1

Números reales y complejos

Competencias

- Manejar con soltura las propiedades algebraicas del cuerpo de los números reales y del cuerpo de los números complejos.
- Adquirir la idea del caracter deductivo de las matemáticas y ser capaz de demostrar algunas verdades «evidentes».
- Conocer y saber utilizar el valor absoluto y sus propiedades.
- Saber resolver ecuaciones e inecuaciones sencillas con números reales y complejos.
- Entender la axiomática de los números naturales y saber aplicarla al método de inducción.
- Saber usar MAXIMA como herramienta de apoyo en la solución de ecuaciones e inecuaciones, o procesos de inducción.

CONTENIDOS

Este capítulo está dedicado a introducir axiomáticamente el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales y a obtener propiedades de $\mathbb{R}$ relevantes para el curso, utilizando el método deductivo de las matemáticas. Los números reales constituyen la columna que sirve de sostén al resto de la construcciones que se realizarán en el curso. Más aún, están en la base de todo el Análisis Matemático, lo cual da idea de la importancia que este capítulo tiene.

Aunque haya cuestiones que sean desconocidas para los estudiantes, buena parte de las propiedades de $\mathbb{R}$ que se estudian les resultarán familiares. No en vano las han usado y manipulado en la enseñanza secundaria, quizá con un nivel de conciencia no homogéneo. La diferencia significativa está en la metodología y el rigor empleados.

El indudable beneficio que para el aprendizaje puede tener el que se incida sobre cosas «ya conocidas» puede comportar también el riesgo para los estudiantes de pasar deprisa, quedándose en la periferia, sin entrar en el núcleo. Y los números reales no son un objeto matemático sencillo. Baste decir que la representación decimal que usamos comúnmente sólo tiene trescientos años aproximadamente y que la formulación rigurosa de los reales, que aquí presentamos, es de finales del diecinueve. Y ello a pesar de que se tiene constancia de que los números naturales eran ya utilizados (de alguna manera) en el paleolítico, hace 12.000 años.

En asignaturas de Álgebra es usual el estudio de los números comenzando por los naturales (con frecuencia en el marco de la teoría de conjuntos) que admiten una axiomática simple. A partir de ellos, y en relación con la solución de ecuaciones, se van construyendo sucesivamente los enteros y los racionales y se estudian sus propiedades. Apoyándose en los racionales es posible construir los reales y analizar sus propiedades. Por razones de economía de esfuerzo, y para dar cabida en el curso a otros contenidos, hemos optado por fijar el nivel de la axiomática de partida en una etapa avanzada en lugar de utilizar otra más básica. Desde un punto de vista pragmático, lo importante son las propiedades de $\mathbb{R}$ —que formulamos de forma precisa— y si retrocediéramos en la cadena deductiva tratando de buscar el primer eslabón acabaríamos en los Fundamentos de la Matemática, cuestión que excede sobremanera los objetivos y las posibilidades del curso. Aunque la complejidad de los números reales no es comparable con la de los naturales, la modelización de $\mathbb{R}$ a través de la recta numérica contribuye grandemente a su asimilación.

El cuerpo de los números reales resulta suficiente para gran parte de las cuestiones que se presentan tanto en Matemáticas como en las ciencias, pero para otras, resulta conveniente, cuando no necesario, considerar un conjunto más grande de números, denotado con $\mathbb{C}$, llamados números complejos, que tiene todas las propiedades de $\mathbb{R}$, salvo las relativas al orden, porque no existe la posibilidad de ordenar $\mathbb{C}$. Si $\mathbb{R}$ sirve para modelizar matemáticamente la recta, $\mathbb{C}$ hace lo mismo con el plano.

1.1. Definición axiomática de $\mathbb{R}$

Definición 1.1.1 (Axioma) *Existe un cuerpo totalmente ordenado y completo que recibe el nombre de cuerpo de los números reales y se denota por* $\mathbb{R}$*.*

Detallamos a continuación el significado de cada uno de los términos que aparecen en el axioma.

Cuerpo. Significa que hay dos operaciones internas en $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

llamadas suma y producto que cumplen las siguientes propiedades:

(1) $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),

(2) $x+y=y+x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),

(3) existe un elemento en $\mathbb{R}$ denotado con 0 que cumple $x+0=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro de la suma),

(4) para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x'\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x+x'=0$, dicho x' se denota con $-x$ (elemento opuesto),

(5) $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (asociativa),

(6) $x\cdot y=y\cdot x$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ (conmutativa),

(7) existe un elemento en $\mathbb{R}$ distinto de 0, denotado con 1, con la propiedad de que $1\cdot x=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (elemento neutro del producto),

(8) para cada $x\in\mathbb{R}$ con $x\neq 0$ existe $x''\in\mathbb{R}$ con la propiedad de que $x\cdot x''=1$, dicho x'' se denota mediante $\dfrac{1}{x}$ o también mediante x^{-1} (elemento inverso),

(9) $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (distributiva).

En adelante la expresión $a-b$ significará lo mismo que $a+(-b)$. En lo sucesivo, generalmente, suprimiremos el símbolo $\cdot$ correspondiente a la multiplicación; únicamente lo incluiremos con carácter enfatizante en algunas situaciones.

Totalmente ordenado. Significa que existe una relación binaria denotada con $\leq$ con las siguientes propiedades:

(10) $x\leq x$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (reflexiva),

(11) $x\leq y$ e $y\leq x$ implican $x=y$ (antisimétrica),

(12) $x\leq y$ e $y\leq z$ implican $x\leq z$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$ (transitiva),

(13) para cada dos elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple una de las dos relaciones: $x \leq y$ ó $y \leq x$ (el orden es «total»),

(14) $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$,

(15) $x \leq y$ y $0 \leq z$ implica $x \cdot z \leq y \cdot z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Una relación binaria como la anterior que cumple las tres primeras propiedades se llama relación de orden; si además cumple la cuarta se dice que se trata de una relación de orden total. Las dos últimas propiedades formulan propiedades de «compatibilidad» del orden en relación con la suma y el producto del cuerpo.

La relación $x \geq y$ significa, por definición, lo mismo que $y \leq x$. Y si $x \leq y$ siendo $x \neq y$ entonces escribiremos $x < y$ o, indistintamente, $y > x$.

Si $x > 0$ diremos que x es positivo, mientras que si $x < 0$ diremos que x es negativo.

Completo. Significa, dicho de forma breve, lo siguiente:

(16) todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.

Expliquemos la terminología.
Un conjunto $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ se dice acotado superiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $a \leq M$, para todo $a \in A$; M se llama una cota superior de A.

Si $M < M' \in \mathbb{R}$ es claro que M' también es cota superior de A. Se dice que $\alpha \in \mathbb{R}$ es supremo de A (y se escribe $\alpha = \sup A$) si α es cota superior de A y además cualquier otra cota superior M de A cumple que $\alpha \leq M$. Así pues, la propiedad que nos ocupa puede expresarse diciendo que en $\mathbb{R}$ cada conjunto no vacío acotado superiormente posee una cota superior que es la menor de todas las cotas superiores.

Proposición 1.1.2 *En $\mathbb{R}$ (y, en general, en cualquier cuerpo totalmente ordenado) se verifican las siguientes propiedades:*

(1) Los elementos neutros, opuesto e inverso de las operaciones suma y producto son únicos.

(2) Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes. Si $b \neq 0$ también son equivalentes las fórmulas $a = b$ y $a \cdot \dfrac{1}{b} = 1$.

(3) $c < 0$ equivale a $-c > 0$.

(4) $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(5) $(-1) \cdot a = -a$ y por tanto $(-a) \cdot b = -(ab)$.

(6) *Si* $a \leq b$ *y* $c \leq d$ *entonces* $a + c \leq b + d$.

(7) $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$.

(8) *Si* $c < 0$ *entonces* $a \leq b$ *y* $ac \geq bc$ *son equivalentes.*

(9) *Si* $a \neq 0$ *entonces* $a \cdot a > 0$*; en particular* $1 > 0$.

(10) $a > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > 0$.

(11) *Si* $b > 0$ *entonces* $a \geq b \Rightarrow \dfrac{1}{a} \leq \dfrac{1}{b}$*. El recíproco es cierto si* $a > 0$ *y* $b > 0$.

Demostración:

(1) Veamos, por ejemplo, la unicidad del neutro de la suma (para los otros se procede de forma similar).

Supongamos que exista otro neutro e además de 0. Entonces, por ser 0 elemento neutro se tendría $e + 0 = e$; pero, por otra parte, por ser e elemento neutro, también se verificaría $0+e = 0$. Por tanto, usando la conmutatividad de la suma, tendremos:

$$e = e + 0 = 0 + e = 0$$

y, así, el elemento neutro es único.

(2) Recurriendo a las propiedades de los elementos neutros del producto y la suma, y a la propiedad distributiva, tenemos:

$$a = a \cdot 1 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a + a \cdot 0.$$

Por tanto, sumando $-a$ en ambos miembros de la igualdad, obtenemos $a \cdot 0 = 0$.

(3) Si $a = b$ sumando $-b$ a ambos lados se obtiene $a - b = 0$ y recíprocamente. En el otro caso basta multiplicar a ambos lados por $\dfrac{1}{b}$.

(4) Si $c < 0$, sumando $-c$ a ambos lados de la desigualdad obtenemos $0 < -c$ (donde hacemos uso de la propiedad (14) de cuerpo ordenado, es decir, de la compatibilidad del orden y la suma). Para el recíproco basta sumar c a ambos lados de la desigualdad $-c > 0$.

(5) $0 = a \cdot (1 + (-1)) = a \cdot 1 + a \cdot (-1) = a + a \cdot (-1)$ y como el opuesto es único $a \cdot (-1) = -a$. En consecuencia $(-a) \cdot b = ((-1) \cdot a) \cdot b = (-1) \cdot (a \cdot b) = -(a \cdot b)$.

(6) Sumando c a la primera desigualdad se obtiene $a + c \leq b + c$. Sumando b a la segunda desigualdad se obtiene $b + c \leq b + d$ y por la propiedad transitiva se obtiene el resultado.

(7) Basta sumar sucesivamente $-a$ y $-b$.

(8) Si $c < 0$ entonces $-c > 0$, según el apartado (4) de esta misma proposición. Ahora si $a \leq b$, según la propiedad (15) de cuerpo ordenado, tenemos $(-c)a \leq (-c)b$, o, lo que es equivalente por la propiedad (5) de esta proposición: $-(ac) \leq -(bc)$. Ahora, basta utilizar la propiedad (7) para concluir que $ac \geq bc$.

(9) Considerando por separado los casos $a > 0$ y $a < 0$ sin más que aplicar las propiedades ya demostradas se obtiene el resultado. Como $1 = 1 \cdot 1$ y $1 \neq 0$ se tiene $1 > 0$.

(10) Si fuera $\dfrac{1}{a} < 0$ se tendría $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1 < 0$, contra el resultado antes probado.

(11) Basta multiplicar sucesivamente por $\dfrac{1}{b}$ y $\dfrac{1}{a}$.

Dejamos al cuidado del lector los detalles que faltan. $\square$

Observe que los apartados 2 a 5 de la Proposición anterior constituyen reglas bien conocidas y muy utilizadas en la enseñanza secundaria.

