2

Sucesiones numéricas

Competencias

- Adquirir el significado de límite de una sucesión y saber calcular límites de sucesiones sencillas. Eventualmente con ayuda de Maxima.
- Saber que las sucesiones monótonas acotadas tienen límite y saber utilizar este hecho.
- Conocer el concepto de subsucesión y el teorema de existencia de subsucesiones convergentes en una sucesión acotada.
- Conocer que los conceptos de sucesión de Cauchy y de sucesión convergente son equivalentes. Saber que eso es un instrumento teórico importante para el curso.

Contenidos

Las sucesiones constituyen una de las herramientas más útiles para el Análisis Matemático. En la primera sección de este capítulo se define el concepto de límite de una sucesión de números reales o complejos estudiando las propiedades esenciales. Se demuestra que las sucesiones monótonas acotadas tienen límite, lo que se aplica en particular, a la definición del número e. A continuación se demuestra el principio de Cantor de los intervalos encajados, relacionado con la propiedad de que la recta real es completa (no hay agujeros) y se obtiene el teorema de Bolzano-Weierstrass sobre la existencia de subsucesiones convergentes en cada sucesión acotada. La propiedad de completitud de la recta puede entonces ser reformulada en términos de que las sucesiones de Cauchy de números reales son convergentes. Este resultado y el de Bolzano-Weierstrass constituyen el núcleo esencial del capítulo y se corresponden con las secciones 1 a 4.

En la sección 5 se utilizan las ideas introducidas anteriormente para definir las potencias de base real positiva y exponente real, estudiando sus propiedades. Se ilustra así la potencia de los resultados obtenidos al tiempo que se da un sentido preciso a la función a^x para x un número real, obteniéndose en este contexto general la validez de las «reglas básicas» para operar con potencias.

La secciones 6 y 7 están dedicadas al concepto de «límite infinito» y al establecimiento de ciertas escalas de infinito.

En la sección 8 se estudia la representación de los números reales.

2.1. Convergencia

Una sucesión es una «lista ilimitada» de números

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

donde los subíndices $1, 2, 3, \dots, n$ hace referencia al lugar que ocupa el correspondiente número en la «lista».

Dicho de otro modo (y usando la forma de escribirlo en Maxima) es una lista de parejas $[n, a[n]]$ donde el primer elemento n de la pareja es un número natural que indica la posición en la lista y el segundo $a[n]$ el valor del término n-ésimo de la lista.

Formalmente esa idea se formula en términos de una aplicación de $\mathbb{N}$ en el cuerpo de los reales $\mathbb{R}$ o de los complejos $\mathbb{C}$. Observe que a_i puede ser igual a a_j, para $i \neq j$, de modo que la lista es ilimitada, pero el conjunto imagen $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ puede no ser infinito.

Definición 2.1.1 *Se llama sucesión en* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$ *(representados indistintamente por* $\mathbb{K}$*) a cualquier aplicación* $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$. *Si* $a_n := \phi(n)$ *la sucesión se denota con* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *o brevemente* $(a_n)_n$. *El número real* a_n *recibe el nombre de término general de la sucesión.*

Una sucesión $(a_n)_n$ puede venir dada en términos de una fórmula explícita en términos de n, como ocurre con la sucesión definida por $a_n := 1/n$, pero hay otras formas. Por ejemplo, podemos definir $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ y $a_{n+1} = (a_n + a_{n-1})/2$ para $n > 2$. El término a_{1000} está inequivocamente definido en ambos casos, y eso es lo importante en una sucesión. Usted puede calcularlo fácilmente en el caso de la primera sucesión, pero lo costará un ratito calcularlo en el segundo caso; para Maxima ambas cosas son igualmente inmediatas.

Usando el comando `makelist` es fácil escribir los términos de una sucesión. Aquí se emplea para una sucesión con un fórmula para el término general y para una sucesión «recurrente». El código

```
a[n]:=1/n $ makelist([n,a[n]],n,1,10);
```

construye los diez primeros términos en el primer caso (cambie 10 por cualquier otro número) y la fórmula Maxima en el segundo caso es la siguiente

```
a[1]:0 $ a[2]:1$ a[n]:=a[n-1]+a[n-2]$ makelist([n,a[n]],n,1,30);
```

El segundo de los ejemplos es una muestra de que se conoce con el nombre de *sucesiones recurrentes*. Las sucesiones recurrentes son más frecuentes de lo que a primera vista pudiera parecer. Y muy antiguas: busque en la Wikipedia «Sucesión de Fibonacci». Si realiza la búsqueda anterior podrá encontrar que la sucesión de Fibonacci es la solución a un problema de la cría de conejos y que está emparentada con la sucesión que hemos usado aquí. También encontrará allí que es posible obtener una fórmula para a_n sólo en términos de n, lo cual hace, para usted, más sencillo el cálculo del valor de a_{1000}. También encontrará otras informaciones curiosas relacionadas con esta sucesión.

La fórmula

$$a_n := \begin{cases} 1 & \text{si el nombre en castellano del número } n \text{ contiene la vocal a} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es una sucesión (¿cúales son sus primeros términos?), mientras que

$$a_n := \begin{cases} 1 & \text{si el nombre en castellano del número } n \text{ contiene la vocal a} \\ 2 & \text{si el nombre en castellano del número } n \text{ contiene la vocal e} \\ 0 & \text{en otro caso .} \end{cases}$$

no es una sucesión (¿por qué?).

La definición de límite de una sucesión formaliza la idea intuitiva de que los valores a_n según va avanzando n se van acercando a cierto número real a que se llama el límite de la sucesión.

Antes de dar la definición precisa, algunos ejemplos de sucesiones pueden servir para aproximarnos a la idea de límite, utilizando la lista de los términos y ayudándonos del grafismo.

```
/* Ejemplo 3 */
numer:true$
a[n]:=(1+1/n)^n$
terminos:makelist([n,a[n]],n,1,50);
plot2d([discrete,terminos],
       [style, points],[xlabel,"n"],[ylabel,"a[n]"]);
/* Hay más ejemplos... */
```

Definición 2.1.2

(1) Se dice que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene por límite $a \in \mathbb{K}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $|a_n - a| < \varepsilon$. La notación que se utiliza es la siguiente:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_n a_n.$$

(2) Una sucesión se dice convergente cuando tiene límite.

En el lenguaje de los cuantificadores la condición $\lim_n a_n = a$ se escribe:

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \to |a_n - a| < \varepsilon)$$

Ejemplos 2.1.3 Vamos a ilustrar con algunos ejemplos la definición de límite de una sucesión.

(1) La sucesión constante dada por $a_n := a \in \mathbb{K}$ es convergente y su límite es a. En efecto: para cada $\varepsilon > 0$ dado se cumple que

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) La sucesión dada por $a_n := 1/n$ es convergente y su límite es 0. En efecto: dado $\varepsilon > 0$, se trata de demostrar la existencia de $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para $n > n_0$ se tenga

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Pero como $n > n_0$ se verifica que $1/n < 1/n_0$ y por tanto basta encontrar un n_0 que verifique

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \text{que equivale a} \quad 1 < n_0\varepsilon$$

Tal n_0 existe como consecuencia de la propiedad arquimediana (proposición 1.2.9)

(3) La sucesión dada por

$$a_n := \frac{n}{n^6 + 5n^3 + 2n + 1}$$

tiene límite cero. En efecto: como en el caso anterior, dado $\varepsilon > 0$, se trata de demostrar la existencia de $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para $n > n_0$ se tenga

$$|a_n - 0| = \frac{n}{n^6 + 5n^3 + 2n + 1} < \varepsilon.$$

La situación ahora es más complicada, pero si somos capaces de cambiar $n/(n^6 + 5n^3 + 2n + 1)$ por algo más manejable, que sea mayor que esta expresión, pero menor que ε (a partir de cierto valor de n) habremos conseguido nuestro propósito. Y efectivamente eso es posible ya que se tiene

$$\frac{n}{n^6 + 5n^3 + 2n + 1} < \frac{n}{n^6} = \frac{1}{n^5} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$$

Basta ya conseguir n_0 de modo que

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

cuestión que ya hemos resuelto en el ejemplo anterior.

Si reflexiona un poco sobre el límite anterior, se dará cuenta de las razones que nos han llevado a cambiar el denominador. Para estar seguro de que lo ha entendido, trate de hacer una demostración diferente, pero igualmente rigurosa, cambiando el denominador por otra cosa... ¡hay varias posibilidades!

(4) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{K}$ y $a = \lim_n a_n$, entonces se cumple que $|a| = \lim_n |a_n|$. En efecto: fijado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a - a_n| < \varepsilon$ si $n > n_0$; pero por la proposición 1.2.20 se tiene

$$\Big| |a| - |a_n| \Big| \leq |a - a_n| < \varepsilon \qquad \text{si } n > n_0,$$

lo que permite concluir $|a| = \lim_n |a_n|$.

(5) Si $a_n > 0$ para todo n y existe $a = \lim_n a_n$ entonces $\lim_n \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. En efecto: supongamos inicialmente que $a > 0$, entonces fijado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a - a_n| < \sqrt{a}\varepsilon$ si $n > n_0$; pero por otra parte se tiene la siguiente estimación

$$\begin{aligned} |\sqrt{a} - \sqrt{a_n}| &= \frac{|a - a_n|}{\sqrt{a} + \sqrt{a_n}} \\ &\leq \frac{|a - a_n|}{\sqrt{a}} \\ &< \frac{\sqrt{a}\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon \end{aligned}$$

si $n > n_0$, que demuestra precisamente que, en este caso, $\lim_n \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. Queda como ejercicio para el lector hacer la demostración en el caso $a = 0$.

La idea de la prueba anterior es eliminar las raíces cuadradas para hacer aparecer la diferencia $|a - a_n|$; para conseguirlo se multiplica numerador y denominador por $\sqrt{a} + \sqrt{a_n}$. La misma idea puede servir para otros casos, pero ¿por qué expresión habría que multiplicar para hacer algo análogo si fuera una raíz cúbica, cuarta...? La ecuación ciclotómica (ejercicio 1.2 pág. 36) es una buena pista. Trate de aprovecharla para demostrar una versión más general del ejemplo anterior que afirma: «fijado cualquier $k \in \mathbb{N}$, si $a_n > 0$ para todo n y existe $a = \lim_n a_n$ entonces $\lim_n \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$».

