. Definir y entender el concepto de integral impropia.
3. Analizar los primeros ejemplos de series e integrales impropias.
4. Estudiar la condición de Cauchy para convergencia de series e integrales.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de serie.
2. Definir y entender el concepto de integral impropia.
3. Analizar los primeros ejemplos de series e integrales impropias.
4. Estudiar la condición de Cauchy para convergencia de series e integrales.
5. Condición necesaria para la convergencia de una serie.

Objetivos

Objetivos

1. Definir y entender el concepto de serie.
2. Definir y entender el concepto de integral impropia.
3. Analizar los primeros ejemplos de series e integrales impropias.
4. Estudiar la condición de Cauchy para convergencia de series e integrales.
5. Condición necesaria para la convergencia de una serie.
6. Criterio de la integral para convergencia de series: estudio de las series armónicas.

Sumas parciales y suma total

Definición

Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Sumas parciales y suma total

Definición

Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1. a_n se le llama término general de la serie.

Sumas parciales y suma total

Definición

Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1. a_n se le llama término general de la serie.
2. S_n se llama suma parcial n-ésima.

Sumas parciales y suma total

Definición

Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1. a_n se le llama término general de la serie.
2. S_n se llama suma parcial n-ésima.
3. La serie numérica (o simplemente serie) se dice convergente si existe $\lim_n S_n =: S \in \mathbb{K}$.

Sumas parciales y suma total

Definición

Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1. a_n se le llama término general de la serie.
2. S_n se llama suma parcial n-ésima.
3. La serie numérica (o simplemente serie) se dice convergente si existe $\lim_n S_n =: S \in \mathbb{K}$.
4. S recibe el nombre de suma de la serie y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n. = S$.

Sumas parciales y suma total

Definición

Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1. a_n se le llama término general de la serie.
2. S_n se llama suma parcial n-ésima.
3. La serie numérica (o simplemente serie) se dice convergente si existe $\lim_n S_n =: S \in \mathbb{K}$.
4. S recibe el nombre de suma de la serie y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n. = S$.
5. Cuando $a_n \in \mathbb{R}$ y $\lim_n S_n = \pm\infty$ la serie se dice divergente a $\pm\infty$.

Convergencia de series

Condición necesaria de convergencia

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces existe $\lim_n a_n$ y vale 0.

Convergencia de series

Condición necesaria de convergencia

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces existe $\lim_n a_n$ y vale 0.

Condición de Cauchy para la convergencia de una serie

La serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es convergente si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se verifica

$$|a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q| < \varepsilon,$$

siempre que los naturales p, q cumplan $n_0 \leq p \leq q$.

Ejemplos de series

Ejemplo

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

con $|r| < 1$ es una serie convergente con suma

$$\frac{1}{1-r}.$$

Si $|r| \geq 1$ la serie es divergente.

Ejemplos de series

Ejemplo

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

con $|r| < 1$ es una serie convergente con suma

$$\frac{1}{1-r}.$$

Si $|r| \geq 1$ la serie es divergente.

Ejemplo

- La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
es convergente ya que la sucesión $(S_n)_n$ es monótona creciente y acotada.

Ejemplos de series

Ejemplo

La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

con $|r| < 1$ es una serie convergente con suma

$$\frac{1}{1-r}.$$

Si $|r| \geq 1$ la serie es divergente.

Ejemplo

- La serie

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

  es convergente ya que la sucesión $(S_n)_n$ es monótona creciente y acotada.
- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, ya que no satisface el criterio de Cauchy.

Operaciones con series

Proposición

La convergencia de una serie no se altera modificando un número finito de términos de la misma.

Operaciones con series

Proposición

La convergencia de una serie no se altera modificando un número finito de términos de la misma.

Proposición

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes con sumas A, B respectivamente. Entonces para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$$

es convergente y tiene suma $\lambda A + \mu B$.

Definición de integral impropia

Definición

Sea una función
$f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que su restricción a $[a, b]$ es integrable Riemann para cada $a < b < \infty$ (una tal función se llama localmente integrable).