¿Donde está el fallo de la siguiente *«demostración»*?
Sea $x = y$. Entonces se tiene la siguiente cadena de igualdades equivalentes:

$$\begin{gathered} x^2 = x\,y \\ x^2 - y^2 = x\,y - y^2 \\ (x+y)(x-y) = y(x-y) \\ x + y = y \\ 2y = y \\ 2 = 1 \end{gathered}$$

Definición 1.1.3 *Un subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ se dice acotado inferiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \leq a$ para todo $a \in A$. Cualquier valor M que cumpla la relación anterior se llama una cota inferior de A. Si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ que es cota inferior de A y además cumple que $M \leq \alpha$ para cualquier otra cota inferior M de A, entonces α se llama ínfimo de A y se denota en la forma $\alpha = \text{ínf} A$.*

Proposición 1.1.4 *Si en un cuerpo ordenado se verifica el axioma del supremo, entonces todo subconjunto no vacío acotado inferiormente tiene ínfimo.*

Figura 1.1: Bernard Bolzano (1781–1848)

Demostración: Si A está acotado inferiormente por α, entonces $-A$ está acotado superiormente por $-\alpha$ y si β es el supremo de $-A$ es inmediato que $-\beta$ es el ínfimo de A. $\square$

Las afirmaciones «es inmediato», «es sencillo probar» y otras similares, son frases hechas, de uso frecuente en matemáticas, que vienen a significar algo así como «aunque lo podría hacer, no voy a escribir los detalles, pero usted, querido lector, debe convencerse por sí mismo de que lo que digo es cierto haciendo los detalles, a sabiendas de que si lo piensa con cuidado le saldrán; pero, por favor, hágalos». Pues eso... ¡escriba los detalles!

Probablemente el primer matemático en acercarse a la existencia del supremo de todo conjunto acotado en $\mathbb{R}$ o, en todo caso, a la importancia y necesidad de esta propiedad, fue Bernard Bolzano, sacerdote, filósofo y teólogo, nacido el 5 de octubre de 1781 y fallecido el 18 de diciembre de 1848, en Praga. Bolzano fue uno de los primeros matemáticos en percibir la carencia de rigor en los fundamentos del cálculo infinitesimal y probablemente su figura perdurará como uno de los pioneros en la búsqueda de dichos fundamentos. En un panfleto, publicado en 1817, escribe:

> *Si una propiedad M no se aplica a todos los valores de una cantidad variable x, pero sí a todas aquellas que son más pequeñas que un cierto u: así hay siempre una cantidad U que es la mayor de aquéllas de las que se puede afirmar que todos los x menores poseen la propiedad M.*

1.2. Otras propiedades de los números ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$)

Definición 1.2.1 *Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama inductivo si cumple las siguientes condiciones:*

- $1 \in I$.
- *Si $x \in I$ entonces $x + 1 \in I$.*

Claramente $\mathbb{R}$ es un conjunto inductivo. Así pues la colección de los subconjuntos inductivos de $\mathbb{R}$ es no vacía y, por tanto, tiene sentido la siguiente

Definición 1.2.2 *Se llama conjunto de los números naturales y se denota con* $\mathbb{N}$ *al siguiente conjunto*

$$\mathbb{N} := \bigcap \{I : \text{ donde } I \text{ es un conjunto inductivo de } \mathbb{R}\}.$$

Es inmediato comprobar que $\mathbb{N}$ también es un conjunto inductivo, y por su propia definición, es el menor conjunto inductivo de $\mathbb{R}$. Como consecuencia $\mathbb{N}$ viene caracterizado por la siguiente propiedad.

Corolario 1.2.3 (Método de inducción) *Cualquier subconjunto* $S \subset \mathbb{N}$ *que satisfaga las siguientes propiedades*

(1) $1 \in S$,

(2) si $n \in S$ *entonces* $n+1 \in S$,

verifica que $S = \mathbb{N}$.

Los primeros elementos de $\mathbb{N}$ se denotan de la siguiente manera:

	$10 = 9 + 1$	$20 = 19 + 1$	$\dots$	$100 = 99 + 1$	$\dots$
1	$11 = 10 + 1$	$21 = 20 + 1$		$101 = 100 + 1$	
$2 = 1 + 1$	$12 = 11 + 1$	$22 = 21 + 1$		$102 = 101 + 1$	
$3 = 2 + 1$	$13 = 12 + 1$	$23 = 22 + 1$		$103 = 102 + 1$	
$4 = 3 + 1$	$14 = 13 + 1$	$24 = 23 + 1$		$104 = 103 + 1$	
$5 = 4 + 1$	$15 = 14 + 1$	$25 = 24 + 1$		$105 = 104 + 1$	
$6 = 5 + 1$	$16 = 15 + 1$	$26 = 25 + 1$		$106 = 105 + 1$	
$7 = 6 + 1$	$17 = 16 + 1$	$27 = 26 + 1$		$107 = 106 + 1$	
$8 = 7 + 1$	$18 = 17 + 1$	$28 = 27 + 1$		$108 = 107 + 1$	
$9 = 8 + 1$	$19 = 18 + 1$	$29 = 28 + 1$		$109 = 108 + 1$	

La primera columna define los símbolos básicos o guarismos que permiten, utilizando una notación posicional, ir denotando los sucesivos elementos de $\mathbb{N}$ en la forma que sugiere la tabla anterior.

El método de inducción es usado con frecuencia en la demostración de fórmulas y resultados relativos a números naturales. En este mismo capítulo tendremos ocasión de utilizarlo varias veces, pero a pesar de ello vamos a ilustrarlo ahora con en ejemplo sencillo.

Ejemplo 1.2.4 Para cualquier número natural $n \geq 1$ se verifica que $4^n > n^2$.

Es claro que $4^1 = 4 > 1^2 = 1$ y también que $4^2 > 2^2$, $4^3 > 3^2$ etc. pero no podemos continuar realizando esas comprobaciones para todos los número naturales.

¿Cómo estar seguros de que siempre va a ser $4^n > n^2$? El método de inducción nos lo garantiza. Veamos de qué modo.

Consideramos el subconjunto A de $\mathbb{N}$ formado por aquellos números naturales que verifican la desigualdad propuesta. Hemos visto que $1 \in A$ (y también que $2 \in A$ y $3 \in A$, aunque esto no tiene importancia para nuestro razonamiento). Supongamos ahora que $n \in A$; si pudiéramos demostrar a partir de esta información que también $n+1 \in A$ (con independencia de cual ese n), entonces aplicando el corolario 1.2.3 obtendríamos que $A = \mathbb{N}$, o sea la desigualdad propuesta es verificada por todos los números naturales.

Veamos cómo podemos demostrar que $n + 1 \in A$ (es decir $4^{n+1} > (n + 1)^2$) admitiendo como cierto que $n \in A$ (o sea que $4^n > n^2$).

$$4^{n+1} = 4 \cdot 4^n > 4n^2 = (2n)^2 = (n + n)^2 \geq (n + 1)^2$$

En la primera desigualdad se hace uso de la información admitida como cierta $4^n > n^2$ (la llamada hipótesis de inducción); las otras igualdades y desigualdades son evidentes.

Observación 1.2.5 La formulación del método de inducción tiene dos propiedades. En la primera elige un elemento especial, que para nosotros ha sido el 1 (otros autores toman el 0) tal que $1 \in S$. La segunda afirma que «si $n \in S$ entonces $n + 1 \in S$».

A veces una determinada fórmula o propiedad no es cierta para $n = 1$ y quizá tampoco para $n = 2$, pero sí lo es, pongamos por caso, para $n = 3$, para $n = 4$, para $n = 5$... Pero no podemos seguir así hasta comprobar que se cumple para todos los números naturales: simplemente es imposible.

Podría pensarse que como el 1 no cumple la propiedad ($1 \notin S$), el método de inducción no sirve para abordar el problema planteado. Sin embargo no es así, como vamos a ver. Para ello consideremos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \text{que cumplen la propiedad propuesta}\}$$

Siguiendo con el ejemplo, $1 \notin A$ $2 \notin A$ $3 \in A$, $4 \in A$... pero la cuestión clave no es comprobar qué ocurre para un conjunto finito como 1, 2, 3, 4, 5 (eso se comprueba y basta), la cuestión clave es saber qué va a ocurrir con los infinitos números que no se pueden comprobar. Esa es la esencia del método de la inducción. Lo que se busca es saber si cualquier $n \geq 3$ cumple la propiedad o fórmula en cuestión. Para ello cambiamos las propiedades del método de inducción por estas otras

(1) $3 \in A$

(2) si $n \in A$ y $n \geq 3$ entonces $n + 1 \in A$

y suponemos que hemos podido demostrarlas.

Entonces el método de inducción nos permite concluir que A es precisamente el conjunto de los naturales $n \geq 3$. En efecto, si definimos

$$S = \{1, 2\} \cup A$$

es claro que $1 \in S$. Y también es sencillo ver si $n \in S$ también $n+1 \in S$ ya que para $n = 1$ es cierto $(1 + 1 = 2 \in S)$, para 2 también $2 + 1 = 3 \in A \subset S$ y si $3 \geq n \in S$ necesariamente, $n \in A$ luego por la segunda propiedad de la inducción (relativa a A) se tiene que $n + 1 \in A \subset S$. Aplicamos ahora el método de inducción 1.2.3 y obtenemos que $S = \mathbb{N}$. Lo cual expresado en otros términos significa que cualquier número natural $n \geq 3$ satisface la propiedad buscada.

Existe una variante del método de indución que se conoce con el nombre de versión fuerte del método de inducción y que puede deducirse de forma fácil de la otra.

Corolario 1.2.6 (Método de inducción, versión fuerte) *Sea $S \subset \mathbb{N}$ que cumple las siguientes propiedades:*

(1) $1 \in S$

(2) si $1, 2, \ldots, n \in S$ *entonces* $n + 1 \in S$

Entonces $S = \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.2.7 El Teorema Fundamental de la Aritmética afirma que todo número entero $n \geq 2$ es primo o producto de números primos.

Este teorema puede ser probado utilizando la versión fuerte del método de inducción del siguiente modo. Sea

$$A = \{2 \leq n \in \mathbb{N} : n \text{ cumple el Teorema Fund. de la Aritmética}\}.$$

Es claro que $2 \in A$. Supongamos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $2, 3, \ldots, n \in A$. Queremos demostrar que $n + 1 \in A$. Caben dos posibilidades: o bien $n + 1$ es primo, en cuyo caso evidentemente $n + 1 \in A$; o bien $n + 1$ no es primo, en tal caso existen dos números enteros $1 < p, q < n+1$ tales que $n+1 = p \cdot q$, pero como hemos supuesto (hipótesis de inducción) que $2, 3, \ldots, n \in A$, tenemos que $p, q \in A$ y por tanto p y q son primos o producto de primos, y en consecuencia también $p \cdot q = n + 1$ es un producto de primos, es decir, al igual que antes, $n + 1 \in A$.

Definición 1.2.8 *El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y el de los números racionales $\mathbb{Q}$ están definidos del siguiente modo:*

(1) $\mathbb{Z} := \{0\} \bigcup \{n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}, \text{ o bien } -n \in \mathbb{N}\}$

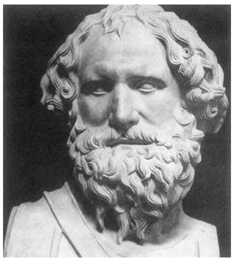


Figura 1.2: Arquímedes de Siracusa (287–212 a.d.C.)