(6) Si $r \in \mathbb{K}$ y $|r| < 1$ entonces la sucesión $(a_n)_n$ donde $a_n := r^n$ tiene límite 0. En efecto: pongamos $\rho = |r|$ y sea $b > 0$ tal que $\rho = 1/(1+b)$, entonces, usando la desigualdad de Bernoulli (ejercicio 1.3, pág. 36) se tiene la estimación

$$|a_n - 0| = |r^n| = |r|^n = \rho^n = \frac{1}{(1+b)^n} < \frac{1}{1+nb} < \frac{1}{n}$$

que conduce ya de forma inmediata a la conclusión.

(7) La sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde

$$z_n = \frac{1}{n} + \frac{n}{n+1} i$$

tiene por límite i. En efecto: la estimación

$$\left|\left(\frac{1}{n} + \frac{n}{n+1} i\right) - i\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} i\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{2}{n}$$

y los ejemplos anteriores permiten concluir que fijado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ se verifica $|z_n - i| < \varepsilon$.

(8) Una *progresión geométrica* de razón r es una sucesión $(a_n)_n$ en $\mathbb{K}$ donde a_1 es un elemento arbitrario de $\mathbb{K}$ y $a_n := a_1 r^{n-1}$ para $n > 1$. Nuestro interés aquí es sumar los infinitos términos de una tal progresión en la que $|r| < 1$.

MAXIMA sabe hacer la suma de una progresión geométrica finita. Y también sabe hacer la suma una progresión geométrica infinita, pero en tal caso necesita saber que el $|r| < 1$.

```
a[n]:=a*r^(n-1);
sum(a[k],k,1,n),simpsum;
assume(abs(r)<1)$ sum(a[k],k,1,inf),simpsum;
```

También es posible llegar a las mismas conclusiones sin la ayuda de MAXIMA. Comenzamos calculando una expresión para la suma de los n primeros términos, es decir, una expresión para

$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Para ello escribimos S_n, rS_n y restamos las dos expresiones, es decir:

$$\begin{aligned} S_n =& a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 r + a_2 r + \cdots + a_{n-1} r \\ rS_n =& a_1 r + a_2 r + a_3 r + \cdots + a_{n-1} r + a_n r \\ S_n(1-r) = S_n - rS_n =& a_1 - a_n r \end{aligned}$$

Así obtenemos:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r} = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$$

(expresión que suele ser recordada con una especie de slogan: *la suma de los n términos de una progresión geométrica es igual al primero menos el último por la razón dividido por 1 menos la razón*).

Ahora la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica coincide con

$$\lim_n S_n = \lim_n \frac{a_1 - a_n r}{1-r} = \frac{a_1 - \lim_n a_1 r^{n-1} r}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

debido a que $\lim_n r^n = 0$, como vimos en el ejemplo 6 anterior.

Esta suma de infinitos términos (concebida como límite de una sucesión) es un recurso muy frecuente y útil en el análisis matemático. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión, podemos definir la sucesión

$$S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

denominada la sucesión de las sumas parciales de la sucesión inicial. Entonces, si existe el límite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene sentido escribir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\longrightarrow\infty} S_n$$

y denominar a esta cantidad «suma infinita». Los objetos así obtenidos, es decir, las expresiones del tipo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

son denominados *series numéricas* (series de números o, simplemente, series) y son tan importantes que dedicaremos gran parte del capítulo 7 a ellas.

Llamamos la atención sobre el hecho de que estos ejemplos no proporcionan una técnica de cálculo de límites, sino que únicamente demuestran que «cierto candidato», que razonablemente parece ser límite, efectivamente lo es.

En el capítulo 4 desarrollaremos técnicas para el cálculo efectivo de límites. Pero apoyandonos en MAXIMA, que conoce tales técnicas aunque no sepa demostrar nada, podemos anticiparnos y calcular ya límites de algunas sucesiones. La sintaxis para calcular límites con MAXIMA es muy sencilla y los siguientes ejemplos ayudarán a comprenderla y utilizarla. Pero sea precavido y compruebe que el resultado es razonable.

```
limit(1/n,n,inf);
kill(all)$ assume(abs(r)<1)$ limit(r^n, n, inf);
```

El concepto que sigue es útil para muchos fines y, en particular, para «visualizar» el concepto de límite, como luego veremos.

Definición 2.1.4 *Si $a \leq b$ son números reales:*

- *Se llama intervalo cerrado de extremos a, b al conjunto*
$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}.$$
- *Se llama intervalo abierto de extremos a, b al conjunto*
$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}.$$
- *Los conjuntos $[a,b)$ y $(a,b]$ reciben el nombre de intervalos semiabiertos por la derecha e izquierda respectivamente:*
$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\} \quad (a,b] := \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$$
- *Se llama longitud del intervalo al número real $b - a$.*

Conectado con estos conceptos está la noción de bola de centro x_0 y radio $r > 0$.

Definición 2.1.5

(1) Se llama bola cerrada de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B[x_0, r]$ al conjunto $B[x_0, r] := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| \leq r\}$.

(2) Se llama bola abierta de centro x_0 y radio $r > 0$ y se denota con $B(x_0, r)$ al conjunto $B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{K};\ |x - x_0| < r\}$.

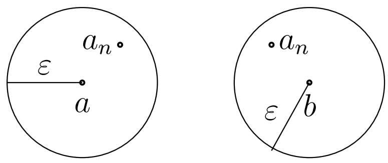
Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es claro que $B(x,r) = (x - r, x + r)$ y $B[x,r] = [x - r, x + r]$.

Obsérvese que, utilizando estos conceptos, el que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tenga límite a puede expresarse diciendo que para cualquier $\varepsilon > 0$ la bola abierta $B(a, \varepsilon)$ contiene a todos los términos de la sucesión $(a_n)_n$ salvo, a lo más, un número finito.

Un primer hecho que se deduce de forma inmediata de la definición (especialmente a través de la visualización con bolas) es el siguiente.

Proposición 2.1.6 *El límite de una sucesión convergente es único.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos, por reducción al absurdo, que la sucesión $(a_n)_n$ tuviera dos límites distintos, digamos $a \neq b$.



Sea $\varepsilon = |a-b|/4 > 0$. Entonces, de acuerdo con la definición, existen números naturales n_1 y n_2 para los que se verifica que
$|a_n - a| < \varepsilon$ si $n > n_1$ y $|a_n - b| < \varepsilon$ si $n > n_2$
así pues, llamando $n_0 := \text{máx}\{n_1, n_2\}$ se debe cumplir que

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ si } n > n_0 \qquad \text{y} \qquad |a_n - b| < \varepsilon \text{ si } n > n_0$$

De donde se deduce que si $n > n_0$ ha de ser

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\frac{|a-b|}{4} = \frac{|a-b|}{2}$$

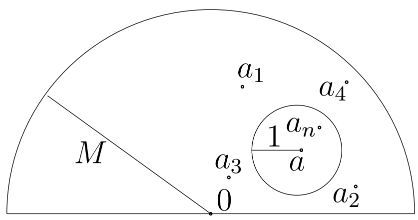
y por tanto que $1 < \frac{1}{2}$, lo cual no es cierto. □

Una sucesión se dice acotada si su imagen, es decir el conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, es un conjunto acotado de $\mathbb{R}$. De nuevo la visualización con bolas permite construir de forma sencilla una demostración de la proposición que sigue.

Proposición 2.1.7 *Las sucesiones convergentes de* $\mathbb{K}$ *son acotadas.*

Demostración: Sea una sucesión convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con límite a. Aplicando la definición con $\varepsilon = 1$ podemos garantizar la existencia de un número natural n_0 tal que si $n > n_0$ se cumple $|a_n - a| < 1$ y por tanto

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$



Llamando

$$M := \text{máx}\{|a_1|, |a_2|, \ldots |a_{n_0}|, (1 + |a|)\}$$

se cumple que

$$|a_n| \leq M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

es decir, la sucesión $(a_n)_n$ es acotada. □

El recíproco no es cierto y la sucesión $(x_n)_n$ definida por $x_n = (-1)^n$ es un ejemplo.

Un hecho que simplifica mucho las cosas es que la convergencia en $\mathbb{C}$ puede reducirse a la convergencia en $\mathbb{R}$.

Proposición 2.1.8 *Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y sea $z_n = a_n + ib_n$ donde a_n y b_n son, respectivamente, la parte real e imaginaria del complejo z_n.*

(1) Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite $z = a + bi$, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite a y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite b.

(2) Recíprocamente, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite a y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite b, entonces $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite $a + bi$.

Demostración: Se basa en las estimaciones

$$|a - a_n| \leq |z - z_n| \leq |a - a_n| + |b - b_n|.$$

a partir de los cuales el lector podrá fácilmente completar los detalles. □

Trate de realizar con detalle la demostración anterior. En primer lugar hay que justificar por qué las desigualdades anteriores son ciertas. Y a continuación establecer la equivalencia. No es difícil y representa un ejercicio de manejo del valor absoluto que conviene realizar como entrenamiento. Si lo acaba entendiendo bien, tendrá mucho camino realizado para comprender las demostraciones que vienen más adelante. Si no lo consigue hacer ahora, vuelva a intentarlo después de haber entendido la demostración de la proposición 2.1.9... ¡Seguro que entonces lo conseguirá!

En la proposición siguiente establecemos el comportamiento de las sucesiones convergentes con relación a las operaciones ordinarias.

Proposición 2.1.9 *Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ sucesiones convergentes en $\mathbb{K}$ con límites a y b, respectivamente. Entonces:*

(1) $(a_n + b_n)_n$ es una sucesión convergente con límite $a + b$.

(2) $(a_n b_n)_n$ es una sucesión convergente con límite ab.

(3) Si $b_n \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces la sucesión $(a_n/b_n)_n$ tiene por límite a/b.

Demostración: La del primer apartado es muy sencilla. Dado $\varepsilon > 0$ existen enteros positivos n_1 y n_2 tales que se tiene

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } n > n_1 \quad \text{y} \quad |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } n > n_2.$$

Llamando $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$ se tiene

$$|(a + b) - (a_n + b_n)| \leq |a - a_n| + |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ para cada } n > n_0,$$

lo que prueba que $a + b = \text{lím}_n (a_n + b_n)$.