1. Se dice que f es integrable en sentido impropio en $[a, \infty)$ (o que la integral impropia es convergente) si existe $\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\, dt \in \mathbb{R}$.

Definición de integral impropia

Definición

Sea una función
$f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que su restricción a $[a, b]$ es integrable Riemann para cada $a < b < \infty$ (una tal función se llama localmente integrable).

1. Se dice que f es integrable en sentido impropio en $[a, \infty)$ (o que la integral impropia es convergente) si existe $\lim_{x \to \infty} \int_a^x f(t)\, dt \in \mathbb{R}$.
2. Dicho límite recibe el nombre de integral impropia de f en $[a, \infty)$ y se denota con $\int_a^\infty f(t)\, dt$.

Convergencia de series

Condición de Cauchy para la convergencia de una integral impropia

La integral impropia

$$\int_a^b f(t)\,dt,$$

donde $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente integrable y $b \leq +\infty$, es convergente si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $c \in (a, b)$ tal que si $c \leq y < z < b$ entonces

$$\left| \int_y^z f(t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

Convergencia de series

Condición de Cauchy para la convergencia de una integral impropia

La integral impropia

$$\int_a^b f(t)\,dt,$$

donde $f:[a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente integrable y $b \leq +\infty$, es convergente si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $c \in (a,b)$ tal que si $c \leq y < z < b$ entonces

$$\left|\int_y^z f(t)\,dt\right| < \varepsilon.$$

Corolario

La integral impropia $\int_a^\infty f$ converge si, y sólo si, lo hace la integral impropia $\int_b^\infty f$ para algún $a < b \in \mathbb{R}$.

Ejemplos de integrales impropias

Ejemplo

La integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,dt$$

es convergente para $\alpha > 1$ y divergente para los otros valores de α ya que para cada $x > 1$ se tiene

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} = \int_1^x t^{-\alpha}\,dt = \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha}-1)$$

Y por tanto, para $\alpha > 1$ se tiene que

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha}-1) = \frac{1}{\alpha-1}$$

mientras que para $\alpha \leq 1$ es

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,dt = +\infty.$$

Operaciones con integrales impropias

Proposición

Sean $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $b \leq \infty$, tales que las integrales impropias $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$ son convergentes. Entonces para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la integral impropia

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)$$

es convergente, siendo

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Criterio de convergencia de la integral

Series de términos positivos. Integrales de funciones positivas

1. Si $\sum_n a_n$ tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión de las sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ es, monótona creciente. Por tanto para la convergencia de este tipo de series es suficiente verificar que la sucesión $(S_n)_n$ está acotada superiormente.

Criterio de convergencia de la integral

Series de términos positivos. Integrales de funciones positivas

1. Si $\sum_n a_n$ tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión de las sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ es, monótona creciente. Por tanto para la convergencia de este tipo de series es suficiente verificar que la sucesión $(S_n)_n$ está acotada superiormente.
2. Si $f : [a, b) \longrightarrow [0, +\infty)$ es localmente integrable, la función $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ es monótona creciente, por tanto si $F(x)$ está acotada en $[a, b)$ se tiene la convergencia de la integral impropia.

Criterio de convergencia de la integral

Series de términos positivos. Integrales de funciones positivas

1. Si $\sum_n a_n$ tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión de las sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ es, monótona creciente. Por tanto para la convergencia de este tipo de series es suficiente verificar que la sucesión $(S_n)_n$ está acotada superiormente.
2. Si $f : [a, b) \longrightarrow [0, +\infty)$ es localmente integrable, la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es monótona creciente, por tanto si $F(x)$ está acotada en $[a, b)$ se tiene la convergencia de la integral impropia.

Criterio de la integral

Sea $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ monótona decreciente y sea $a_n = f(n)$. Entonces la serie $\sum a_n$ converge si, y solo si, converge la integral impropia $\int_a^\infty f$.