(2) $\mathbb{Q} := \{m \cdot \frac{1}{n} : m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$*. El número real* $m \cdot \frac{1}{n}$ *se denota indistintamente como* $\frac{m}{n}$ *o como* m/n*.*

Proposición 1.2.9 *El cuerpo* $\mathbb{R}$ *tiene la propiedad arquimediana, es decir, dados* $x, y \in \mathbb{R}$*, con* $0 < y$*, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $x < ny$*.*

Demostración: De no cumplirse la tesis, el conjunto $A := \{ny : n \in \mathbb{N}\}$ estaría acotado superiormente por x. Sea $\alpha := \sup A$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ es $ny \leq \alpha$. Por otra parte, $\alpha - y$ no sería cota superior de A y por tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - y < n_0 y$. En consecuencia sería $\alpha < (n_0 + 1)y$, lo cual es contradictorio con el hecho de que A está acotado superiormente por α. □

Una consecuencia de esta propiedad es que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente y que $\mathbb{Z}$ no está acotado ni superior ni inferiormente.

La denominación «arquimediana» de la propiedad anterior procede, naturalmente, de Arquímedes de Siracusa (287–212 a.d.C.), que siempre ha sido considerado entre los más grandes matemáticos de la historia de la humanidad. Pero, en realidad, el origen de la propiedad arquimediana parece remontarse a tiempos anteriores, concretamente a Eudoxo de Cnido, que vivió entre los años 408 y 355 a.d.C. aproximadamente. A Eudoxo se deben las primeras demostraciones correctas del cálculo de áreas y volúmenes mediante el método conocido como *método de exhausción.*

Eudoxo fue el creador de una teoría de las proporciones entre magnitudes independiente de la conmensurabilidad de las mismas: un hecho de enorme trascendencia que permitió continuar el desarrollo de la matemática griega tras el descubrimiento de la existencia de magnitudes inconmensurables (véase el comentario histórico al final de la sección 1.2.4). La propiedad arquimediana aparece en el libro V de los *Elementos* de Euclides en la forma de una definición, aparentemente inocua, aunque fundamental en la teoría de Eudoxo; concretamente la definición 4 dice:

> *Se dice que las magnitudes* ***tienen una razón*** *entre sí cuando son capaces, siendo multiplicadas, de exceder la una a la otra.*

Proposición 1.2.10 *Todo subconjunto no vacío* A *de* $\mathbb{N}$ *tiene primer elemento.*

Demostración: Utilizaremos el método de inducción. Supongamos que A no tuviera primer elemento y sea $B := \mathbb{N} \setminus A$ el complementario del conjunto A. Es claro que $1 \notin A$, pues en caso contrario A tendría primer elemento. Así pues $1 \in B$. Además, si $n \in B$ entonces $n+1 \in B$ ya que si, por el contrario, se tuviera $n+1 \in A$ entonces A tendría primer elemento, que sería, concretamente $\min\{1, 2, \ldots, n+1\} \cap A$. El método de inducción garantiza que $B = \mathbb{N}$ y, por tanto, que $A = \emptyset$, lo que contradice la hipótesis. $\square$

Corolario 1.2.11 *Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único número entero m que verifica $m \leq x < m+1$.*

Demostración: Supongamos inicialmente que $x \geq 1$. Aplicando la propiedad arquimediana a la pareja compuesta por x y 1 se tiene que $\{n \in \mathbb{N} : x < n\}$ es un conjunto no vacío y en consecuencia aplicando la proposición inmediatamente anterior podemos concluir que dicho conjunto tiene un primer elemento, digamos $k \in \mathbb{N}$. Haciendo $m := k-1$ se obtiene el resultado en este caso. Si $x < 1$ basta tomar $k \in \mathbb{N}$ tal que $x + k \geq 1$ y aplicar el resultado anterior. La unicidad es consecuencia de que no existe, como es fácil probar por inducción (ejercicio 1.5), ningún número natural entre 1 y 2. $\square$

Esta proposición da sentido a la siguiente

Definición 1.2.12 *Sea $x \in \mathbb{R}$, el único número entero m que verifica*

$$m \leq x < m+1$$

se llama parte entera de x y se denota con $[x]$, es decir $[x] := m$.

Corolario 1.2.13 *Si $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.*

Demostración: Por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n(y-x)$, es decir, $1/n < y - x$. Sea $m := [nx]$, entonces se tiene $m \leq nx < m+1$, lo que permite escribir:

$$\frac{m}{n} \leq x < \frac{(m+1)}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + (y-x) = y.$$

Tomando $r = (m+1)/n$ se obtiene el resultado buscado. $\square$

En un cuerpo ordenado X, si $x = y^2$ se dice que y es una raíz cuadrada de x. Es muy fácil observar que si y es una raíz cuadrada de x, $-y$ también es una raíz cuadrada de x, y que x no puede tener más raíces cuadradas. En $\mathbb{Q}$, no todos los números tienen raíces cuadradas.

Proposición 1.2.14 *No existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que

$$\frac{p^2}{q^2} = 2.$$

Podemos suponer además que la fracción p/q es irreducible (es decir, que p y q no tienen divisores comunes). De $p^2 = 2q^2$ se obtiene que p^2 es par. Pero entonces p ha de ser par, porque si fuera impar, es decir, $p = 2k + 1$ para cierto $k \in \mathbb{N}$, se tendría que $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ sería impar. Sea pues $2p' := p$ (donde p' es un número natural), sustituyendo en la igualdad anterior se obtiene $4(p')^2 = 2q^2$ y simplificando $2(p')^2 = q^2$. Razonando como antes, existe $q' \in \mathbb{N}$ tal que $q = 2q'$. Esto contradice el hecho de que p/q es irreducible. $\square$

La clave de la prueba de la proposición 1.2.15 (y de la 1.2.22) está en el hecho de que

$$(1+\varepsilon)^n < 1 + 3^n\varepsilon \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad 0 < \varepsilon < 1; \tag{1.1}$$

fórmula que puede demostrarse por inducción de forma sencilla (ejercicio 1.4).

Lema 1.2.15 *Si $0 < r \in \mathbb{Q}$ cumple $r^2 < 2$, entonces existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $r < t$ y $r^2 < t^2 < 2$. Análogamente si $0 < s \in \mathbb{Q}$ cumple $s^2 > 2$, entonces existe $w \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < w < s$ y $s^2 > w^2 > 2$.*

Además las afirmaciones anteriores son también ciertas si los números reales r y s no son racionales.

DEMOSTRACIÓN: La idea de la demostración es la misma en ambos casos. En la primera parte, si $0 < r \in \mathbb{Q}$ es tal que $r^2 < 2$, se trata de ver que es posible encontrar $0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}$ de modo que si $t := r(1+\varepsilon)$ se tenga $t^2 < 2$. Pero usando la estimación (1.1) se tiene que

$$t^2 = r^2(1+\varepsilon)^2 < r^2(1+9\varepsilon)$$

y entonces bastaría imponer la condición $r^2(1+9\varepsilon) < 2$. Así pues si tomamos ε que verifique la condición

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{9}\left(\frac{2}{r^2} - 1\right)$$

conseguimos nuestro propósito. Que existe un número racional ε verificando la doble desigualdad anterior es consecuencia del corolario 1.2.13.

Para la segunda parte se razona de forma parecida tomando $t := \dfrac{r}{1+\varepsilon} < r$, para un ε adecuado. Dejamos al cuidado del lector los detalles.

Finalmente sea $r \in \mathbb{R}$ no necesariamente racional. Razonando exactamente como antes conseguimos demostrar la existencia de un número real $t := r(1+\varepsilon)$ tal que $r < t$ y $r^2 < t^2 < 2$; sin embargo, puesto que r no sabemos si es racional, tampoco podemos asegurar que lo sea t. Ahora bien, si $r^2 < t^2$, entonces, puesto que ambos son positivos, necesariamente $r < t$ y ahora, utilizando el corolario 1.2.13, existe un racional τ tal que $r < \tau < t$. Entonces $r^2 < \tau^2 < 2$ que lo que se buscaba. El razonamiento en el caso de que s no sea necesariamente racional sigue pasos idénticos. $\square$

Proposición 1.2.16 *Existe un número $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $\alpha^2 = 2$. Además*

$$\alpha = \sup\{0 \leq r \in \mathbb{Q} : \ r^2 < 2\}$$

Demostración: Sea $A = \{0 \leq r \in \mathbb{Q} : \ r^2 < 2\}$. A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ ($1 \in A$) acotado superiormente por 2 (como es fácil comprobar) y por tanto existe

$$\alpha := \sup\{0 \leq r \in \mathbb{Q} : \ r^2 < 2\}.$$

Ahora afirmamos que α verifica

$$\alpha^2 = 2.$$

En efecto, si no fuera $\alpha^2 = 2$ entonces o bien $\alpha^2 < 2$ o bien $\alpha^2 > 2$. Si suponemos que $\alpha^2 < 2$ entonces, utilizando la última parte del lema 1.2.15 (con $r = \alpha$ no necesariamente racional) existiría un racional t tal que $\alpha < t$ y $\alpha^2 < t^2 < 2$; esta última condición nos asegura que $t \in A$, con lo que, puesto que $\alpha < t$, llegamos a que α no es cota superior de A, que es una contradicción. Si suponemos, en cambio, que $\alpha^2 > 2$, obtendríamos $s \in \mathbb{Q}$ con $\alpha > s$ y $s^2 > 2$; en este caso, si $r \in A$ tenemos: $r^2 < 2 < s^2 < \alpha^2$, por lo que $r < s < \alpha$ y así s es cota superior de A con $s < \alpha$, por lo que α no puede ser la menor cota superior, que, de nuevo, es una contradicción.

Como consecuencia de la proposición 1.2.14 y, una vez demostrado que $\alpha^2 = 2$, concluimos que $\alpha \notin \mathbb{Q}$. $\square$

La proposición anterior contiene varias afirmaciones importantes. En primer lugar, hemos dado sentido a la expresión $\sqrt{2}$: el número $\sqrt{2} := \alpha$ existe en $\mathbb{R}$. En segundo lugar $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \neq \emptyset$ y el conjunto A no tiene supremo en $\mathbb{Q}$ (lo que muestra que $\mathbb{Q}$ no verifica el axioma del supremo).

A los elementos de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ se les llama números irracionales.

Extendemos ahora el resultado 1.2.13 para irracionales.

Corolario 1.2.17 *Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, entonces existe $z \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ tal que $x < z < y$.*

Demostración: Sea $w \in \mathbb{Q}$ de modo que $x < w < y$. Por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < y - w.$$

Tomando

$$z := w + \frac{\sqrt{2}}{n}$$

se obtiene el resultado buscado. $\square$

La presencia de $\sqrt{2}$ en la demostración del corolario anterior ¿a qué cree que es debida? ¿Es imprescindible utilizar $\sqrt{2}$ o podría ser otro número? En caso de poder utilizarse otros números indique cuál o cuáles y por qué.

El siguiente resultado es una consecuencia directa de 1.2.13.