Veamos el segundo apartado. Comencemos observando que por ser $(a_n)_n$ una sucesión convergente, de acuerdo con la proposición inmediatamente anterior, existe $\alpha > 0$ tal que $|a_n| \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, se tiene:

$$\begin{aligned}|ab - a_n b_n| &= |ab - a_n b + a_n b - a_n b_n| \\ &= |(a - a_n)b + a_n(b - b_n)| \\ &\leq |a - a_n||b| + |a_n||b - b_n| \\ &\leq |a - a_n||b| + \alpha|b - b_n|\end{aligned}$$

Pero como $a = \lim_n a_n$ y $b = \lim_n b_n$, fijado $\varepsilon > 0$ existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que

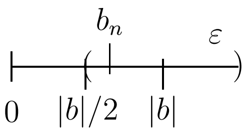
$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}, \text{ si } n > n_1 \quad \text{y} \quad |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}, \text{ si } n > n_2.$$

De donde se sigue

$$\begin{aligned}|ab - a_n b_n| &\leq |a - a_n||b| + \alpha|b - b_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}|b| + \alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

siempre que $n > n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Esto prueba que $\lim_n a_n b_n = ab$.

¿No le parece un poco raro tomar $\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$? Hubiera sido más natural tomar sólo $\frac{\varepsilon}{2|b|}$, como se ha hecho en el segundo sumando. Si se hubiera hecho así la demostración sería incorrecta. Explique por qué.



El último apartado utiliza las mismas ideas del apartado anterior, sólo que, ahora, hemos de considerar una acotación inferior para la sucesión $(|b_n|)_n$ en lugar de una acotación superior. Puesto que $b \neq 0$ y $|b| = \lim_n |b_n|$, sin más que aplicar la definición de límite con $\varepsilon = |b|/2$ existe un número natural n_1 tal que se tiene

$$\alpha := \frac{|b|}{2} < |b_n|, \text{ para } n > n_1.$$

Por otra parte, si $n > n_1$, se tienen las acotaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n}\right| &= \frac{|ab_n - a_n b|}{|b||b_n|} \\ &= \frac{|ab_n - ab + ab - a_n b|}{|b||b_n|} \\ &\leq \frac{|a||b_n - b| + |a - a_n||b|}{|b||b_n|} \\ &\leq \frac{|a||b_n - b| + |a - a_n||b|}{|b|\alpha}\end{aligned}$$

Ahora, fijado $\varepsilon > 0$ existen números naturales n_2, n_3 tales que

$$|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}|b|\alpha, \text{ si } n > n_2 \quad \text{y} \quad |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2|b|}|b|\alpha, \text{ si } n > n_3.$$

Si ahora llamamos $n_0 := \text{máx}\{n_1, n_2, n_3\}$ se cumple que

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n}\right| \leq \frac{|a||b_n - b| + |a - a_n||b|}{|b|\alpha} < |a|\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} + |b|\frac{\varepsilon}{2|b|} < \varepsilon$$

para $n > n_0$, lo que acaba la demostración del tercer apartado. □

Observación 2.1.10 Fíjese que en la demostración anterior, al igual que en los ejemplos 2.1.3, hemos utilizado la definición de límite con expresiones de ε muy especiales. Por ejemplo:

(1) en el caso de $\text{lím}_n(a_n + b_n)$, para $\varepsilon > 0$ dado, utilizamos las afirmaciones $\text{lím}_n a_n = a$ y $\text{lím}_n b_n = b$ tomando $\varepsilon/2$;

(2) en el caso del producto la elección es aún más complicada: para ε dado aplicamos la noción de límite con los valores modificados

$$\frac{\varepsilon}{2(|b|+1)} \quad \text{y} \quad \frac{\varepsilon}{2\alpha};$$

(3) en el caso del cociente, elegimos

$$\frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}|b|\alpha \quad \text{y} \quad \frac{\varepsilon}{2}\alpha.$$

Es fácil darse cuenta de que estas elecciones complicadas tienen como objetivo obtener la conclusión sobre el nuevo límite (de la suma, el producto o el cociente) con un ε «todo bonito»; por ejemplo, en el caso del cociente, hemos concluido que, fijado $\varepsilon > 0$, para $n \geq n_0 := \text{máx}\{n_1, n_2, n_3\}$ se tiene

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon$$

Sin embargo tales elecciones complicadas son innecesarias. En efecto, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión, $l \in \mathbb{R}$ y demostramos que, para cierto número $M > 0$ fijo, y para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se verifica $|a_n - l| < M\varepsilon$, entonces hemos demostrado que $\text{lím}_n a_n = l$.

Esto es sencillo de verificar: si suponemos cierto lo anterior, fijamos $\varepsilon > 0$, y aplicamos lo demostrado para $\varepsilon' := \varepsilon/M$, entonces existirá $n_0' \in \mathbb{N}$ (posiblemente distinto de n_0, puesto que el valor de éste depende del ε elegido), tal que si $n \geq n_0'$, entonces $|a_n - l| < M\varepsilon' = \varepsilon$. Lo esencial, naturalmente, es que M debe ser una cantidad fija, independiente de n.

Por ejemplo, veamos qué obtenemos en el caso del producto de la proposición anterior, sin ninguna elección especial. Fijemos $\varepsilon > 0$, puesto que $\lim a_n = a$ y $\lim_n b_n = b$, existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que:

$$|a - a_n| < \varepsilon, \text{ si } n > n_1 \quad \text{y} \quad |b - b_n| < \varepsilon, \text{ si } n > n_2,$$

de donde obtenemos:

$$|a_n b_n - ab| < |b|\varepsilon + \alpha\varepsilon = (|b| + \alpha)\varepsilon$$

siempre que $n > n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Esto es, se verifica $\lim_n a_n b_n = ab$. Así acaba esta larga observación.

La idea de la proposición anterior es obtener el límite de una sucesión construida a partir de otras utilizando para ello los límites de las sucesiones que sirven para construirla. Los casos considerados en la proposición no son los únicos y la misma estrategia se utiliza, como más adelante veremos, en otras situaciones.

Observe que en la proposición anterior, antes de hacer la suma, el producto, etc. se supone que los límites de las sucesiones que aparecen existen. Sin embargo, la existencia del límite de la suma no implica la existencia del límite de los sumandos; y otro tanto ocurre con el producto o el cociente. Busque ejemplos que corroboren esta afirmación.

Proposición 2.1.11 *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes de números reales con límites a y b respectivamente.*

(1) Si $a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se verifica que $a \leq b$.

(2) Si $a < b$, entonces se verifica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < b_n$ para todo $n > n_0$.

(3) Si $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ y $(c_n)_n$ son sucesiones de números reales tales que

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

y $\lim_n a_n = \lim_n b_n = \alpha$, entonces $\lim_n c_n = \alpha$ (regla del sandwich).

Demostración: Para el primer apartado supongamos, por reducción al absurdo, que fuera $a > b$. Tomando $\varepsilon := (a - b)/4$ debería existir n_0 tal que para $n > n_0$ se cumpliría

$$|a - a_n| < \varepsilon \text{ y } |b - b_n| < \varepsilon$$

con lo cual se tendría, siempre para $n > n_0$,

$$b_n = b_n - b + b \leq |b_n - b| + b < \varepsilon + b < a - \varepsilon < a_n, \text{ pues } 2\varepsilon < a - b,$$

y esto contradice la hipótesis $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para la segunda parte elijamos un $\varepsilon > 0$ de tal forma que $a+\varepsilon < b-\varepsilon$; entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ tenemos $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ y $b_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, por lo que $a_n < b_n$ si $n \geq n_0$.

Finalmente para la tercera parte observemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ los puntos a_n y b_n pertenecen a la bola $B(\alpha, \varepsilon)$ y al ser $a_n \leq c_n \leq b_n$ también se tiene que $c_n \in B(\alpha, \varepsilon)$, pero eso es lo mismo que decir que $|\alpha - c_n| < \varepsilon$ para $n > n_0$. En otras palabras, $\lim_n c_n = \alpha$. $\square$

Ejemplo 2.1.12 Sea $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Sea $x \in \mathbb{R}_+$ y sea $[x]$ la parte entera de x. Calculemos el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[x] + [2x] + \cdots + [nx]}{n^2}.$$

Comencemos observando que como $[x] \leq x \leq [x] + 1$ se tiene $x - 1 < [x] \leq x$ y análogamente $kx - 1 < [kx] \leq kx$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ de donde, sumando y dividiendo por n^2 se tiene

$$\frac{(1 + 2 + \cdots + n)x - n}{n^2} < \frac{[x] + [2x] + \cdots + [nx]}{n^2} \leq \frac{(1 + 2 + \cdots + n)x}{n^2}.$$

Pero como $1 + 2 + \cdots + n = (1 + n)n/2$, por ser una progresión aritmética[1], se obtiene finalmente que el límite buscado es $x/2$.

2.2. Sucesiones monótonas acotadas

Hemos introducido la noción de sucesión convergente, pero si nos dan una sucesión ¿cómo podemos saber si es convergente? ¿cómo calcular su límite? En general, la respuesta a estas preguntas es complicada y a lo largo del capítulo iremos dando respuestas parciales; no obstante para algunos tipos particulares de sucesiones, como las consideradas en la proposición 2.2.2, la respuesta es sencilla.

Definición 2.2.1 *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$.*

(1) Se dice que la sucesión es monótona creciente o simplemente creciente si $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(2) Se dice que la sucesión es monótona decreciente o simplemente decreciente si $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

[1] Una progresión aritmética es una lista ordenada de números en la que cada término se obtiene sumando al anterior una cantidad fija. Si una tal progresión tiene n términos, es fácil percatarse de que la suma del primero y el último, $a_1 + a_n$, coincide con la suma del segundo y el penúltimo, $a_2 + a_{n-1}$ y lo mismo es cierto con $a_3 + a_{n-2}$ etc. En consecuencia, agrupando de ese modo se obtiene que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}$

(3) Se dice que la sucesión es monótona si es creciente o decreciente.