Criterio de convergencia de la integral: ejemplos

Convergencia de series armónicas

La serie armónica

$$\sum \frac{1}{n^q}$$

es convergente si $q > 1$ y divergente si $q \leq 1$.

Criterio de convergencia de la integral: ejemplos

Convergencia de series armónicas

La serie armónica

$$\sum \frac{1}{n^q}$$

es convergente si $q > 1$ y divergente si $q \leq 1$.

Convergencia de series armónicas

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente y para cada entero $r \geq 2$

$$\sum_{n=r}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_r^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$$

Criterio de convergencia de la integral: ejemplos

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n, \sum b_n$ series de términos no negativos. Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que $a_n \leq M b_n$ para todo $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$, entonces la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.

Criterio de convergencia de la integral: ejemplos

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n, \sum b_n$ series de términos no negativos. Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que $a_n \leq M b_n$ para todo $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$, entonces la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n, \sum b_n$ series de términos estrictamente positivos y supongamos que existe $l := \lim \dfrac{a_n}{b_n}$

1. Si $0 < l < \infty$ entonces las dos series tienen el mismo carácter.
2. Si $l = 0$ entonces la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.

Criterio de convergencia de la integral: ejemplos

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n, \sum b_n$ series de términos no negativos. Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que $a_n \leq M b_n$ para todo $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$, entonces la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n, \sum b_n$ series de términos estrictamente positivos y supongamos que existe $l := \lim \dfrac{a_n}{b_n}$

1. Si $0 < l < \infty$ entonces las dos series tienen el mismo carácter.
2. Si $l = 0$ entonces la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.
3. Si $l = \infty$ entonces la convergencia de $\sum a_n$ implica la convergencia de $\sum b_n$.

Ejemplos: utilización del criterio de comparación

Criterio de comparación

Analizar el carácter de convergencia de las series que siguen:

1. $\sum \dfrac{1}{3 - \cos \frac{1}{n}}$
2. $\sum \dfrac{\sqrt{n+1}\log n}{(n^2+4)\sqrt[3]{\log n + 2}}$
3. $\sum \left(e^{1/n} - 1 - \dfrac{1}{n}\right)$
4. $\sum \left(\dfrac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$

Ejemplos: utilización del criterio de comparación

Criterio de comparación

Analizar el carácter de convergencia de las series que siguen:

1. $\displaystyle\sum \frac{1}{3-\cos\frac{1}{n}}$
2. $\displaystyle\sum \frac{\sqrt{n+1}\log n}{(n^2+4)\sqrt[3]{\log n+2}}$
3. $\displaystyle\sum \left(e^{1/n}-1-\frac{1}{n}\right)$
4. $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{n}-e^{-n^2}\right)$

Criterio de condensación

Sea la serie $\sum a_n$ de términos no negativos, con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monótona decreciente. Son equivalentes:

1. $\sum a_n$ converge,
2. $\sum 2^n a_{2^n}$ converge.

Criterio de convergencia de la integral: ejemplos

Criterio de comparación: integrales impropias

Sean $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ con $b \leq \infty$ y supongamos que existe $c \in [a, b)$ y $M > 0$ tales que $f(t) \leq Mg(t)$ para todo $t \in [c, b)$. Entonces la convergencia de $\int_a^b g$ implica la convergencia de $\int_a^b f$.

Criterio de convergencia de la integral: ejemplos

Criterio de comparación: integrales impropias

Sean $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ con $b \leq \infty$ y supongamos que existe $c \in [a, b)$ y $M > 0$ tales que $f(t) \leq Mg(t)$ para todo $t \in [c, b)$. Entonces la convergencia de $\int_a^b g$ implica la convergencia de $\int_a^b f$.

Criterio de comparación: integrales impropias

Sean $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x), g(x) > 0$ y $b \leq \infty$. Supongamos que existe $l := \lim_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

1. Si $0 < l < \infty$ entonces las integrales impropias $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$ tienen el mismo carácter.
2. Si $l = 0$ entonces la convergencia de $\int_a^b g$ implica la convergencia de $\int_a^b f$.