Corolario 1.2.18 *Cada elemento $x \in \mathbb{R}$ es el supremo del conjunto de números racionales que son menores que él, es decir,*

$$x = \sup\{r : r \in \mathbb{Q} \text{ con } r < x\}.$$

1.2.1. Valor absoluto

La estructura de cuerpo totalmente ordenado lleva asociada las nociones de valor absoluto y de «distancia».

Definición 1.2.19 *Para cada $x \in \mathbb{R}$ se define el valor absoluto mediante*

$$|x| := \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Proposición 1.2.20 *Para cada par de elementos x, y de $\mathbb{R}$ se cumplen:*

(1) $|x| = |-x| \geq 0$ *y* $|x| > 0$ *si* $x \neq 0$.

(2) $|x| = \max\{x, -x\}$.

(3) $|xy| = |x||y|$.

(4) $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$.

(5) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

(6) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(desigualdad triangular).*

(7) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

(8) $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ *para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN: Los cuatro primeros se obtienen de forma inmediata distinguiendo casos según que x e y sean positivos o negativos.

(5) $|x| = \text{máx}\{x, -x\} \leq a$ equivale a $x \leq a$ y $-x \leq a$ simultáneamente, es decir, a $x \leq a$ y $x \geq -a$ simultáneamente, o sea $-a \leq x \leq a$.

(6) Sumando miembro a miembro en

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

$$-|y| \leq y \leq |y|$$

se obtiene

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|)$$

lo que según la propiedad anterior equivale a

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

(7) Tomando $z := y - x$ en la desigualdad triangular $|x+z| \leq |x|+|z|$ se obtiene $|y| - |x| \leq |y - x|$ y de forma análoga, tomando $z' = x - y$, se obtiene también $|x| - |y| \leq |x - y| = |y - x|$, por lo que $\text{máx}\{|x| - |y|, -(|x| - |y|)\} = \Big||y| - |x|\Big| \leq |x - y|$.

(8) Se obtiene a partir de la desigualdad triangular por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$.

El lector debe completar los detalles que faltan, en particular, comprobar que la inducción funciona. □

Definición 1.2.21 *Si x e y son números reales se llama distancia de x a y al número real $d(x, y) := |x - y|$.*

La distancia es un concepto clave para poder formular matemáticamente la noción de proximidad, noción fundamental para el Análisis Matemático. La función d anteriormente definida cumple las tres propiedades que se exigen a cualquier distancia y que son:

- $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

para x, y, z arbitrarios.

1.2.2. Raíces n-ésimas

Hemos visto, como consecuencia de la proposición 1.2.15, que existe un único número real positivo α tal que $\alpha^2 = 2$ que hemos denominado raíz cuadrada de 2. Ahora vamos a extender este resultado probando la existencia de raíces n-ésimas para cualquier número real positivo.

Proposición 1.2.22 *Sea $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, y sea $p \in \mathbb{N}$.*

(1) Si $r \in \mathbb{Q}$, con $r > 0$ cumple $r^p < x$ entonces existe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $r < t$ y $r^p < t^p < x$

(2) Si $s \in \mathbb{Q}$, con $s > 0$ cumple $s^p > x$ entonces existe $w \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < w < s$ y $s^p > w^p > x$.

(3) Existe un único número real positivo α tal que $\alpha^p = x$. De hecho

$$\alpha = \sup\{r : r \in \mathbb{Q}, r^p < x\}$$

Demostración: Se realiza con un procedimiento similar a 1.2.15 y se deja como ejercicio. □

Esta proposición da sentido a la siguiente definición.

Definición 1.2.23 *Para cada $x \in \mathbb{R}, x > 0$ y cada $p \in \mathbb{N}$, se define la raíz p-ésima de x como el único número real positivo α tal que $\alpha^p = x$. Se denota*

$$x^{\frac{1}{p}} := \sqrt[p]{x} := \alpha = \sup\{r : r \in \mathbb{Q}, r^p < x\}.$$

Obsérvese que si $x > 0$ y p es par, entonces $y = \sqrt[p]{x}$ e $y = -\sqrt[p]{x}$ son los dos únicos números reales que cumplen $y^p = x$. Mientras que si p es impar, aunque x sea negativo, $y = \operatorname{signo}(x).\sqrt[p]{| x |}$, donde $\operatorname{signo}(x) = 1$ si $x \geq 0$ y $\operatorname{signo}(x) = -1$ si $x < 0$, es el único número real que cumple $y^p = x$.

1.2.3. Sobre la unicidad y existencia de $\mathbb{R}$

Plantearse la cuestión de la existencia y unicidad de los objetos que se estudian en Matemáticas es fundamental y, por supuesto, habitual.

En nuestro caso las cuestiones son: ¿existe un conjunto $\mathbb{R}$ con las propiedades descritas en 1.1.1?, ¿existe sólo un conjunto con esas propiedades?

Con el punto de partida que hemos adoptado nosotros, la respuesta a la primera pregunta es claramente afirmativa: existe por axioma. Los axiomas son enunciados que se admiten como ciertos. Y en este curso hemos adoptado como único axioma específico (al margen de otros axiomas, que no hemos detallado y que son los de la teoría de conjuntos) la existencia de un conjunto denotado con $\mathbb{R}$ con las propiedades que aparecen en 1.1.1; a partir de ese axioma y utilizando la lógica matemática como metodología construiremos y fundamentaremos todos los contenidos del curso.

La unicidad de $\mathbb{R}$ no es, sin embargo, un axioma, es un teorema, un enunciado demostrable. Nosotros no lo vamos a demostrar aquí, pero usando la fórmula del corolario 1.2.18 puede probarse que en «esencia» sólo existe un cuerpo totalmente ordenado de verifique el axioma de supremo (si hubiera varios serían «isomorfos», copias exactamente iguales). No debe pensar que se trata de algo muy complicado; de hecho si se lo plantea como un reto, tal vez con alguna indicación del profesor, será capaz de hacer la demostración.

He aquí un enunciado riguroso de la unicidad del cuerpo de los números reales:

Proposición. *Sean $(R, +, \cdot, \leq)$ y $(S, +, \cdot, \preceq)$ dos cuerpos totalmente ordenados que verifican el axioma del supremo. Entonces existe una biyección Φ de R sobre S que conserva las sumas, los productos y el orden. (Φ es un isomorfismo de cuerpos ordenados que permite identificar a cualquier par de cuerpos ordenados que verifiquen el axioma del supremo)*

Y he aquí un esquema de su demostración:

Demostración: Si 1 y $\tilde{1}$ son las respectivas unidades de R y S, las fracciones $\frac{m\cdot 1}{n\cdot 1} \in R$ y $\frac{m\cdot\tilde{1}}{n\cdot\tilde{1}} \in S$ representan la inclusión del número racional $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ en R y en S, respectivamente. Es posible comprobar que la aplicación $\Phi : R \longrightarrow S$ definida por

$$\Phi(x) = \sup\left\{\frac{m\cdot\tilde{1}}{n\cdot\tilde{1}} \in S : \frac{m\cdot 1}{n\cdot 1} < x\right\}$$

es una biyección que conserva sumas, productos, y el orden. □

Volvamos de nuevo a la cuestión de existencia. Es legítimo y natural que el lector se plantee la cuestión de por qué admitir como «dogma» la existencia de $\mathbb{R}$. Sus estudios y experiencias anteriores quizá le hacen sentir que la existencia de $\mathbb{R}$ no es una cuestión opinable, como lo pueda ser la reencarnación, que algunas religiones tienen por cierta. Los números reales, dirá seguramente, existen de verdad, su existencia es «demostrable» y no es posible adoptar ante esta afirmación una actitud escéptica o contraria a la misma, como ocurre, por ejemplo, con el tema de la reencarnación.

En realidad la cuestión crucial no es el que la existencia de $\mathbb{R}$ sea o no demostrable, eso no afecta a las conclusiones que podamos obtener. El problema se plantearía si alguien rechazara como cierto que $\mathbb{R}$ existe, porque entonces la construcción lógica realizada (y la que realizaremos en los sucesivos capítulos) se desmoronaría desde sus cimientos. Pero aunque no sea la cuestión crucial, eso no invalida que nos podamos preguntar si la existencia de $\mathbb{R}$ es demostrable y cómo puede ser demostrada.

Ciertamente la existencia de $\mathbb{R}$ es demostrable y existen varias formas de hacerlo. Pero cualquier demostración, cualquier construcción, en una ciencia deductiva como es la Matemática, se asienta sobre unos axiomas y unas reglas de juego precisas para la deducción. Cuando decimos que es demostrable queremos decir que su existencia puede ser deducida a partir de unos axiomas más elementales, más básicos. Fijar esos axiomas elementales, que están en la base de toda elaboración matemática, es el objeto de estudio de los Fundamentos de la Matemática, cuestión que escapa de los contenidos del curso.

Las construcciones de $\mathbb{R}$ resultan tediosas y no exentas de dificultad para un alumno de primer curso, por ello han sido eludidas en este curso. Hay dos formas estándar de construir $\mathbb{R}$: una se debe a Dedekind y otra a Cantor. Ambas asumen ya construido con anterioridad el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales. El conjunto $\mathbb{N}$ de números naturales —que en nuestro sistema es algo obtenido a partir del axioma 1.1.1— suele ser, en otros esquemas de desarrollo, el punto de partida para construir sucesivamente el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales y por fin $\mathbb{R}$. En un tal esquema constructivo la axiomática se inicia con $\mathbb{N}$ (o con la teoría de conjuntos) lo cual resulta más natural que el procedimiento usado por nosotros, pero mucho más largo. Pero con independencia del método de construcción utilizado lo que importa son las propiedades de $\mathbb{R}$, como señalamos en la introducción del capítulo, y ésas están claramente definidas en 1.1.1.

En el apéndice del primer capítulo del libro de Rudin [7] puede encontrarse una construcción de $\mathbb{R}$ usando el método de las cortaduras de Dedekind. Y en el apéndice del capítulo 1 del libro de Ortega [1] puede encontrarse una construcción por el método de Cantor, que utiliza el concepto de sucesión de Cauchy, noción ésta que será estudiada en el capítulo siguiente.