Proposición 2.2.2 *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona de números reales.*

(1) Si la sucesión es creciente y acotada superiormente entonces es convergente siendo su límite el número real $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(2) Si la sucesión es decreciente y acotada inferiormente entonces es convergente siendo su límite el número real $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

DEMOSTRACIÓN: Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente acotada superiormente, entonces existe el supremo del conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ que denotaremos con a. Se verifica que $a = \lim_n a_n$. En efecto: fijado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < a_{n_0}$ (según el ejercicio 9 del capítulo 1) y al ser $(a_n)_n$ una sucesión monótona creciente para cada $n > n_0$ se tiene

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon,$$

lo cual significa que $a = \lim_n a_n$.

El caso de sucesiones monótonas decrecientes es análogo. □

Escriba los detalles de la prueba en el caso de sucesiones monótonas decrecientes. Hágalo de dos maneras: 1) modificando adecuadamente la demostración del caso creciente y 2) utilizando una astucia que permita reducir la nueva situación a la anterior (ya resuelta).

Ejemplo 2.2.3 Vamos a calcular el límite de la sucesión $(a_n)_n$ definida recurrentemente por las fórmulas

$$a_1 = \sqrt{2} \quad , \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Para ello observamos que $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$, lo que induce a pensar que la sucesión $(a_n)_n$ así definida es monótona creciente, como de hecho ocurre. Vamos a probarlo por inducción sobre n. Es claro que $a_1 < a_2$. Supongamos ahora que $a_{n-1} < a_n$, en cuyo caso $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} < \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1}$. El método de inducción (corolario 1.2.3) permite concluir que la sucesión $(a_n)_n$ es estrictamente creciente.

Además la sucesión está acotada por 2. Esto también se prueba por inducción sobre n. Es claro que $a_1 \leq 2$ y supuesto que $a_n \leq 2$ se tiene que $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2+2} = 2$.

Aplicando ahora la proposición 2.2.2 se obtiene que la sucesión $(a_n)_n$ converge. Llamemos a al límite de dicha sucesión. Tomando límites (y teniendo en cuenta el ejemplo 5 en la página 45) se tiene la siguiente ecuación

$$\lim_n a_{n+1} = \sqrt{2 + \lim_n a_n}, \text{ es decir } a = \sqrt{2 + a},$$

o, si se prefiere, $a^2 = 2 + a$. Esta ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, pero únicamente la solución $a = 2$ puede ser el límite de la sucesión considerada, de modo que, finalmente $\lim_n a_n = 2$.

Aunque sin el rigor del razonamiento anterior, MAXIMA nos permite «calcular» el límite de la sucesión recurrente anterior

```
a[1]:sqrt(2)$ a[n]:=sqrt(2+a[n-1]);
makelist([n,float(a[n])],n,1,20);
```

Hemos afirmado en el párrafo anterior que sólo la solución $a = 2$ de la ecuación $a^2 = 2 + a$ puede ser el límite de la sucesión. ¿Cuál es la otra solución de la ecuación? ¿por qué no puede ser límite de la sucesión?

Corolario 2.2.4 *(1) La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es monótona creciente y acotada.

(2) La sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

es monótona decreciente y acotada.

(3) Las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ anteriores tienen el mismo límite, cuyo valor se denota con e.

(4) Además el número e también es el límite de la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

(5) El número real e es irracional.

DEMOSTRACIÓN: De la desigualdad de Bernoulli (ejercicio 1.3 pág. 36)

$$(1+x)^n > 1 + nx \text{ para } x \neq 0 \text{ y } -1 < x$$

se tiene para $n > 1$,

$$\frac{a_n}{b_{n-1}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - n\frac{1}{n^2} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1}$$

y por tanto $a_n > b_{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1} = a_{n-1}$.

Análogamente

$$\frac{b_{n-1}}{a_n} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n > 1+n\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{n}.$$

y por tanto $b_{n-1} > a_n(1+\frac{1}{n}) = b_n$. Además $2 = a_1 < a_n < b_n < b_1 = 4$ por lo que ambas convergen, al ser sucesiones monótonas acotadas. Pero siendo $b_n = (1+\frac{1}{n})a_n$ se concluye que ambas sucesiones convergen hacia un mismo límite que denotaremos con e. Esto acaba la prueba de los tres primeros apartados. Veamos ahora el cuarto apartado. En primer lugar, desarrollamos según el binomio de Newton, para obtener:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \frac{1}{n}\binom{n}{1} + \frac{1}{n^2}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n^{n-1}}\binom{n}{n-1} + \frac{1}{n^n}\binom{n}{n}$$

y observamos que, para $1 \leq k \leq n$, tenemos:

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

Entonces

$$\begin{aligned} a_n &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = S_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3 \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

La sucesión $(S_n)_n$ es convergente ya que es creciente y acotada superiormente. Además, para cada m fijo, si $n > m$ se tiene:

$$\begin{aligned} a_n &= 1+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &> 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right) \end{aligned}$$

y tomando limites en n se concluye $e = \text{lím}_n\, a_n \geq S_m$ para todo m. Así pues, $a_n \leq S_n \leq e$ y de la proposición 2.1.11 se sigue finalmente que $\text{lím}_n S_n = e$.

Para probar que e es irracional procedemos por reducción al absurdo. Observemos en primer lugar que

$$e - S_n = \lim_{p\to\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \lim_{p}\sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k!}$$

Pero sustituyendo $(n+1),(n+2),\ldots(n+k)$ por $(n+1)$ obtenemos la estimación

$$\sum_{k=n+1}^{n+q}\frac{1}{k!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} < \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{(n+1)^k}$$

Entonces, usando la fórmula de la suma de una progresión geométrica, se tiene la siguiente acotación:

$$e - S_n = \lim_{q\to\infty} \sum_{k=n+1}^{n+q} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{n!} \lim_{q} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n!} \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!}\frac{1}{n}$$

Si fuera $e = \frac{p}{q}$, tomando $n = q$ en la estimación anterior se tendría

$$0 < \frac{p}{q} - S_q < \frac{1}{q!q}$$

y multiplicando por $q!$ obtendríamos

$$0 < q!\frac{p}{q} - q!S_q < \frac{1}{q}$$

pero siendo $q!\frac{p}{q}$ y $q!S_q$ números naturales se seguiría que existe un entero positivo menor que 1. Esto prueba que e no es un número racional. □

Veamos la lista con los «primeros» términos de la sucesión `a[n]:=(1+1/n)^n` (50 en este caso) que nos permite encontrar el valor de los primeros decimales del límite

```
a[n]:=(1+1/n)^n;   makelist(float(a[n]),n,1,50);
```

Maxima sabe bien que el valor de ese límite define uno de los números más importantes de las matemáticas: el número e

```
limit(a[n],n,inf);
```

Compruebe numéricamente que las sucesiones $(b_n)_n$ y $(S_n)_n$ también tienen el mismo límite.

2.3. Teorema de Bolzano-Weierstrass

La siguiente propiedad de los intervalos encajados está fuertemente relacionada con la «completitud» de $\mathbb{R}$, es decir con el hecho de que en la recta real no hay agujeros.

Proposición 2.3.1 (Principio de encaje de Cantor) *Sea* $\{(I_n)_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ *una sucesión de intervalos cerrados de* $\mathbb{R}$ *tales que:*

(1) $I_{n+1} \subset I_n$*;*

(2) la longitud de I_n *tiene por límite cero.*

Entonces existe un único número real común a todos los intervalos.

Figura 2.1: Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (St Petersburg, 1845 – Halle, 1918). Cantor es el fundador de la teoría de conjuntos e introdujo el concepto de cardinal infinito. Realizó progresos en el estudio de las series trigonométricas.

Demostración: Sea $I_n := [a_n, b_n]$. Entonces para cualquier $k \in \mathbb{N}$, b_k es una cota superior de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ya que por ser la sucesión de intervalos encajados, tenemos, para todo $n \geq k$:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq b_k.$$

Así, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente acotada superiormente, por lo que es convergente. Si $a := \lim_n a_n$ entonces se cumple $a \leq b_k$ para todo k y, como $a_k \leq a \leq b_k$ para todo k se obtiene que $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, en particular la intersección anterior es no vacía. Por otra parte si suponemos que existen α y β, con $\alpha < \beta$ y $\alpha, \beta \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, tendríamos que el $[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$; pero esto no es posible, ya que en ese caso la longitud de todos los I_n sería mayor o igual que la longitud del intervalo $[\alpha, \beta]$, lo que contradice el hecho de que la longitud de I_n tiene por límite cero. $\square$

Considere la sucesión de intervalos $I_n = (0, 1/n)$. Calcule

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n.$$

Analice el resultado a la luz de la proposición anterior. ¿La contradice? ¿Qué ocurre?

Si tenemos una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots a_n, \ldots$$

podemos construir a partir de ella otras sucesiones eliminando términos de la sucesión inicial, como por ejemplo la sucesión

$$a_1, a_3, a_5, \ldots a_{2n-1} \ldots$$

o la sucesión

$$a_2, a_4, a_6, \ldots a_{2n} \ldots$$

Estas sucesiones «hijas» se conocen con el nombre de subsucesiones de la sucesión inicial. Sus términos son un subconjunto de los iniciales, pero no cualquier subconjunto, han de respetar el orden de la lista inicial aunque su posición sea otra. Así, en el primer ejemplo el término a_5 ocupa el tercer lugar, lo que significa que corresponde al término b_3 si denotáramos dicha sucesión como

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots.$$

En cambio

$$a_1, a_3, a_2, a_5, a_7, a_4, a_9, a_{11}, a_6 \ldots,$$

es una sucesión pero no es una subsucesión de la sucesión inicial porque no conserva el orden en la numeración de la misma.

Definición 2.3.2 *Sea $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ una sucesión y sea $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ monótona estrictamente creciente. La sucesión $\phi \circ \tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ se dice que es una subsucesión de la anterior. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión inicial entonces la subsucesión se denota del siguiente modo $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} := (\phi \circ \tau(k))_{k\in\mathbb{N}}$.*

En los ejemplos anteriores, τ vendría dada por $\tau(k) = 2k - 1$ en el primer caso

$$a_{n_1} = a_1,\ a_{n_2} = a_3,\ a_{n_3} = a_5, \ldots a_{n_k} = a_{2k-1}$$

mientras que en el segundo $\tau(k) = 2k$ y

$$a_{n_1} = a_2,\ a_{n_2} = a_4,\ a_{n_3} = a_6, \ldots a_{n_k} = a_{2k}.$$

A partir de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ y la aplicación estrictamente creciente $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, la subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, donde $n_k = \tau(k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, se denotará también en la forma $(a_{\tau(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.