Criterio de convergencia de la integral: ejemplos

Criterio de comparación: integrales impropias

Sean $f,g:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R}_+$ con $b\leq\infty$ y supongamos que existe $c\in[a,b)$ y $M>0$ tales que $f(t)\leq Mg(t)$ para todo $t\in[c,b)$. Entonces la convergencia de $\int_a^b g$ implica la convergencia de $\int_a^b f$.

Criterio de comparación: integrales impropias

Sean $f,g:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ con $f(x),g(x)>0$ y $b\leq\infty$. Supongamos que existe $l:=\lim_{x\to b}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

1. Si $0<l<\infty$ entonces las integrales impropias $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$ tienen el mismo carácter.
2. Si $l=0$ entonces la convergencia de $\int_a^b g$ implica la convergencia de $\int_a^b f$.
3. Si $l=\infty$ entonces la convergencia de $\int_a^b f$ implica la convergencia de $\int_a^b g$.

Ejemplos: utilización del criterio de comparación

Criterio de comparación

Analizar el carácter de la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{t^k - 1}{\log t}\, dt$$

según los valores del número real k.

Criterio de la raíz y del cociente

Límite superior e inferior

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales.

1. $\limsup a_n := \inf\{\sup\{a_k ; k \geq n\} ; n \in \mathbb{N}\}$.

Criterio de la raíz y del cociente

Límite superior e inferior

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales.

1. $\limsup a_n := \inf\{\sup\{a_k; k \geq n\}; n \in \mathbb{N}\}$.
2. $\liminf a_n := \sup\{\inf\{a_k; k \geq n\}; n \in \mathbb{N}\}$.

Criterio de la raíz y del cociente

Límite superior e inferior

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales.

1. $\limsup a_n := \inf\{\sup\{a_k; k \geq n\}; n \in \mathbb{N}\}$.
2. $\liminf a_n := \sup\{\inf\{a_k; k \geq n\}; n \in \mathbb{N}\}$.

Límite superior e inferior

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales.

1. Sea $\alpha = \liminf a_n := \sup\{\inf\{a_k; k \geq n\}; n \in \mathbb{N}\}$. Entonces α es el único número real que cumple la siguiente propiedad:
   «Para cada ε el cardinal del conjunto $\{n \in \mathbb{N}; \alpha - \varepsilon > a_n\}$ es finito y el cardinal del conjunto $\{n \in \mathbb{N}; \alpha + \varepsilon > a_n\}$ es infinito».
2. Sea $\beta = \limsup a_n := \inf\{\sup\{a_k; k \geq n\}; n \in \mathbb{N}\}$. Entonces β es el único número real que cumple la siguiente propiedad:
   «Para cada ε el cardinal del conjunto $\{n \in \mathbb{N}; \beta - \varepsilon < a_n\}$ es infinito y el cardinal del conjunto $\{n \in \mathbb{N}; \beta + \varepsilon < a_n\}$ es finito».

Criterio de la raíz

Criterio de la raíz

Sea $\sum a_n$ una serie de términos no negativos y sea $\beta = \limsup \sqrt[n]{a_n}$.

1. Si $\beta < 1$ entonces la serie converge.
2. Si $\beta > 1$ entonces la serie diverge.

Criterio de la raíz

Criterio de la raíz

Sea $\sum a_n$ una serie de términos no negativos y sea $\beta = \limsup \sqrt[n]{a_n}$.

1. Si $\beta < 1$ entonces la serie converge.
2. Si $\beta > 1$ entonces la serie diverge.

Ejemplo aplicación del criterio de la raíz

Estudiar el carácter de convergencia de las series:

1. $$\sum \frac{1}{(\log n)^n}.$$
2. $$\sum \sqrt{n(n+1)2^{-n}}.$$

Criterio del cociente

Criterio del cociente

Sea $\sum a_n$ de términos no negativos y sea

$$\alpha = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \beta = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Si $\beta < 1$ entonces la serie converge y si $\alpha > 1$ entonces la serie diverge.