En el año 1872 aparecieron, de forma casi simultánea, distintas publicaciones que incluían una construcción de los números reales; estas publicaciones se debían a Georg Cantor (1845–1918), Charles Méray (1835–1911), Richard Dedekind (1831–1916) y Edward Heine (1821–1881).
Dedekind se empezó a preocupar por el problema de los números irracionales y su fundamento, alrededor del año 1858, al enfrentarse a sus clases de análisis. Por ejemplo Dedekind afirma que nunca ha sido establecida con rigor la igualdad $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$.
Es interesante leer algunas frases de este importante matemático, referidas a este tema:

> [...] *sentí más intensamente que nunca antes la ausencia de un fundamento realmente científico para la aritmética.* [...] *Para mí este sentimiento de insatisfacción fue tan fuerte que hice el firme propósito de mantenerme meditando sobre la cuestión hasta encontrar un fundamento puramente aritmético y perfectamente riguroso para los principios del análisis infinitesimal. Se hace muy frecuentemente la afirmación de que el cálculo diferencial trabaja con magnitudes continuas, y todavía no se ha dado una explicación de esta continuidad; incluso las exposiciones más rigurosas del cálculo diferencial no basan sus demostraciones sobre la continuidad sino que, con más o menos consciencia de este hecho, o apelan a nociones geométricas o a las sugeridas por la geometrías, o dependen de teoremas que nunca han sido establecidos de forma puramente aritmética.* [...] *Sólo faltaba pues descubrir su verdadero origen en los elementos de la aritmética y así, al mismo tiempo, conseguir una definición real de la esencia de la continuidad.*

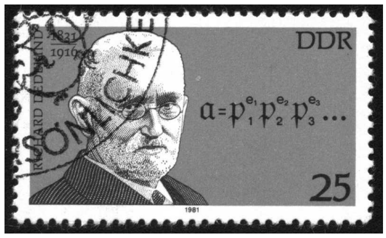
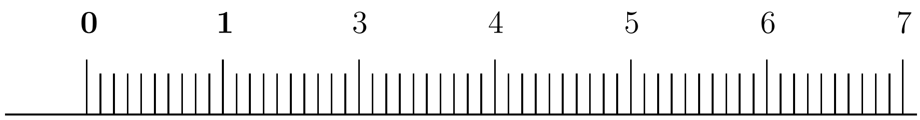


Figura 1.3: Richard Dedekind (1831–1916)

Hasta el momento, para nosotros, los elementos de $\mathbb{R}$ (con excepción de unos cuantos que constituyen lo que hemos llamado $\mathbb{N}$) tienen una naturaleza fantasmagórica, en el sentido de que no podemos representarlos de forma «tangible» (podemos poner símbolos $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$... y escribir formalmente $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ¿pero qué cosa es el número $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, más allá del formalismo?). En la sección 2.8, y apoyado sólo en el axioma 1.1.1, veremos que los números reales pueden ser representados como «expresiones decimales» infinitas en las que únicamente aparecen los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

1.2.4. Representación geométrica de los números reales.

Los números reales pueden ser representados geométricamente como puntos de una recta. A tal fin, fijados dos puntos arbitrarios sobre la recta, se asocia el número 0 al punto de la «izquierda» y el 1 al de la «derecha». A la derecha del punto que corresponde al 1 y a igual distancia que la que existe entre el 0 y el 1 se determina otro punto al que se le asigna el número 2. De igual forma se procede para los números, 3, 4, etc.



Para cada $n \in \mathbb{N}$ el segmento determinado por los puntos 0 y 1 se divide en n partes de igual longitud haciendo corresponder los números reales $1/n, 2/n, \ldots n/n$ a cada uno de los correspondientes puntos en sentido de izquierda a derecha. Para cada $k \in \mathbb{N}$ al número real $k + p/n$ con $p \in \mathbb{N}$ y $0 \leq p < n$ se le hace corresponder el punto de lugar p obtenido al realizar la subdivisión análoga correspondiente en el segmento de extremos k y $k+1$. De ese modo se establece una representación geométrica de los números racionales positivos como puntos de la recta; la relación $x < y$ en el orden de $\mathbb{R}$ se traduce en que el punto asociado a y en la representación geométrica se sitúa a la derecha del asociado a x. Representados los racionales y establecida la significación en la recta del orden en $\mathbb{R}$, el corolario 1.2.18 permite representar geométricamente también los reales que no sean racionales como puntos de esa recta, al menos de forma ideal. Recíprocamente, cualquier punto de la recta, que no corresponda a un racional, cumple que, en el orden de la recta, es mayor que todos los racionales situados a su izquierda, lo cual, utilizando de nuevo el corolario 1.2.18, permite asignarle un único número real como supremo del conjunto de dichos racionales; asignación que es concordante con la realizada anteriormente y permite identificar el conjunto de los números reales positivos con los puntos de la semirrecta de la «derecha». Los reales negativos pueden asignarse, de igual modo, a la semirrecta de la «izquierda». De ese modo se consigue representar geométricamente el conjunto de los números reales.

El concepto de número para los matemáticos griegos se limitaba a los números enteros positivos. Para ellos, una fracción no representaba un número, sino una relación, una razón, entre dos números o entre dos magnitudes. La situación en el marco de los números, en gran parte conocida ya por la temprana escuela pitagórica, junto con uno de los principios fundamentales de esta escuela, según el cual *«la esencia de todas las cosas es explicable en términos de* aritmos*, es decir, de propiedades intrínsecas de los números naturales y de sus razones»*, hizo pensar a los matemáticos griegos que dicha situación era universal. Así, en la geometría, dos longitudes arbitrarias podían ser «medidas» por alguna otra longitud: es decir, existe una longitud que es parte (entera) de cada una de las dos longitudes dadas.

Esta creencia permitía reducir el estudio de la geometría a la aritmética de los números. Las operaciones con números tenían su paralelismo en las magnitudes geométricas: las suma del área (o volumen) de dos figuras era el área de la figura obtenida uniendo ambas figuras; el producto de dos longitudes se asocia al área del rectángulo de lados las longitudes iniciales,… estos procesos son conocidos como el álgebra geométrica de los griegos.

El descubrimiento de los *inconmensurables*, es decir, de pares de magnitudes geométricas para las que no existe esta longitud que «las mide» (como, por ejemplo, el lado y la diagonal de un cuadrado) destruía la anterior creencia y produjo la primera de las grandes crisis en las Matemáticas. En los cimientos de los trabajos pitagóricos estaba la «conmensurabilidad» de dos magnitudes arbitrarias de la misma naturaleza (dos números, dos longitudes, dos áreas). La solución al «escándalo lógico» que supuso el descubrimiento de los inconmensurables, fue dada por Eudoxo de Cnido, alrededor del año 370 a.d.C., mediante la formulación de una definición de proporción, o igualdad entre razones, totalmente independiente de la conmensurabilidad o inconmensurabilidad de las magnitudes a las que se refiere. La importancia de esta teoría de las proporciones es que permitió a la geometría continuar su desarrollo independientemente de toda teoría aritmética: la geometría continuó su desarrollo hacia la solución de problemas que constituirían el germen del cálculo infinitesimal.

Ciertamente esta importancia es también medida por la correspondencia entre la definición de Eudoxo y la definición de números reales que, 2000 años más tarde, daría Richard Dedekind, en lo que hoy se conoce como *cortaduras de Dedekind.* La diferencia entre ambas teorías es quizá sólo planteable a un nivel semántico, ya que mientras que Dedekind perseguía una fundamentación del número real o del continuo, Eudoxo, precisamente, conseguía evitar, para sus fines, la necesidad de un tal sistema de números.

Es conveniente tener presentes estos problemas en el origen de las matemáticas: los número reales, que tanto tiempo y esfuerzo costó precisar, son respuesta no sólo a un problema de cálculo aritmético o algebraico, sino también al problema de la «medida» de magnitudes físicas o geométricas.

1.3. El cuerpo de los números complejos

Al hablar de los números racionales vimos cómo la ecuación $x^2 = 2$ no tenía solución. Dicha ecuación admite una solución en el cuerpo de los números reales, solución que fue denotada con el símbolo $\sqrt{2}$. Determinadas ecuaciones algebraicas, como por ejemplo $x^2 + 1 = 0$, no tienen solución en el cuerpo $\mathbb{R}$.

¿Por qué la ecuación $x^2+1 = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$? Justifique esta afirmación precisando con exactitud qué propiedades de $\mathbb{R}$ es necesario utilizar. ¿Se requiere la existencia del supremo de todo conjunto acotado superiormente?

Para extender $\mathbb{R}$ se introduce un nuevo número que se denota con i, y se denomina *unidad imaginaria*, cuyo cuadrado coincide con -1 y, por tanto hace que ese símbolo i sea solución de la ecuación anterior. Los números complejos son el conjunto de expresiones de la forma $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ con las operaciones de suma y producto formal como si de reales se tratase, con la única consideración de que $i^2 = -1$.

La introducción de un número no real i que satisface la ecuación $x^2 + 1 = 0$ hace posible, lo cual resulta sorprendente y por ello constituye el llamado Teorema Fundamental del Álgebra, demostrar que toda ecuación polinómica de cualquier grado tiene solución (de hecho n soluciones si el grado del polinomio es n), pero esa es una cuestión más complicada que abordaremos en el último capítulo.

Definición 1.3.1

$$\mathbb{C} := \{a + bi; \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

La suma y el producto se definen en $\mathbb{C}$ *mediante las fórmulas*

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &:= (a + c) + (b + d)i \\ (a + bi) \cdot (c + di) &:= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Observe que la definición que se hace de suma y producto sigue las reglas del cálculo formal estándar teniendo en cuenta que $i^2 = -1$ (en particular se hace uso de las propiedades conmutativa y distributiva). Por tanto, como $\mathbb{R}$ es un cuerpo no es sorprendente que $\mathbb{C}$ también lo sea, y así se establece a continuación.

Proposición 1.3.2 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es un cuerpo conmutativo que contiene a* $\mathbb{R}$ *como subcuerpo mediante la identificación* $a \equiv a + 0i$ *para cada* $a \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN: Es una comprobación que el lector puede realizar por sí mismo. Nos limitaremos únicamente a señalar que el neutro de la suma es $0+0i$, el neutro del producto es $1 + 0i$, el opuesto de $a + bi$ es $-a - bi$ y el inverso de $a + bi$ se obtiene como sigue:

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

$\square$

Definición 1.3.3 *Si $z = a + bi$ es un número complejo, con $a, b \in \mathbb{R}$, a se llama la parte real de z y se denota con $a = \mathbb{R}ez$; b se llama la parte imaginaria y se denota con $b = \operatorname{Im} z$. El número real no negativo $|z| := +\sqrt{a^2 + b^2}$ se denomina módulo de z, y el número $\overline{z} := a - bi$ recibe el nombre de complejo conjugado de z.*

Encuentre el error en el siguiente razonamiento.
Afirmamos que no existe ningún número real x tal que

$$\sqrt{1 - x^2} + ix = (\sqrt{10} + 3)i.$$

En efecto, puesto que el número complejo $(\sqrt{10}+3)i$ tiene parte real nula, tenemos que $\sqrt{1 - x^2} = 0$, luego $1 - x^2 = 0$, es decir, $x = \pm 1$. Pero, entonces, la parte imaginaria de $\sqrt{1 - x^2} + ix$ no puede ser igual a $\sqrt{10} + 3$.

En la proposición que sigue se recogen propiedades básicas.

Proposición 1.3.4 *Cualesquiera que sean los números complejos z, w se verifica:*

(1) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$; $\quad \operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$; $\quad |z|^2 = z\overline{z}$.

(2) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$; $\quad \overline{(1/z)} = 1/\overline{z}$ *si* $z \neq 0$.

(3) $z = \overline{z}$ *si y solo si* $z \in \mathbb{R}$.

(4) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$; $\quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

(5) $|zw| = |z||w|$.

(6) $|z + w| \leq |z| + |w|$ *y la igualdad ocurre si y solo si* $w = cz$ *con* $c \geq 0$.

(7) $\Big||z| - |w|\Big| \leq |z - w|$.

(8) $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|$ *para cualesquiera* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ *y cualquier* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Las cinco primeras son comprobaciones directas.
Para (6) observemos que

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re} z\overline{w} \\
&\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|\operatorname{Re} z\overline{w}| \\
&\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \\
&= (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

Para que la igualdad sea cierta debe ocurrir que $z\overline{w}$ sea un real positivo, de donde $w = cz$.