En ocasiones nos veremos obligados a tomar una subsucesión de una subsucesión y esto es complicado de expresar. Siguiendo la definición de una subsucesión, a partir de la anterior $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (\phi \circ \tau(k))_{k\in\mathbb{N}}$, si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es otra aplicación estrictamente creciente, definiríamos la subsucesión de la subsucesión anterior mediante

$$(a_{n_{k_p}})_{p\in\mathbb{N}} = (\phi \circ \tau \circ \varphi(p))_{p\in\mathbb{N}}$$

Como se ve la notación $(a_{n_{k_p}})_p$ es complicada y, en ocasiones, utilizaremos la notación alternativa $(a_{\tau\circ\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$. Observe que una subsucesión de una subsucesión de $(a_n)_n$ es subsucesión de $(a_n)_n$.

Por ejemplo, si, como antes, $\tau(k) = 2k-1$ y $\varphi(p) = 2p$, entonces $\tau\circ\varphi(p) = 4p-1$ y la subsucesión $(a_{n_{k_p}})_p = (a_{\tau\circ\varphi(p)})_p$ es:

$$a_{n_{k_1}} = a_3,\ a_{n_{k_2}} = a_7,\ a_{n_{k_3}} = a_{11}, \ldots$$

Ejemplos de subsucesiones de una dada

```
kill(all)$  a[n]:=(-1)^n/n;  makelist([n,a[n]],n,1,20);
tau(k):=2*k+1; b[k]:=a[tau(k)]; makelist([n,b[n]],n,1,20);
```

Proposición 2.3.3 *Si una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente cualquier subsucesión suya converge al mismo límite.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente con límite a. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un número natural p tal que si $n > p$ se verifica que $|a_n - a| < \varepsilon$. Sea $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(a_n)_n$. Necesariamente para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $k \leq n_k$ (¿por qué?); por tanto, dado $\varepsilon > 0$ si p es como antes y si $k > p$ se tiene $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, lo que significa que $\lim_k a_{n_k} = a$. □

Teorema 2.3.4 (Bolzano-Weierstrass) *Cualquier sucesión acotada en $\mathbb{R}$ posee una subsucesión convergente.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada y sean c_0, d_0 dos números reales tales que $c_0 \leq a_n \leq d_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea m_0 el punto medio del intervalo $I_0 := [c_0, d_0]$. Entonces uno al menos de los conjuntos

$$\{n \in \mathbb{N} : a_n \in [c_0, m_0]\} \qquad \text{ó} \qquad \{n \in \mathbb{N} : a_n \in [m_0, d_0]\}$$

es infinito.

Elegimos uno de los intervalos $[c_0, m_0]$ ó $[m_0, d_0]$, para el que el conjunto asociado antes sea infinito y lo denotamos con $I_1 = [c_1, d_1]$. Tomamos $n_1 \in \mathbb{N}$ de forma que $a_{n_1} \in I_1$. A continuación dividimos el intervalo I_1 por su punto medio y denotamos con $I_2 = [c_2, d_2]$ uno de los dos subintervalos de dicha división, elegido con el mismo criterio que se eligió I_1 a partir de los dos subintervalos de I_0. Como el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in [c_2, d_2]\}$ es infinito podemos elegir $n_2 > n_1$ de forma que $a_{n_2} \in I_2$. Por inducción se obtiene así una sucesión de intervalos $(I_k)_k$ y una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_n$, de modo que:

(1) $I_{k+1} \subset I_k$, siendo $L(I_k) = \dfrac{1}{2^{k-1}} L(I_0)$, donde con L denotamos la longitud del correspondiente intervalo;

(2) $a_{n_k} \in I_k$.

Aplicando la proposición 2.3.1 a la sucesión $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se tiene garantizada la existencia de $z \in \bigcap_k I_k$. Como consecuencia de las dos propiedades anteriores es claro que $z = \lim_k a_{n_k}$ y la prueba está completa. □

El teorema de Bolzano-Weierstrass también es cierto para $\mathbb{C}$.

Corolario 2.3.5 *Cualquier sucesión acotada en $\mathbb{C}$ posee una subsucesión convergente.*

Demostración: Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de complejos y sea $z_n = a_n+ib_n$ donde a_n y b_n son números reales. Las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son acotadas en $\mathbb{R}$ debido a que $|a_n| \leq |z_n|$ y $|b_n| \leq |z_n|$. Por tanto, aplicando el teorema de Bolzano-Weierstrass para $\mathbb{R}$, existe una subsucesión $(a_{\tau(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un real, digamos, a. La subsucesión correspondiente de las partes imaginarias $(b_{\tau(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es, obviamente, acotada y por tanto, aplicando de nuevo el teorema de Bolzano-Weierstrass para $\mathbb{R}$, posee necesariamente una subsucesión $(b_{\tau\circ\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ convergente a un número real, digamos, b. Sea $(a_{\tau\circ\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ la sucesión de las partes reales correspondientes a $(b_{\tau\circ\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$. Al ser $(a_{\tau\circ\varphi(p)})_p$ una subsucesión de $(a_{\tau(k)})_k$ es también convergente a a.

Finalmente, de acuerdo con la proposición 2.3.3, $z_{\tau\circ\varphi(p)} := a_{\tau\circ\varphi(p)} + ib_{\tau\circ\varphi(p)}$ es una subsucesión de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $a + ib$. □

Corolario 2.3.6 *Si una sucesión acotada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$ tiene la propiedad de que cualquier subsucesión suya que converja tiene por límite un valor fijo $a \in \mathbb{K}$, entonces*

$$a = \lim_n a_n.$$

Demostración: Si a no fuera el límite de la sucesión entonces existiría ε_0 de modo que el complementario de la bola $B(a, \varepsilon_0)$ contendría una cantidad infinita de puntos de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por tanto existiría una subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en el complementario de $B(a, \varepsilon_0)$ (¿cómo podría construirse esta sucesión?) que denotaremos con $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Como la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada entonces por el teorema de Bolzano-Weierstrass poseería una subsucesión $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ —que también sería subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$— convergente a un punto, digamos, b. Pero entonces $|b - a| \geq \varepsilon_0$ ya que $|b_n - a| \geq \varepsilon_0$ para todo n y esto está en contradicción con la hipótesis de que cualquier subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converja tiene límite a. □

2.4. Sucesiones de Cauchy: completitud

El concepto de sucesión de Cauchy es un concepto fundamental del Análisis Matemático que va mucho más allá de los contenidos de este curso. Las sucesiones de Cauchy son aquellas cuyos términos están entre sí tan cerca como deseemos con tal de que prescindamos de una cantidad finita de ellos.

En una sucesión convergente, por definición, sus términos están tan cerca del límite como deseemos, con la condición de prescindir de «unos cuantos» y, por tanto, si casi todos están cerca del límite también están cerca entre sí. O dicho de manera más precisa, una sucesión convergente es de Cauchy. En esta sección vamos a ver que el recíproco también es cierto en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

Definición 2.4.1 *Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$ se dice de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que si n, m son números naturales verificando $n_0 \leq n$ y $n_0 \leq m$ entonces $|a_m - a_n| < \varepsilon$.*

Utilizando los cuantificadores y conectores lógicos, la definición anterior se escribe:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N}\, (n \geq n_0 \land m \geq n_0 \Longrightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon)$$

Ejemplos 2.4.2 Las sucesiones de términos generales

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

son de Cauchy. En el caso de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esto es muy fácil ya que fijado $\varepsilon > 0$ existe, por la propiedad arquimediana, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon/2$ y en consecuencia

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Para la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hay que observar en primer lugar que

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2}$$

con lo que, si $m > n$, se tiene

$$\begin{aligned}
|b_m - b_n| =& \left|\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}\right| \\
\leq& \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \\
=& \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$ y en consecuencia si $n, m > n_0$ se tiene $|b_m - b_n| < \varepsilon$. Esto acaba la prueba de que ambas sucesiones son de Cauchy.

Para probar que una sucesión es convergente es necesario, a tenor de la definición, tener un «candidato» a límite de la misma. El teorema que sigue es básico, puesto que establece la posibilidad de demostrar que una sucesión tiene límite sin necesidad de disponer del candidato.

Teorema 2.4.3 (Completitud de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$) *Una sucesión en $\mathbb{K}$ es convergente si y sólo si es de Cauchy.*

Demostración: En primer lugar vamos a probar que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, llamando a al límite de la sucesión, tenemos que: dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ se cumple $|a_n - a| < \varepsilon/2$; por tanto tomando $n, m > n_0$ se tiene

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Para probar el recíproco comencemos probando que una sucesión de Cauchy es acotada. En efecto, dado $\varepsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$ se cumple

$$|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon = 1,$$

de donde siempre que $n > n_0$ se verifica

$$|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|$$

y si llamamos

$$M := \text{máx}\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a_{n_0}|\}$$

se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $|a_n| \leq M$, es decir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada.

Ahora aplicando el teorema de Bolzano-Weierstrass (2.3.4 y 2.3.5) sabemos que la sucesión acotada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente, digamos a b. Para acabar, únicamente hemos de probar que b es precisamente el límite de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. A tal fin observemos que, como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > n_0$ se cumple

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otra parte, debido a que $\text{lím}_k\, a_{n_k} = b$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$|a_{n_k} - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

siempre que $k > k_0$. Tomemos $p > \text{máx}\{n_0, k_0\}$ fijo y sea $n > p$ entonces se cumple

$$|a_n - b| = |a_n - a_{n_p} + a_{n_p} - b| \leq |a_n - a_{n_p}| + |a_{n_p} - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Lo que significa que $\text{lím}_n\, a_n = b$, como queríamos demostrar. □

En la última acotación se ha utilizado que

$$|a_n - a_{n_p}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Explique detalladamente por qué es cierta esa desigualdad.