Criterio del cociente

Criterio del cociente

Sea $\sum a_n$ de términos no negativos y sea

$$\alpha = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \beta = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Si $\beta < 1$ entonces la serie converge y si $\alpha > 1$ entonces la serie diverge.

Observación

Si existe $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ también existe $\lim \sqrt[n]{a_n}$ y valen lo mismo.

Criterio del cociente

Criterio del cociente

Sea $\sum a_n$ de términos no negativos y sea

$$\alpha = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \beta = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Si $\beta < 1$ entonces la serie converge y si $\alpha > 1$ entonces la serie diverge.

Observación

Si existe $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ también existe $\lim \sqrt[n]{a_n}$ y valen lo mismo.

Ejemplo aplicación del criterio cociente

Estudiar el carácter de convergencia de las series:

1. $\sum \frac{1}{n}$ y $\sum \frac{1}{n^2}$.
2. $\sum \frac{x^n}{n!}$ y $\sum \frac{x^n}{n^p}$ con $x \geq 0$.

Propiedad asociativa de las series

Definición

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de números reales. Se dice que $\sum b_n$ se ha obtenido de $\sum a_n$ introduciendo paréntesis si existe una sucesión $n_1 < n_2 < \dots$ de naturales tales que $b_1 = a_1 + \dots a_{n_1}, b_2 = a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}$ y en general $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}$ para $k > 1$. También se expresa diciendo que $\sum a_n$ se ha obtenido de $\sum b_n$ suprimiendo paréntesis.

Propiedad asociativa de las series

Definición

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de números reales. Se dice que $\sum b_n$ se ha obtenido de $\sum a_n$ introduciendo paréntesis si existe una sucesión $n_1 < n_2 < \dots$ de naturales tales que $b_1 = a_1 + \dots a_{n_1}, b_2 = a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}$ y en general $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}$ para $k > 1$. También se expresa diciendo que $\sum a_n$ se ha obtenido de $\sum b_n$ suprimiendo paréntesis.

Proposición

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de números reales tales que $\sum b_n$ se ha obtenido de $\sum a_n$ introduciendo paréntesis.

1. Si $\sum a_n$ converge entonces $\sum b_n$ converge y ambas series tienen la misma suma.
2. Si $\sum b_n$ converge, $\lim a_n = 0$ y la diferencia $n_{k+1} - n_k$ (longitud de los paréntesis) se mantiene acotada por l para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $\sum a_n$ converge y ambas series tienen la misma suma.

Reordenación de series

Definición

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series. Diremos que la serie $\sum b_n$ es una reordenación de la serie $\sum a_n$ si existe una biyección $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $b_n = a_{\varphi(n)}$.

Reordenación de series

Definición

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series. Diremos que la serie $\sum b_n$ es una reordenación de la serie $\sum a_n$ si existe una biyección $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $b_n = a_{\varphi(n)}$.

Proposición

Sea $\sum a_n$ una serie convergente de términos positivos, entonces cualquier reordenada suya converge y ambas tienen la misma suma.

Reordenación de series

Definición

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series. Diremos que la serie $\sum b_n$ es una reordenación de la serie $\sum a_n$ si existe una biyección $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $b_n = a_{\varphi(n)}$.

Proposición

Sea $\sum a_n$ una serie convergente de términos positivos, entonces cualquier reordenada suya converge y ambas tienen la misma suma.

Definición

La serie $\sum a_n$ con $a_n \in \mathbb{R}$ se dice absolutamente convergente si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

Reordenación de series

Definición

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series. Diremos que la serie $\sum b_n$ es una reordenación de la serie $\sum a_n$ si existe una biyección $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $b_n = a_{\varphi(n)}$.

Proposición

Sea $\sum a_n$ una serie convergente de términos positivos, entonces cualquier reordenada suya converge y ambas tienen la misma suma.