Como en el caso de los números reales (proposición 1.2.20) a partir de (6) se obtienen (7) y (8). □

A las tres últimas propiedades se las conoce por el mismo nombre: *desigualdad triangular*. Este nombre proviene de la propiedad que tienen los triángulos de que la longitud de cualquier lado es menor que la suma de las de los otros dos lados.

Trate de demostrar la equivalencia que afirmamos. En realidad queda muy poco trabajo, ya que hemos probado (6)⇒(7) y (6)⇒(8), sólo falta probar (7)⇒(6) y (8)⇒(6).

A diferencia de lo que ocurre con $\mathbb{R}$ en el cuerpo $\mathbb{C}$ no existe ningún orden total compatible con la estructura algebraica. En efecto, si un tal orden existiera entonces habría de ser o bien $i > 0$ o bien $i < 0$; en el primer supuesto multiplicando por $i > 0$ se tendría $i^2 = -1 > 0$ y en el segundo, al ser $-i > 0$ multiplicando por $-i > 0$ se tendría $(-i)^2 = i^2 = -1 > 0$, llegándose en ambos casos a un absurdo. A pesar de ello, el concepto de conjunto acotado puede ser generalizado a $\mathbb{C}$.

Definición 1.3.5 *Un subconjunto A de $\mathbb{C}$ es acotado si el conjunto $\{|a|;\ a \in A\}$ es acotado superiormente en $\mathbb{R}$.*

Es inmediato observar que esa definición es una extensión de la definición de conjunto acotado en $\mathbb{R}$ pues un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es acotado si y solo si el conjunto formado por los valores absolutos de A es acotado superiormente (un conjunto de números no negativos siempre está acotado inferiormente).

Notación: Por comodidad, en lo sucesivo, utilizaremos el símbolo $\mathbb{K}$ para referirnos indistintamente a los cuerpos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

El valor absoluto en $\mathbb{K}$ permite definir un concepto de distancia entre los elementos de $\mathbb{K}$ por la fórmula

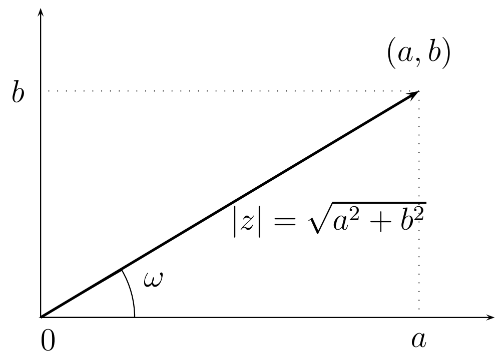
$$d(x, y) = |x - y| \qquad \text{donde } x, y \in \mathbb{K}.$$

1.3.1. Representación geométrica de los complejos

Una vez fijada la recta como un modelo geométrico para los números reales (apartado 1.2.4) es posible fijar el plano como modelo geométrico para el cuerpo de los números complejos. El cuerpo de los complejos, como todo cuerpo, es un espacio vectorial de dimensión uno sobre sí mismo, pero también puede identificarse biyectivamente con el espacio vectorial real 2-dimensional $\mathbb{R}^2$ mediante

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z = a + bi &\longmapsto \phi(a + bi) = (a, b) \end{aligned}$$

La aplicación anterior conserva la suma y el producto por reales, correspondiendo el módulo a la norma euclídea de $\mathbb{R}^2$. Así pues, desde cierta perspectiva, $\mathbb{C}$ puede ser visto como espacio vectorial euclídeo de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$; sin embargo no podemos reducirnos a ella, porque hacerlo sería olvidarnos por completo del producto de complejos, que no tiene un correspondiente natural en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$.



Haciendo uso de recursos conocidos de la enseñanza media[1] el dibujo anterior da pie a escribir

$$a = |z| \cos \omega, \quad b = |z| \operatorname{sen} \omega; \quad \text{y por tanto, } z = |z|(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)$$

Este forma de representar geométricamente a z usando el *módulo* $|z|$ y el *argumento* (ángulo) ω se conoce con el nombre de representación *módulo argumental* del complejo z. A través de ella es fácil establecer la significación geométrica del producto de números complejos, ya que si $z_1 = |z_1|(\cos \omega_1 + i \operatorname{sen} \omega_1)$ y $z_2 = |z_2|(\cos \omega_2 + i \operatorname{sen} \omega_2)$ son dos complejos su producto es

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2|(\cos \omega_1 + i \operatorname{sen} \omega_1)(\cos \omega_2 + i \operatorname{sen} \omega_2) = \\ &= |z_1 z_2| \Big((\cos \omega_1 \cos \omega_2 - \operatorname{sen} \omega_1 \operatorname{sen} \omega_2) + i(\cos \omega_1 \operatorname{sen} \omega_2 + \operatorname{sen} \omega_1 \cos \omega_2) \Big) \\ &= |z_1 z_2|(\cos(\omega_1 + \omega_2) + i \operatorname{sen}(\omega_1 + \omega_2) \qquad (1.2) \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de la proposición 1.3.4 y de fórmulas de la trigonometría elemental. La fórmula (1.2) admite una interpretación geométrica sencilla: el producto de dos complejos es un complejo que tiene por módulo el producto de sus módulos y por argumento la suma de sus argumentos.

Como consecuencia de la fórmula (1.2) resulta que si $z = |z|(\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)$ y n es un número natural se tiene:

$$\frac{1}{z} = |z|^{-1} \Big(\cos(-\omega) + i \operatorname{sen}(-\omega) \Big), \quad z^n = |z|^n \Big(\cos(n\omega) + i \operatorname{sen}(n\omega) \Big)$$

[1] Todas estás fórmulas serán adecuadamente demostradas en el capítulo 8 de forma independiente y sin crear un círculo vicioso con lo que aquí se hace. Pero, por razones pedagógicas, conviene utilizarlas ya en este lugar.

Y esto nos permite establecer que la raíz n-ésima de la unidad en $\mathbb{C}$, $\sqrt[n]{1}$, tiene n valores diferentes y calcular estos valores. En efecto, puesto que

$$1 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0),$$

si el complejo $z = |z|(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$ fuera una raíz n-esima de 1 habría de verificarse que

$$z^n = |z|^n\Big(\cos(n\omega) + i \operatorname{sen}(n\omega)\Big) = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$$

lo cual requiere que $|z| = 1$ y vale cualquier ω que cumpla

$$\cos(n\omega) = \cos 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(n\omega) = \operatorname{sen} 0$$

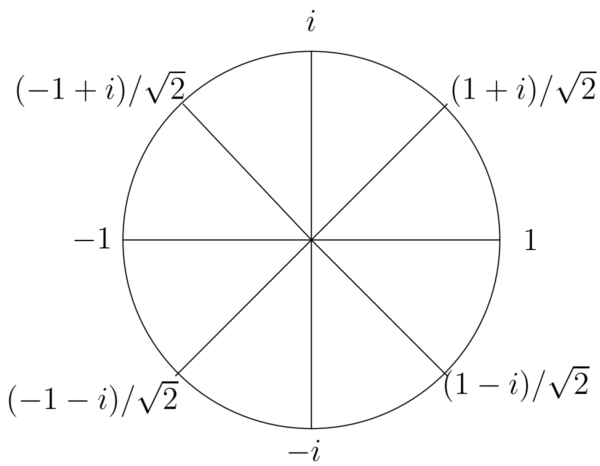
Ciertamente si $\omega = 0$ las ecuaciones anteriores se verifican, pero también se verifican para

$$\omega = \frac{2\pi}{n}, 2\frac{2\pi}{n}, 3\frac{2\pi}{n} \dots (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

en total n complejos diferentes situados en la circunferencia unidad que son los vértices de un polígono regular de n lados, uno de los cuales es

$$z = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1$$

y no hay más, porque $z^n - 1$ es un polinomio de grado n.



Las 8 raíces octavas de la unidad

Si $z = |z|(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$ y buscamos otro número complejo w tal que $w^n = z$, es decir, buscamos una raíz n-ésima, basta escribir w en la forma módulo-argumental $w = |w|(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$, y escribir:

$$z = (\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega) = |w|^n(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^n = |w|^n(\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha))$$

así, debemos tener:

$$|w| = \sqrt[n]{|z|} \quad \text{y} \quad n\alpha = \omega + 2k\pi$$

Por tanto las n raíces n-ésimas de z son los números complejos que tienen por módulo el valor de la raíz n-ésima del módulo de z y por argumentos los valores:

$$\alpha = \frac{\omega}{n}, \frac{\omega + 2\pi}{n}, \frac{\omega + 4\pi}{n}, \frac{\omega + 6\pi}{n}, \dots, \frac{\omega + 2(n-1)\pi}{n}$$

Podemos utilizar MAXIMA para que nos ayude en la tarea del cálculo y representación de las raíces complejas de la unidad. La práctica con MAXIMA resulta interesante no sólo por la contundencia de los gráficos sino también porque utiliza comandos útiles en situaciones muy diferentes.

1.4. Ejercicios

Resueltos

1.4.1 *El número combinatorio* $\binom{n}{m}$ *se define mediante la fórmula*

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}, \qquad \text{donde } n, m \in \mathbb{N} \text{ y } 0 < m \le n$$

siendo $m! = m(m-1)(m-2)\dots 1$*. Así pues, en la fracción que define* $\binom{n}{m}$ *tanto el numerador como el denominador tienen* m *factores; en el denominador el primer factor es* m *y va decreciendo cada vez una unidad, por lo que el último es 1, mientras que en el numerador empiezan en* n *y van decreciendo cada vez una unidad, con lo que el último es* $n - m + 1$*.*

(1) Demuestre que

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \text{ para } 0 < m < n.$$

Por conveniencia, para que la segunda fórmula sea válida también para $m = 0$*, se define*

$$\binom{n}{0} = 1.$$

(2) Demuestre que

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

(3) Demuestre la fórmula del binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

siendo $n \in \mathbb{N}$ *y* $a, b \in \mathbb{K}$*.*

(4) Aplicando la fórmula anterior, deduzca las igualdades:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n, \qquad \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0.$$

SOLUCIÓN:

(1) Es claro que

$$\binom{n}{n} = \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!} = 1 \quad \text{[el numerador tiene } n \text{ factores].}$$

Su pongamos ahora $0 < m < n$ entonces

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!} \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \binom{n}{n-m}\end{aligned}$$

(2) Se obtiene como consecuencia de la siguiente cadena de igualdades.

$$\begin{aligned}&\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(m+1)+1)}{(m+1)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)(m+1)}{(m+1)!} \text{ [reduc. común denom.]} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)(n-m)}{(m+1)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{(m+1)!}(n+1) \text{ [sacar factor común]} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{(m+1)!} \text{ [}m+1\text{ factores]} \\ &= \binom{n+1}{m+1}\end{aligned}$$

(3) La fórmula del binomio de Newton se demuestra por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. Comencemos por ver el significado del sumatorio.

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a^n b^0$$

Para $n = 1$ la fórmula significa

$$(a+b)^1 = \sum_{j=0}^{1} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = b + a$$

y por tanto es cierta.