2.5. Funciones elementales I: exponencial y logaritmo reales

El concepto de cuerpo $\mathbb{R}$ nos permite hacer uso de las cuatro operaciones básicas: sumar, restar, multiplicar y dividir. En la sección 1.2.2 hemos introducido otra operación: la raíz n-ésima positiva de un número real positivo. En esta sección vamos a ocuparnos de otras operaciones (o funciones) básicas cuyas propiedades son conocidas de la enseñanza media, las exponenciales y los logaritmos, pero sería necesario cimentar de forma consistente con el desarrollo axiomático que estamos realizando. Esto no modificará nuestros usos pero tal vez sí nuestra comprensión del significado de algo tan familiar como a^b. Porque... es claro el valor de 2^3 y de $(-2)^3$, pero ¿cuál es el valor de $2^{\sqrt{2}}$ o de $(-2)^{\sqrt{2}}$?

Aunque no haremos las demostraciones porque requieren un tiempo del que no disponemos, sí esquematizarem os las líneas maestras de la construcción rigurosa. Quien esté interesado puede encontrar los detalles en la página 51 y ss. del libro de Ortega [1].

2.5.1. Exponentes enteros

Cuando $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, con a^n se denota el producto de a por sí mismo n-veces. Y es bien conocido (y en todo caso, de comprobación sencilla) que se verifican las siguientes propiedades para $n, m \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}$

Proposición 2.5.1

(1) $a^{n+m} = a^n a^m$.

(2) $(ab)^n = a^n b^n$.

(3) $(a^n)^m = a^{nm}$.

(4)
- *Si* $a > 1$ *y* $n < m$, *entonces* $a^n < a^m$.
- *Si* $a < 1$ *y* $n < m$, *entonces* $a^n > a^m$.

(5)
- *Si* $0 < a < b$ *y* $n > 0$, *entonces* $a^n < b^n$.
- *Si* $0 < a < b$ *y* $n < 0$, *entonces* $a^n > b^n$.

La definición de a^n puede extenderse para $n \in \mathbb{Z}$ definiendo

$$a^0 := 1 \quad \text{y} \quad a^n = 1/a^{-n} \text{ si } n \text{ es un entero negativo.}$$

Y con esa definición es sencillo comprobar que la proposición anterior también es cierta cuando $n \in \mathbb{Z}$.

2.5.2. Exponentes racionales

En la proposición 1.2.22 quedó dicho que dado un real positivo a y $n \in \mathbb{N}$ existe un único real positivo b denotado como $\sqrt[n]{b}$ que cumple $b^n = a$ y que recibe el nombre de raíz n-ésima de a. Definimos entonces $a^{1/n} := \sqrt[n]{a}$.

Mas generalmente se define $a^{\frac{m}{n}}$ donde $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ mediante la fórmula

$$a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}.$$

Es sencillo comprobar que si $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ entonces se cumple que

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p]{a^p} = a^{\frac{p}{q}},$$

con lo que queda unívocamente definido a^r para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Además esta definición extiende la anterior para $r \in \mathbb{Z}$ y verifica las propiedades antes enumeradas.

Proposición 2.5.2 *Sean $r, s \in \mathbb{Q}$ y a, b reales estrictamente mayores que cero.*

(1) $a^{r+s} = a^r a^s$.

(2) $(ab)^r = a^r b^r$.

(3) $(a^r)^s = a^{rs}$.

(4)
- *Si $a > 1$ y $r < s$, entonces $a^r < a^s$.*
- *Si $0 < a < 1$ y $r < s$, entonces $a^r > a^s$.*

(5)
- *Si $0 < a < b$ y $r > 0$, entonces $a^r < b^r$.*
- *Si $0 < a < b$ y $r < 0$, entonces $a^r > b^r$.*

2.5.3. Exponentes reales

Vamos a continuación a definir a^x para $x \in \mathbb{R}$ y $a > 0$. La forma natural de hacerlo es tomar sucesiones de racionales $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con límite x y definir a^x como el límite de $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$, para lo cual es necesario probar que dicho límite existe y que no depende de la sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Así ocurre y eso permite definir

$$a^x = \ lim_n a^{r_n}$$

siendo $(r_n)_n$ una sucesión de racionales que tiene por límite x.

Proposición 2.5.3 *Sean $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$.*

(1) Si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de racionales con límite x, entonces existe $\lim\limits_n a^{r_n}$.

(2) El límite anterior es independiente de la sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposición 2.5.4 *Sean* $x, y \in \mathbb{R}$ *y* $a, b > 0$.

(1) $a^{x+y} = a^x a^y$.

(2) $(ab)^x = a^x b^x$.

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$.

(4) • *Si* $a > 1$ *y* $x < y$, *entonces* $a^x < a^y$ *(la función* a^x *es creciente si* $a > 1$*).*
• *Si* $0 < a < 1$ *y* $x < y$, *entonces* $a^x > a^y$ *(*a^x *es decreciente si* $a < 1$*).*

(5) • *Si* $0 < a < b$ *y* $x > 0$, *entonces* $a^x < b^x$.
• *Si* $0 < a < b$ *y* $x < 0$, *entonces* $a^x > b^x$.

(6) Si $(x_n)_n$ *converge a* x *entonces* $\lim a^{x_n} = a^x$.

(7) • *Si* $a > 1$, *para cada* $k \in \mathbb{R}$ *existe* $t \in \mathbb{R}$ *tal que* $x > t$ *implica* $a^x > k$ *(*a^x *no está acotada superiormente si* $a > 1$*).*
• *Si* $a < 1$ *para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $t \in \mathbb{R}$ *tal que* $x > t$ *implica* $a^x < \varepsilon$ *(*a^x *tiene ínfimo 0 si* $a < 1$*).*

2.5.4. La función logaritmo

Proposición 2.5.5 *Si* $0 < a \neq 1$ *y* $x > 0$ *existe un único* $y \in \mathbb{R}$ *tal que* $a^y = x$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos $a > 1$ y consideremos el conjunto definido por

$$A := \{z \in \mathbb{R} : a^z \leq x\}.$$

Dicho conjunto está acotado superiormente como consecuencia del apartado 7 de la proposición 2.5.4. Sea $y := \sup A$. Veamos que se cumple $a^y = x$.

En primer lugar, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de A que converge a $y = \sup A$ (véase el ejercicio 2.16). Entonces $a^{x_n} \leq x$, pues $x_n \in A$, y, de acuerdo con el apartado 6 de la proposición 2.5.4, se verifica $\lim_n a^{x_n} = a^y$, por tanto es claro que $a^y \leq x$.

Si fuera $a^y < x$ (reducción al absurdo), vamos a demostrar que existiría $\varepsilon > 0$ tal que $a^{y+\varepsilon} < x$. En efecto,

$$a^{y+\varepsilon} < x \Longleftrightarrow a^\varepsilon < \frac{x}{a^y}$$

pero siendo $x/a^y > 1$ y $\lim_n a^{1/n} = 1$ necesariamente existe un $n \in \mathbb{N}$ para el que se cumple

$$a^{1/n} < \frac{x}{a^y}$$

y tomando $\varepsilon = 1/n$ se tiene el resultado buscado. Pero la existencia de un tal $\varepsilon > 0$ contradice la definición de y como supremo de A.

Supongamos ahora que $0 < a < 1$ y pongamos $a' := 1/a > 1$ y $x' := 1/x$. Aplicando lo anterior con a' y x' existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $(a')^y = x'$, es decir,

$$(1/a)^y = 1/a^y = 1/x$$

Lo que equivale a $a^y = x$. $\square$

Definición 2.5.6 *Para $a > 0$, $a \neq 1$, y $x > 0$, se llama logaritmo en base a de x al único número real y que satisface la ecuación $a^y = x$. Se escribe $\log_a x := y$. Cuando $a = e$ se llama logaritmo neperiano y se denota simplemente con $\log x$.*

Proposición 2.5.7 *La función logaritmo en base a tiene las siguientes propiedades:*

(1) • *Es una función estrictamente creciente cuando $a > 1$, es decir, si $0 < x < y$ entonces $\log_a x < \log_a y$;*
• *Es una función estrictamente decreciente cuando $a < 1$, es decir, si $0 < x < y$ entonces $\log_a x > \log_a y$;*

(2) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

(3) $\log_a x/y = \log_a x - \log_a y$.

(4) $\log_a x^z = z \log_a x$.

(5) Si $\lim_n x_n = x$ *con* $x_n > 0$ *y* $x > 0$ *entonces* $\lim_n \log_a x_n = \log x$.

siendo x, y, z números reales, con $x > 0$, $y > 0$.

Demostración: Comencemos poniendo $\alpha := \log_a x$ y $\beta := \log_a y$, con lo que $x = a^\alpha$, $y = a^\beta$.

Si siendo $x < y$ fuera $\alpha \geq \beta$, para $a > 1$ (el otro caso es análogo) se tendría

$$a^\alpha = x \geq a^\beta = y$$

lo cual es absurdo.

Las fórmulas $xy = a^{\alpha+\beta}$ y $x/y = a^{\alpha-\beta}$ son consecuencia de las proposiciones establecidas ya en esta sección. Y corresponden, de acuerdo con la definición, a

$$\log_a xy = \alpha + \beta = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a x/y = \alpha - \beta = \log_a x - \log_a y$$

Por otra parte $x^z = (a^\alpha)^z = a^{z\alpha}$ o sea $\log_a x^z = z\alpha = z \log_a x$.