Definición

La serie $\sum a_n$ con $a_n \in \mathbb{R}$ se dice absolutamente convergente si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

Proposición

Si la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente entonces es convergente.

Reordenación de series

Definición

Dada la serie $\sum a_n$ se llama:

1. Serie de términos positivos asociada a esta serie, a la serie $\sum a_n^+$ donde $a_n^+ = a_n$ si $a_n \geq 0$ y $a_n^+ = 0$ si $a_n < 0$.
2. Serie de términos negativos asociada a esta serie, a la serie $\sum a_n^-$ siendo $a_n^- = -a_n$ si $a_n \leq 0$ y $a_n^- = 0$ si $a_n > 0$.

Reordenación de series

Definición

Dada la serie $\sum a_n$ se llama:

1. Serie de términos positivos asociada a esta serie, a la serie $\sum a_n^+$ donde $a_n^+ = a_n$ si $a_n \geq 0$ y $a_n^+ = 0$ si $a_n < 0$.
2. Serie de términos negativos asociada a esta serie, a la serie $\sum a_n^-$ siendo $a_n^- = -a_n$ si $a_n \leq 0$ y $a_n^- = 0$ si $a_n > 0$.

Proposición

Sea la serie $\sum a_n$ y sean $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ sus series de términos positivos y negativos.

1. La serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente si y sólo las series $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ son convergentes.
2. Si la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente y llamamos A^+ y A^- a las sumas de dichas de $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$, respectivamente, se verifica que la suma de la serie $\sum a_n$ (y de todas sus reordenadas) es $A^+ - A^-$.

Reordenación de series

Definición

$\sum a_n$ se dice incondicionalmente convergente cuando todas sus reordenadas son convergentes y tienen la misma suma.

Reordenación de series

Definición

$\sum a_n$ se dice incondicionalmente convergente cuando todas sus reordenadas son convergentes y tienen la misma suma.

Teorema

$\sum a_n$ es incondicionalmente convergente sii es absolutamente convergente.

Reordenación de series

Definición

$\sum a_n$ se dice incondicionalmente convergente cuando todas sus reordenadas son convergentes y tienen la misma suma.

Teorema

$\sum a_n$ es incondicionalmente convergente sii es absolutamente convergente.

Teorema de Riemann

Sean $\sum a_n^+$ y $\sum a_n^-$ dos series divergentes de términos no negativos tales que $\lim a_n^+ = \lim a_n^- = 0$. Entonces para cada $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$ se pueden elegir sucesiones $(k_j)_j, (l_j)_j$ de enteros positivos y tales que la serie

$$a_1^+ + \cdots + a_{k_1}^+ - a_1^- - \cdots - a_{l_1}^- + a_{k_1+1}^+ + \cdots + a_{k_2}^+ - a_{l_1+1}^- - \cdots - a_{l_2}^- + \ldots$$

tiene por suma a.

Integrales impropias

Definición

La integral impropia $\int_a^b f$, donde $b \leq \infty$, se dice absolutamente convergente si la integral impropia $\int_a^b |f|$ es convergente.

Integrales impropias

Definición

La integral impropia $\int_a^b f$, donde $b \leq \infty$, se dice absolutamente convergente si la integral impropia $\int_a^b |f|$ es convergente.

Proposición

Si la integral impropia $\int_a^b f$ es absolutamente convergente entonces también es convergente.

Criterios de convergencia de Dirichlet y Abel

Fórmula de sumación parcial de Abel

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en $\mathbb{R}$ y $A_n := \sum_{k=m}^{n} a_k$ para m fijo, entonces para $p > m$ se tiene

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p$$

Criterios de convergencia de Dirichlet y Abel

Fórmula de sumación parcial de Abel

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en $\mathbb{R}$ y $A_n := \sum_{k=m}^{n} a_k$ para m fijo, entonces para $p > m$ se tiene

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p$$

Cirterio de Dirichlet

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que:

- $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| < M < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente con límite 0.

Entonces, la serie $\sum a_n b_n$ es convergente.