Aplicando el procedimiento de inducción supongamos que la fórmula también es cierta para n, es decir que se cumple

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} \quad \text{siendo } n \in \mathbb{N} \text{ y } a, b \in \mathbb{K}.$$

Vamos a demostrar, apoyándonos en la fórmula para n (hipótesis de inducción) y haciendo algunos cálculos que la fórmula también es cierta para $n+1$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) \text{ [hipótesis inducción]} \\
&= \Big(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}\Big)(a+b) \text{ [distributiva]} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{j+1} b^{n-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j+1} \text{ [desarrollando]} \\
&= \binom{n}{0} a^1 b^n + \binom{n}{1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^3 b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \\
&+ \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n}{1} a^1 b^n + \binom{n}{2} a^2 b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} a^n b^1 = \\
&\quad \text{[agrupando los de igual potencia]} \\
&= \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \\
&+ \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] a^1 b^n + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] a^2 b^{n-1} + \ldots \\
&+ \cdots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] a^n b^1 + \\
&+ \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \text{ [propiedades de los núm. combinatorios]} \\
&= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^1 b^n + \cdots + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j}
\end{aligned}$$

Lo que prueba que la fórmula

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

es cierta también para $n+1$ y, en consecuencia, aplicando el principio de inducción, es cierta para cualquier número natural n.

Por otra parte

$$(a+b)^n = (b+a)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b^j a^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

lo cual prueba la segunda versión de la fórmula que aparece en el enunciado.

(4) Si en la fórmula

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

hacemos $a = b = 1$ obtenemos

$$2^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$$

y si hacemos $a = 1$ y $b = -1$ obtenemos

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0.$$

¡Se acabó! □

1.4.2 *Sean A y B subconjuntos acotados de números reales estrictamente positivos tales que* $\inf B > 0$.

(1) Sea $1/B := \{1/b; b \in B\}$. Pruebe que $1/B$ está acotado superiormente y que $\sup(1/B) = 1/(\inf B)$.

(2) Sea $A/B := \{a/b; a \in A\ b \in B\}$. Pruebe que A/B está acotado superiormente. ¿Cual es el supremo de A/B? Justifíquelo.

SOLUCIÓN: Pongamos $\beta := \inf B > 0$. De acuerdo con la definición de ínfimo eso equivale a

- $b \geq \beta$ para todo $b \in B$ (β es cota inferior de B)
- si para algún β' se cumple que $b \geq \beta'$ para todo $b \in B$, entonces necesariamente es $\beta' \leq \beta$ (β es la cota inferior más grande para B).

Los supremos vienen caracterizados de forma enteramente análoga cambiando el sentido de las desigualdades.

(1) Pero si $b \geq \beta > 0$ entonces $1/b \leq 1/\beta$ para todo $b \in B$; lo que significa que $1/\beta$ es cota superior del conjunto $1/B$. Vamos a probar que esa cota es la más pequeña entre las cotas superiores de $1/B$, y de ese

modo habremos probado, de acuerdo con la definición de supremo, que $1/\beta$ es el supremo de $1/B$.

Para demostrar esto último procederemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que existiera una cota superior para $1/B$ que llamamos α que cumpla $\alpha < 1/\beta$. Entonces para todo b se tendría

$$1/b \leq \alpha < 1/\beta$$

de donde se obtiene que

$$b \geq 1/\alpha > \beta, \text{ para todo } b \in B$$

y habríamos obtenido así una cota inferior $\beta' = 1/\alpha > \beta$, lo cual contradice la definición de β como ínfimo de B.

(2) Un instante de reflexión muestra que el cociente a/b crece si aumentamos a o disminuimos b (o ambas cosas). Esto nos lleva a la conjetura de que el supremo del conjunto A/B debe ser $\sup A/ \inf B$. Vamos a demostrar que eso es lo que ocurre.

Pongamos $\alpha = \sup A$. Entonces

$$a \leq \alpha \text{ para todo } a \in A; \qquad b \geq \beta \text{ para todo } b \in B$$

por tanto

$$\frac{a}{b} \leq \frac{\alpha}{\beta}, \quad a \in A, b \in B$$

lo que significa que α/β es cota superior de A/B.

Necesitamos probar ahora que es la mínima. Para probarlo utilizaremos de nuevo reducción al absurdo, suponiendo que hay una cota superior $\gamma < \alpha/\beta$ de A/B, siendo necesariamente $\gamma > 0$ (¿por qué?). Entonces se tendría

$$a/b \leq \gamma \quad \text{equivalentemente} \quad a \leq b\gamma \quad a \in A, b \in B.$$

Si tomamos un valor fijo para $b \in B$, pero arbitrario, entonces la ecuación anterior puede interpretarse como que $b\gamma$ es una cota superior de A ya que la acotación es cierta para todos los $a \in A$ y utilizando la definición de supremo eso implica que

$$\alpha \leq b\gamma \quad \text{equivalentemente} \quad \frac{\alpha}{\gamma} \leq b.$$

Donde b ha estado fijo en el razonamiento anterior, pero puede ser cualquiera, lo cual permite interpretar α/γ como una cota inferior de B, pero acudiendo a la definición de ínfimo ello obliga a que

$$\frac{\alpha}{\gamma} \leq \beta \quad \text{equivalentemente} \quad \frac{\alpha}{\beta} \leq \gamma$$

en contra de lo que habíamos supuesto.

Con esto la conjetura está demostrada y el ejercicio acabado. □

1.4.3 *Se dice que un subconjunto T de números reales es denso*[2] *en $\mathbb{R}$ cuando, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, existe un $t \in T$ tal que $x < t < y$.*

Sea $C \subset \mathbb{R}$ un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ (es decir, si $x, y \in C$ entonces $x - y \in C$), $C \neq \{0\}$. Pruebe que entonces:

(1) o bien existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $C = \alpha\mathbb{Z} := \{\alpha n : n \in \mathbb{Z}\}$,

(2) o bien C es denso en $\mathbb{R}$.

SOLUCIÓN: Sea $C^+ = \{x \in C : x > 0\}$. C^+ es no vacío y acotado inferiormente, por tanto podemos considerar $\alpha = \inf C^+$.

Ahora probemos que si $\alpha > 0$ entonces $C = \alpha\mathbb{Z}$. Para ello, en primer lugar, probemos que $\alpha \in C^+$.

Tomemos $\varepsilon > 0$. Según el ejercicio 9, existe $x_1 \in C^+$ tal que $\alpha \leq x_1 < \alpha + \varepsilon$, pero razonando por reducción al absurdo, si $\alpha \notin C^+$, entonces realmente $\alpha < x_1 < \alpha + \varepsilon$. De la misma forma, tomando δ tal que $\alpha + \delta < x_1$, existe $x_2 \in C^+$ tal que $\alpha < x_2 < \alpha + \delta < x_1 < \alpha + \varepsilon$. Por tanto,

$$0 < x_1 - x_2 < \varepsilon$$

y $x_2 - x_1 \in C^+$ por ser positivo y ser C un subgrupo. Así hemos probado que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $c \in C^+$ tal que $0 < c < \varepsilon$, es decir, que $\inf C^+ = 0$, que es una contradicción.

Una vez probado que $\alpha \in C$, por ser C subgrupo, tenemos que $\alpha\mathbb{Z} \subset C$. Ahora debemos probar la igualdad. Supongamos que $\alpha\mathbb{Z}$ está estrictamente contenido en C, es decir, existe $c \in C \setminus \alpha\mathbb{Z}$. Utilizando la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\alpha < c < (n+1)\alpha$ (para ello debemos recurrir también a la existencia de primer elemento de todo subconjunto de $\mathbb{N}$). Entonces $0 < c - n\alpha < \alpha$ y $c - n\alpha \in C^+$, lo que contradice la definición de α.

Si $\alpha = 0$ entonces debemos probar que C es denso en $\mathbb{R}$. Para ello, sean $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Puesto que $\alpha = 0$ existe $c \in C^+$ tal que $0 < c < y - x$. Recurriendo al argumento ya utilizado, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nc < y \leq (n+1)c$. Entonces:

$$nc = (n+1)c - c > y - c > y + x - y = x$$

y así hemos obtenido un elemento $nc \in C$ tal que $x < nc < y$, es decir, C es denso. □

[2] Los corolarios 1.2.13 y 1.2.17 afirman que los números racionales y los números irracionales son densos en $\mathbb{R}$. En el ejercicio 12 de la página 38 se dan otros ejemplos de conjuntos densos en $\mathbb{R}$.

1.4.4 *Sea* $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *una función no decreciente. Pruebe que existe un número real* $x \in [0,1]$ *tal que* $f(x) = x$.
SUG: Razone sobre $\alpha := \sup\{x; f(x) \geq x\}$.

SOLUCIÓN: Se trata de probar que $f(\alpha) = \alpha$.
Si fuera $f(\alpha) - \alpha = \varepsilon > 0$ sería $f(\alpha) - (\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon) > 0$ y al ser f no decreciente también sería $f(\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon) - (\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon) \geq f(\alpha) - (\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon) > 0$ lo que contradice que α sea supremo.
De forma análoga se prueba que $f(\alpha) - \alpha = \varepsilon < 0$ es contradictorio. ¡Verifíquelo! □

1.4.5 *Pruebe que si* a *y* b *son números reales, entonces*

$$|ab| \leq a^2 + b^2.$$

SOLUCIÓN: Como $|ab| = |a||b|$ se trata de probar que

$$|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2.$$

Pero es claro que $|a||b| \leq 2|a||b|$, de modo que si conseguimos probar que

$$2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2$$

la cuestión está resuelta. La desigualdad anterior puede ser reescrita como

$$0 \leq |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| = (|a| - |b|)^2 \text{ [binomio de Newton]}$$

y en el formato

$$0 \leq (|a| - |b|)^2$$

la desigualdad es trivialmente cierta, lo cual acaba la demostración.

Observe que en realidad hemos demostrado algo más fuerte que lo propuesto: se ha demostrado que

$$|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

□

1.4.6 *Resuelva la inecuación siguiente, donde* $x \in \mathbb{R}$*:*

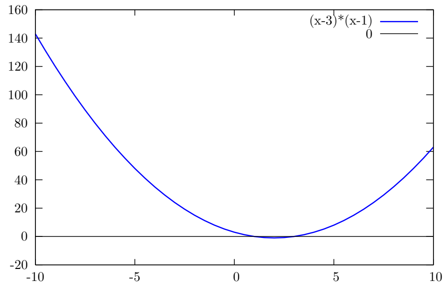
$$(x-1)(x-3) > 0$$

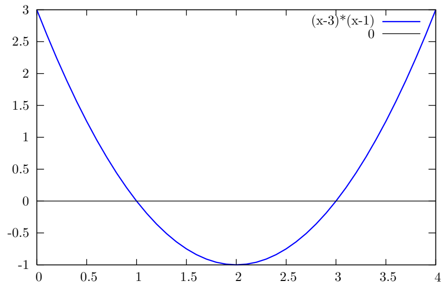
SOLUCIÓN: Obtener la solución de una inecuación consiste en identificar el conjunto de números (en este caso números reales) que verifican la inecuación dada; en concreto se trata, pues, de identificar de forma explícita (más descriptiva) el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x-3) > 0\}.$$

Para abordar este problema podemos considerar que el primer miembro de la inecuación corresponde a la gráfica de una función y queremos saber para qué valores de x la correspondiente gráfica se sitúa por encima del eje OX de ecuación $y = 0$.