El último apartado requiere un poco más de cuidado. Queremos demostrar que

$$\lim_n (\log_a x_n - \log_a x) = 0 \quad \text{que equivale a } \lim_n \log_a \frac{x_n}{x} = 0$$

y para ello es suficiente ver que si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $\alpha_n > 0$ y $\lim_n \alpha_n = 1$ entonces

$$\lim_n \log_a \alpha_n = 0.$$

Demostremos esta fórmula. Sea $\beta_n := \log_a \alpha_n$. Como $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y el logaritmo una función monótona, la sucesión $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es acotada y aplicando el teorema de Bolzano-Weierstrass posee subsucesiones convergentes; si todas ellas tuvieran por límite 0 habríamos probado lo que queremos (véase el corolario 2.3.6). Pero si $(\beta_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ fuera una subsucesion de $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a, digamos, β, entonces, por el apartado 6 de la proposición 2.5.4 se tendría

$$a^\beta = \lim_k a^{\beta_{n_k}} = \lim_k \alpha_{n_k} = 1$$

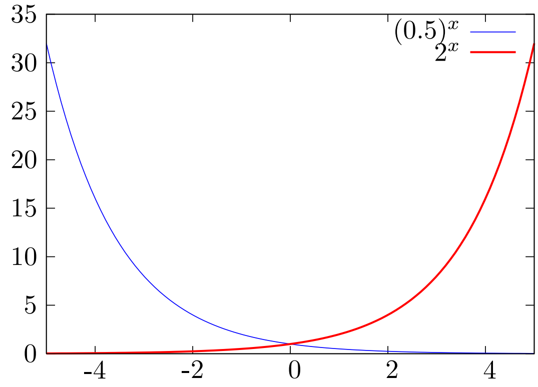
con lo cual $\beta = 0$ y la demostración está completa. □

Observación 2.5.8 Aunque $y = \log_a x$ tiene sentido para cualquier $a > 0$, en el desarrollo matemático suele utilizarse únicamente el logaritmo neperiano $\log x$. La razón es que los demás sólo difieren de éste en un factor de proporcionalidad. En efecto: si $\log_a x = y$ y $\log x = z$, entonces

$$a^y = x \Longrightarrow \text{ tomando logaritmos } y \log a = \log x \Longrightarrow \log_a x = \frac{1}{\log a} \log x$$

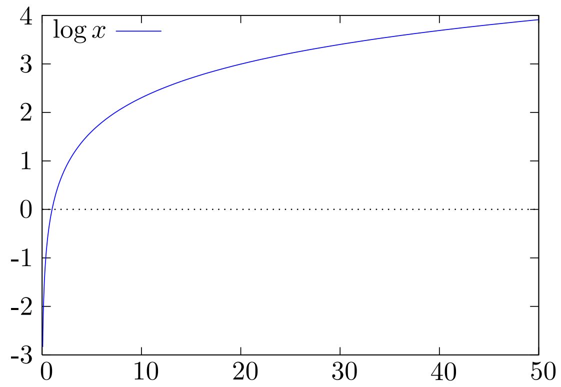
Después del estudio realizado en esta sección (y lo que ya habíamos hecho con anterioridad) ya tenemos bien fundamentadas una parte de las llamadas funciones elementales (en el sentido de «elementos» básicos). Si acudimos a nuestros conocimientos de enseñanza media o al teclado de nuestra calculadora, todavía echamos en falta las funciones trigonométricas (seno, coseno, etc.) para acabar con la lista de estas funciones elementales, que motivan el título dado a la sección. La fundamentación de éstas tendrá que esperar ¡hasta el último capítulo! Pero sus propiedades o las relaciones entre ellas serán las mismas que conocemos, y por ello, en los ejemplos y ejercicios, podremos hacer uso de los conocimientos que tenemos, a sabiendas de que serán justificados más adelante. Olvidarnos de ellas hasta ese momento empobrecería nuestro conocimiento sobre la utilidad de las herramientas que iremos desarrollando.

En la imagen puede verse el aspecto de las gráficas de las funciones $y = 2^x$ e $y = (0.5)^x$ en el intervalo $[-5, 5]$ dibujadas con Gnuplot (observe que la escala no es la misma en los dos ejes)



Maxima sólo conoce la función logaritmo neperiano, cuya gráfica, en el intervalo $[0, 50]$, aparece en la imagen más abajo, así como el comando usado para construirla.

```
plot2d(log(x),[x,0,50],[y,-3,4], [gnuplot_preamble,"set key left top"]);
```



2.6. Límites infinitos

Hasta este punto el límite de una sucesión ha sido siempre un número, un elemento de $\mathbb{K}$. Pero es conveniente extender el concepto para permitir que el límite de una sucesión de números reales sea un símbolo llamado infinito y denotado con ∞.

Definición 2.6.1

(1) Se dice que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales tiene por límite «más infinito», y se escribe $\lim_n a_n = +\infty$, *si para cada $M > 0$ existe un número natural n_0 tal que $a_n > M$ si $n > n_0$.*

(2) Se dice que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales tiene por límite «menos

infinito», y se escribe $\lim_n a_n = -\infty$*, si para cada* $M < 0$ *existe un número natural* n_0 *tal que* $a_n < M$ *si* $n > n_0$*.*

Los resultados de la proposición 2.1.9 se extienden en el siguiente sentido:

(1) Si $\lim_n a_n = \infty$ (resp. $-\infty$) y $\lim_n b_n = \infty$ (resp. $-\infty$) entonces

$$\lim_n (a_n + b_n) = \infty \text{ (resp. } -\infty).$$

(2) Si $\lim_n a_n = +\infty$ y $\lim_n b_n = b \neq 0$ entonces

$$\lim_n a_n b_n = +\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_n a_n b_n = -\infty$$

según que b sea positivo o negativo.

(3) Si $\lim_n a_n = +\infty$ y $\lim_n b_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) entonces $\lim_n a_n b_n = \infty$ (resp. $-\infty$).

(4) Si $\lim_n a_n = a \in \mathbb{R}$ y $\lim_n b_n = \pm\infty$ entonces $\lim_n a_n/b_n = 0$.

En símbolos:

$$\begin{array}{lll}
a + (-\infty) = -\infty & a - (+\infty) = -\infty & a - (-\infty) = +\infty \\
(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) & (-\infty) + (-\infty) = (-\infty) & \\
a \cdot (+\infty) = +\infty \text{ si } a > 0 & a \cdot (-\infty) = -\infty \text{ si } a > 0 & \\
a \cdot (+\infty) = -\infty \text{ si } a < 0 & a \cdot (-\infty) = +\infty \text{ si } a < 0 & \\
(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty & (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty & (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \\
\dfrac{a}{\pm\infty} = 0 & &
\end{array}$$

En cambio nada puede saberse con carácter general sobre:

$$\begin{array}{lll}
\lim_n (a_n + b_n) & \text{si } \lim_n a_n = +\infty, & \lim_n b_n = -\infty \\
\lim_n a_n b_n & \text{si } \lim_n a_n = \pm\infty, & \lim_n b_n = 0 \\
\lim_n a_n/b_n & \text{si } \lim_n a_n = \pm\infty, & \lim_n b_n = \pm\infty \\
\lim_n a_n/b_n & \text{si } \lim_n a_n = 0, & \lim_n b_n = 0
\end{array}$$

Es decir, el resultado depende de las sucesiones concretas. Por ejemplo, y sólo como ilustración, si $a_n = n$ y $b_n = -n$, se verifica $\lim_n a_n = +\infty$ y $\lim_n b_n = -\infty$ y $\lim_n (a_n + b_n) = 0$; pero si hubiera sido $b_n = n + 1$ entonces el resultado sería $\lim_n (a_n + b_n) = -1$. El lector puede buscar ejemplos similares en los otros casos (véase el ejercicio 6).

Otros resultados generales son:

(1) Si $\lim_n a_n = +\infty$ y $\lim b_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) entonces $\lim_n a_n^{b_n} = +\infty$ (resp. 0).

(2) Si $\lim_n a_n = 0$ (con $a_n > 0$, para todo n) y $\lim b_n = +\infty$ entonces $\lim_n a_n^{b_n} = 0$.

En cambio nada puede saberse con carácter general sobre:

$$\begin{array}{lll} \lim_n a_n^{b_n} & \text{si } \lim_n a_n = 0, & \lim_n b_n = 0 \\ \lim_n a_n^{b_n} & \text{si } \lim_n a_n = \pm\infty, & \lim_n b_n = 0 \\ \lim_n a_n^{b_n} & \text{si } \lim_n a_n = 1, & \lim_n b_n = \pm\infty \end{array}$$

Esas situaciones en las que no se puede obtener una conclusión general se formulan, habitualmente, diciendo que $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, ∞/∞, $0/0$, 0^0, ∞^0 y 1^∞ son *indeterminaciones*, lo que significa que nada puede anticiparse sobre lo que pasará para sucesiones arbitrarias. Pero cuando se trate de sucesiones concretas, las operaciones de suma, producto, cociente, potencia,... pueden realizarse y por tanto podemos ver qué ocurre con la sucesión, es decir, la indeterminación desaparece.

Aunque parezcan muy distintas, todas las indeterminaciones anteriores son equivalentes, en el sentido de que es posible transformar unas en otras. Por ejemplo, $\infty \cdot 0$ puede ser transformada en $0/0$. En efecto, si $\lim_n a_n = \infty$ y $\lim_n b_n = 0$ entonces

$$a_n \cdot b_n = \frac{b_n}{1/a_n} = \frac{b_n}{c_n}$$

siendo $c_n = 1/a_n$ y $\lim_n c_n = 0$. Haga algo similar para los demás casos y convénzase de que todas son equivalentes entre sí. Para el caso de las potencias tomar logaritmos ayuda.

2.7. Algunas sucesiones notables. Jerarquía de sucesiones divergentes

En capítulos posteriores, particularmente en el 4, desarrollaremos herramientas muy útiles para calcular límites. Pero calcular límites no es tarea sencilla y en muchas ocasiones lo más que se puede hacer, y ya es bastante, es demostrar que una determinada sucesión tiene límite: el caso del límite de una sucesión tan simple como $(1 + (1/n))^n$, que analizamos en el corolario 2.2.4, es significativo, ¡hemos tenido que inventar un símbolo para escribir ese límite!

En esta última sección estableceremos una jerarquía entre los diferentes «tamaños» de infinito. Además calcularemos los límites de ciertas sucesiones concretas, pero muy interesantes.

Proposición 2.7.1

(1) $\lim_n n^{1/n} = 1.$

(2) Si $\lim_n x_n = \pm\infty$ *entonces* $\lim_n \left(1 + \dfrac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$

(3) Si $\lim_n x_n = +\infty$ *entonces* $\lim_n \left(1 - \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e^{-1}$.

(4) Si existe $\lim_n \frac{z_{n+1}}{z_n} = w \in \mathbb{R}$ *con* $|w| < 1$*, entonces* $\lim_n z_n = 0$.

Demostración:

(1) Sea $(b_n)_n := n^{1/n} - 1 \geq 0$. Entonces

$$n = (1 + b_n)^n > \frac{n(n-1)}{2!} b_n^2$$

y, por tanto, $\lim_n b_n = 0$, es decir $\lim_n n^{1/n} = 1$, usando, de nuevo, la regla del sandwich.