Podemos utilizar MAXIMA para realizar las gráficas y de ese modo ayudarnos a resolver la cuestión. Para que MAXIMA dibuje la gráfica de una función es necesario especificar el rango de valores en el que se mueve la variable. Lo razonable es empezar con un rango «amplio» e ir modificándolo, si fuera necesario, hasta concentrarse en la parte significativa.





Aquí hemos utilizado dos gráficas que nos permiten aventurar una respuesta.

```
plot2d( [(x-1)*(x-3),0],[x,-10,10] );
plot2d( [(x-1)*(x-3),0],[x,0,4] );
```

Un razonamiento analítico puede ser como sigue. Para que el producto

$$(x-1)(x-3)$$

sea mayor que cero ambos factores han de ser positivos o bien ambos negativos, es decir, debe ocurrir una de las dos situaciones siguientes:

A) $x - 1 > 0$ y $x - 3 > 0$, ó

B) $x - 1 < 0$ y $x - 3 < 0$.

Las condiciones anteriores pueden formularse, de forma equivalente, como:

A) $x - 3 > 0$ (puesto que si $x > 3$ entonces, a fortiori, $x > 1$), ó

B) $x - 1 < 0$ (puesto que si $x < 1$ entonces, a fortiori, $x < 3$).

El resultado es concordante con el gráfico y obtenemos, finalmente, que la solución de la inecuación propuesta es el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x < 1 \text{ ó } x > 3\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > 3\}$$

$\square$

Ejercicios propuestos

1.1) Discuta la veracidad de las siguientes afirmaciones acerca de números reales

a) $x < y, z < w \Rightarrow xz < yw$
b) $x < y + \varepsilon, \forall\varepsilon > 0 \Rightarrow x \leq y$
c) $(x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$
d) $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$
e) $\varepsilon > 0, x \geq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{x}{m} < \varepsilon \; \forall m \geq n$
f) $x > 0, \varepsilon > 0 \;\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon \leq x < (n+1)\varepsilon$
g) $x > 0, \varepsilon > 0 \;\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon < x \leq (n+1)\varepsilon$
h) $x > 1, y > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : x^n \leq y < x^{n+1}$

1.2) Utilizando el método de inducción pruebe las siguientes afirmaciones:

a) Pruebe que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\sum_{j=0}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) $\sum_{j=0}^{n} j^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$.

d) Dados $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tales que $a_{i+1} = ra_i$, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ (progresión geométrica), se verifica:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{a_0 - ra_n}{1 - r}$$

Deduzca de lo anterior la identidad algebraica (ecuación ciclotómica):

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

e) Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que $a_{i+1} - a_i = d$, para $i = 1, \ldots, n-1$ (progresión aritmética), se verifica:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n\frac{a_1 + a_n}{2}$$

1.3) Pruebe que se cumple la siguiente desigualdad de Bernoulli para todo entero positivo n

$$(1+x)^n > 1 + nx \quad \text{siendo } x \neq 0 \text{ y } -1 < x.$$

1.4) Pruebe por inducción la siguiente desigualdad.

$$(1+\varepsilon)^n < 1 + 3^n\varepsilon \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad 0 < \varepsilon < 1;$$

1.5) Pruebe por inducción que no hay ningún número natural entre 1 y 2.

1.6) Pruebe por inducción las siguientes igualdades

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,[\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x+\cdots+\operatorname{sen}nx]=\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\,\operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,[1+2(\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx)]=\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x$$

1.7) Sea $P(n)$ una propiedad en la que interviene un número natural genérico n, y sea $k\in\mathbb{N}$ un número fijo. Si se cumple que:

a) $P(k)$ es cierta, y

b) $P(n+1)$ es cierta supuesto que $P(n)$ es cierta y que $k\leq n$.

Entonces $P(n)$ es cierta cualquiera que sea el número natural $n\in\mathbb{N}$, $k\leq n$.

1.8) Sean $b_i, 1\leq i\leq n, n>1$, números reales positivos cuyo producto es 1.

a) Demuestre que si no todos los b_i son iguales y se suponen ordenados de forma creciente, $b_1\leq b_2\leq\ldots\leq b_n$, entonces $b_n>1>b_1$.

b) Utilizando inducción en n, pruebe que

$$b_1b_2\ldots b_n \;=\; 1 \;\leq\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}$$

y que sólo se tiene la igualdad cuando todos los b_i son iguales.

c) Deduzca que si $a_i>0, 1\leq i\leq n$, son números reales entonces

$$(a_1a_2\ldots a_n)^{1/n}\;\leq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Sugerencia. Para el apartado b) escríbalo en la forma $n\leq b_1+b_2+\ldots+b_n$. Luego utilice inducción, agrupando los términos primero y último.

1.9) Sea $A\subset\mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente. Sea $\alpha\in\mathbb{R}$. Demuestre que $\alpha=\sup A$ si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

a) α es una cota superior de A;

b) Para cada $\varepsilon>0$ existe $a\in A$ tal que $\alpha-\varepsilon<a\leq\alpha$.

Si A es acotado inferiormente y $\beta\in\mathbb{R}$, demuestre que $\beta=\operatorname{ínf}A$ si y sólo si se verifican:

a) β es una cota inferior de A;

b) Para cada $\varepsilon>0$ existe $a\in A$ tal que $\beta\leq a<\beta+\varepsilon$.

1.10) Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$. Se definen

$$A+B=\{x=a+b : a\in A, b\in B\}, \qquad -A=\{x=-a : a\in A\}.$$

Pruebe que:

a) Si A y B están acotados superiormente entonces también lo están $A\cup B$ y $A+B$ siendo

$$\sup(A\cup B)=\sup\{\sup A, \sup B\} \text{ y } \sup\{A+B\}=\sup A+\sup B.$$

b) Si $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son funciones acotadas entonces

$$\sup\{f(x)+g(x) : x\in\mathbb{R}\}\leq\sup\{f(x) : x\in\mathbb{R}\}+\sup\{g(x) : x\in\mathbb{R}\},$$

y la desigualdad puede ser estricta. Ponga un ejemplo.

c) Enuncie y demuestre resultados análogos para el ínfimo

d) Sea $AB=\{x=ab : a\in A, b\in B\}$ y A,B subconjuntos de $\mathbb{R}$ cuyos elementos son números positivos. Pruebe que

$$\sup AB=\sup A\sup B.$$

e) Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, tales que $A\subset B$. Probad que

$$\sup A\leq\sup B \text{ y } \inf A\geq\inf B$$

1.11) Si a es racional y b es irracional ¿es $a+b$ necesariamente irracional? Si a es irracional y b es irracional ¿es ab necesariamente irracional?

Pruebe que $\sqrt{3}$, y $\sqrt{6}$ irracionales.

Sean $n,m,p\in\mathbb{N}$ tales que $n=mp$. Pruebe si n y m son cuadrados (e.d. $n=a^2$ y $m=b^2$ con $a,b\in\mathbb{N}$), entonces p también es un cuadrado.

Pruebe que $d\in\mathbb{N}$, $\sqrt{d}$ es racional si, y sólo si, $d=k^2$ para algún $k\in\mathbb{N}$.

Pruebe que $\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$ es irracional.

1.12) Pruebe que

a) $T_1=\{r\sqrt{3} : r\in\mathbb{Q}\}$ es denso en $\mathbb{R}$;

b) $T_2=\{m+n\sqrt{3} : m,n \text{ números enteros }\}$ es denso en $\mathbb{R}$;

c) si $T_3=\{m+n\sqrt{2} : m,n \text{ números enteros }\}$, entonces para cualquier $a\in\mathbb{R}$ se cumple $a=\sup\{t :\ t\in T_3, t<a\}$.

INDICACIÓN: Para los apartados 2 y 3 véase el ejercicio 1.4.3.

1.13) Pruebe que $\text{máx}\{x,y\} = \frac{x+y+|y-x|}{2}$ y que $\text{mín}\{x,y\} = \frac{x+y-|y-x|}{2}$. De una fórmula del mismo tipo para $\text{máx}\{x,y,z\}$.

1.14) Demuestre que para cada dos números reales $a > 1 \quad b > 0$ existe un único número entero n tal que $a^n \leq b < a^{n+1}$.

1.15) Pruebe que la función $[x]$ parte entera de x verifica

$$\left[\frac{a}{bc}\right] = \left[\frac{[a/b]}{c}\right] \qquad abc \neq 0 \;\; a,b \in \mathbb{R} \; c \in \mathbb{N}$$

1.16) Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lll} i)\ 5 - x^2 < 8; & ii)\ (x-1)(x-3) > 0; & iii)\ 2^x < 8 \\ iv)\ x + 3^x < 4; & v)\ \frac{2x-1}{3x+2} \leq 1; & vi)\ |ax+b| < c,\ a \neq 0, c > 0. \\ vii)\ \frac{a|x|+1}{x} < 1; & viii)\ x + \mid x \mid < 1; & ix)\ x - \mid x \mid > 2 \end{array}$$

1.17) Sean x e y dos números reales, $x < y$. Pruebe que para cada λ, $0 < \lambda < 1$, se cumple

$$x < \lambda x + (1-\lambda)y < y.$$

Recíprocamente, pruebe que si r es un número real, $x < r < y$, entonces existe un λ, $0 < \lambda < 1$, tal que $r = \lambda x + (1-\lambda)y$.

1.18) Determine $a, b \in \mathbb{R}$ verificando:

$$\frac{7+i}{3+4i} = \frac{a+bi}{4-i}.$$

1.19) Demuestre que $|z+i| = |z-i| \iff z \in \mathbb{R}$.

1.20) Resuelva las ecuaciones siguientes.

$$\begin{array}{ll} 3z^2 + 2z + 4 = 0 & z^2 + (2-2\,i)z + 1 + 2\,i = 0 \\ 5z^2 + 2z + 10 = 0 & z^2 + (-3+2i)z + 5 - i = 0 \\ z^4 - 16 = 0 & z^4 + 16 = 0 \\ y^5 = 4 + 4i & (1+i)z^3 - zi = 0 \end{array}$$

Compruebe que Maxima también sabe resolver esas ecuaciones.

1.21) Exprese los siguientes números complejos en forma binomial.

$$\begin{array}{lllll}
i^5 + i^{19} & 1 + i + i^2 + i^3 & \dfrac{1}{i} & \dfrac{(3-i)^3}{(-1-i)^5} & (1+i)^2 \\
\sqrt[3]{-8} & \dfrac{1}{1+i} & (2+3i)(3-4i) & i^5 + i^{16} & (1+i)^3 \\
\dfrac{2+3i}{2-4i} & i^{175} & (1+i)^{10} & &
\end{array}$$

Compruebe con Maxima los resultados que obtenga por sí mismo.

1.22) Pruebe que para todo número complejo $z = x + y\,i$ con $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|) \leq |z| \leq |x| + |y|.$$

1.23) Si $z, w \in \mathbb{C}$, pruebe que $2(|z+w|^2 + |z-w|^2) = |2z|^2 + |2w|^2$. Interprete geométricamente esta identidad.

Sabiendo que $|z| = 1$, calcule $|1+z|^2 + |1-z|^2$.

1.24) Pruebe que todo número complejo z tal que $|z| = 1$ con $z \neq -1$ se puede representar de la forma $z = \dfrac{1 - a\,i}{1 + a\,i}$, con $a \in \mathbb{R}$.