(2) Para el caso particular en que $x_n = n$ la afirmación es cierta, según el corolario 2.2.4. En particular, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq n_0$, se verifica

$$\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon$$

Observemos que también podemos afirmar que existe n_1 tal que si $n \geq n_1$, entonces:

$$\left|\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n - e\right| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right| < \varepsilon$$

Para una sucesión arbitraria $(x_n)_n$ tal que $\lim_n x_n = +\infty$, consideremos la sucesión $([x_n])_n$, entonces: existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_2$ se verifica $[x_n] \geq n_1$; por tanto, si $n \geq n_2$ se tiene

$$\left|\left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} - e\right| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \left|\left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1} - e\right| < \varepsilon$$

es decir,

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1} = e$$

Ahora la conclusión buscada se obtiene de la cadena de desigualdades:

$$\left(1 + \frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}$$

cada una de las cuales es obvia, y de la regla del sandwich.

El caso $\lim_n x_n = -\infty$ puede demostrarse fácilmente aplicando el apartado que sigue y haciendo un cambio de variable.

(3) Se obtiene fácilmente apoyándose en el resultado anterior y en la siguiente cadena de igualdades.

$$\left(1-\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}=\left(\frac{x_n}{x_n-1}\right)^{-x_n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x_n-1}\right)^{x_n}}.$$

(4) Por la definición de límite se tendría garantizado que existen $0<a<1$ y n_0 tales que si $n\geq n_0$, entonces

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|<a<1.$$

En particular

$$\begin{aligned}
&|z_{n_0+1}|<|z_{n_0}|a\\
&|z_{n_0+2}|<|z_{n_0+1}|a<|z_{n_0}|a^2\\
&\quad\cdots\cdots\\
&|z_{n_0+k}|<|z_{n_0}|a^k
\end{aligned}$$

y como $\lim_n a^n=0$ $(a<1)$ se tiene $\lim_n|z_n|=0$ y por tanto $\lim_n z_n=0$.

Este último apartado es la pieza clave en la prueba del corolario que sigue. $\square$

Definición 2.7.2 *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones con límite ∞ diremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un infinito de orden superior a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y escribimos $b_n\ll a_n$ si*

$$\lim_n\frac{a_n}{b_n}=\infty.$$

Si existen constantes positivas α y β tales que $0<\alpha\leq\frac{a_n}{b_n}\leq\beta$ para $n>n_0$ se dice que ambas sucesiones tienen el mismo orden de infinitud. Y si además

$$\lim_n\frac{a_n}{b_n}=1$$

se dice que ambas sucesiones son equivalentes.

Los órdenes fundamentales de infinitud quedan reflejados a continuación.

Corolario 2.7.3 *Si $b>0$, $c>1$ y $d>0$ son números reales se tiene*

$$\log n\ll n^b\ll c^n\ll n^{dn}.$$

Además, si $d\geq 1$ entonces

$$c^n\ll n!\ll n^{dn}.$$

Demostración: Todas, salvo la primera, son consecuencia directa del último apartado de la proposición 2.7.1. Por ejemplo, para demostrar la afirmación $n^b \ll c^n$, tomemos $z_n := \frac{n^b}{c^n}$, entonces:

$$\lim_n \frac{z_{n+1}}{z_n} = \lim_n \frac{(n+1)^b c^n}{n^b c^{n+1}} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^b \frac{1}{c} = \frac{1}{c} < 1$$

de donde se deduce que $\lim_n z_n = 0$.

Para demostrar que $\log n \ll n^b$, si $b > 0$, tomamos inicialmente $b = 1$ y tenemos en cuenta que $\log n = M \log_{10} n$. Si $10^{k-1} \leq n < 10^k$ es claro que $0 \leq \frac{\log_{10} n}{n} \leq \frac{k}{10^{k-1}} = 10\frac{k}{10^k}$. Aplicando el último apartado de la proposición anterior a la sucesión $z_n = \frac{n}{10^n}$ y la regla del sandwich se obtiene el resultado.

Para $b > 1$ el resultado es consecuencia de lo que acabamos de hacer y de que $n < n^b$.

Si $b < 1$ tomemos $m \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{1}{m} < b$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(k-1)^m \leq n < k^m$; además si n tiende a $+\infty$, k tiende también a $+\infty$. Ahora, puesto que

$$0 < \frac{\log_{10} n}{n^b} \leq \frac{\log_{10} n}{\sqrt[m]{n}} \leq \frac{m \log_{10} k}{k-1},$$

y hemos probado anteriormente que $\lim_k (\log_{10} k)/k = 0$, se obtiene que, también en este caso, $\lim_n \log n/n^b = 0$. $\square$

> En lugar de una demostración abstracta experimentaremos con Maxima para comparar el orden de magnitud de las sucesiones. Las listas con los valores de las sucesiones, el gráfismo y el comando `limit` son las herramientas adecuadas.

2.8. Representación decimal de los números reales

Al comienzo del capítulo 1 fueron introducidos los reales de forma axiomática, pero, como señalábamos en la sección 1.2.3, los elementos de $\mathbb{R}$ (que no pertenecen a $\mathbb{Q}$) son objetos abstractos, carecen de una representación numérica concreta. El objetivo de esta sección es asignarles una representación decimal.

A tal fin conviene recordar el cálculo de la suma de los términos de una progresión geométrica, realizado en el ejemplo 8 de 2.1.3.

Proposición 2.8.1 (Representación decimal) *Sea $x \geq 0$ un número real.*

(1) Existe una única sucesión de números enteros $(a_n)_n$ que verifica las siguientes propiedades

a*)* $a_0 \geq 0$ *y* $0 \leq a_n \leq 9$, *para todo* $n \geq 1$

b) *para cada* $n \in \mathbb{N}$

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \leq x < a_0, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n} \tag{2.1}$$

donde

$$a_0, a_1 a_2 \dots a_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{10^k}$$

recibe el nombre de número decimal finito;

c) *en esta sucesión no todos los términos son 9 a partir de un cierto lugar.*

(2) Recíprocamente, dada una sucesión de números naturales (a_n) *con*

$$0 \leq a_n \leq 9 \text{ para } n > 0,$$

tales que en esta sucesión no todos los términos son 9 a partir de un cierto lugar, existe un único real $x \geq 0$ *que cumple las relaciones 2.1 para todo* n.

Diremos que la expresión $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ *es la representación decimal del número real* x. *El número* a_0 *es la parte entera de* x *y se verifica*

$$x = \sup\{a_0, a_1 a_2 \dots a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración: El directo lo demostraremos por inducción sobre n en la fórmula (2.1). Para $n = 0$ basta tomar $a_0 := [x]$.

Supongamos que se han encontrado $a_0, a_1, \dots, a_k$ de forma que se verifica la fórmula (2.1) para $n = k$. Vamos a encontrar a_{k+1} de manera que la fórmula (2.1) valga para $n = k + 1$. Para ello multiplicamos la fórmula correspondiente a $n = k$ por 10^{k+1}; así, tomando

$$a_{k+1} := [10^{k+1}x - 10^{k+1}a_0, a_1 a_2 \dots a_n] = [10^{k+1}x - (a_0 10^{k+1} + a_1 10^k + \cdots + a_k 10)]$$

se obtiene el resultado buscado, ya que como,

$$10^{k+1}(a_0, a_1 \dots a_k) \leq 10^{k+1}x < 10^{k+1}(a_0, a_1 \dots a_k) + 10$$

se tiene $0 \leq a_{k+1} \leq 9$. Esto prueba la existencia de la representación decimal.

La unicidad se obtiene por inducción a partir de la fórmula (2.1). En efecto, de dicha fórmula se obtiene que $a_0 = [x]$, y supuesto que se han determinado de manera unívoca $a_0, a_1, \dots a_{n-1}$, de

$$a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_n \leq 10^n x < a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_n + 1$$

se tiene que

$$a_n \leq 10^n x - (a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_n) < a_n + 1$$

y por tanto

$$a_n = [10^n x - (a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \cdots + a_n)].$$

Para acabar el directo, resta probar que no puede ser $a_n = 9$ para $n > n_0$ y $a_{n_0} < 9$. Si así fuera, se tendría

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{n_0}}{10^{n_0}} + \frac{9}{10^{n_0+1}} + \frac{9}{10^{n_0+2}} + \cdots + \frac{9}{10^{n_0+h}} \leq x$$

para todo $h \in \mathbb{N}$ y por tanto, sumando la progresión geométrica,

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{n_0} + 1}{10^{n_0}} \leq x$$

lo que contradice la definición de a_{n_0}.

La demostración del recíproco es más simple. Dada una sucesión a_n con a_n entero y $0 \leq a_n \leq 9$ si $n > 0$, es inmediato que el conjunto

$$A = \{a_0, a_1 a_2 \ldots a_n : \quad n \in \mathbb{N}\}$$

está acotado superiormente por $a_0 + 1$, con lo que denotando con x el supremo de dicho conjunto se tiene que cada $n \in \mathbb{N}$ es $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \leq x \leq a_0 + 1$. Pero, de hecho, como no todos los a_n pueden ser 9 a partir de un momento, es fácil deducir que $x < a_0 + 1$. Razonando de forma similar es fácil darse cuenta de que, además de $a_0 + 1$, también son cotas superiores de A los números

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_n + 1/10^n$$

cualquiera que sea el entero $n > 0$ por lo que

$$x \leq a_0, a_1 a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n},$$

pero de hecho, razonando como antes, se tiene de forma más precisa que

$$x < a_0, a_1 a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}.$$

En otras palabras, la fórmula (2.1) es válida. □

Obviamente, el papel específico que juega el número 10 y sus potencias en la proposición anterior puede ser desempeñado por cualquier otro número natural distinto de 1. En particular para el número natural 2, recibe el nombre de representación diádica de los números reales y permite definir a éstos como números decimales (infinitos) con las cifras 0 y 1.

Representación decimal de los racionales.

Una vez probado que a cada número real positivo le corresponde una única representación decimal infinita, en las condiciones precisadas en la proposición anterior, y que cada expresión decimal infinita determina un único número real positivo es natural plantearse la cuestión ¿cómo pueden identificarse los números racionales a través de sus representaciones decimales? En primer lugar es claro que un número decimal finito (es decir, un número decimal infinito en el que a partir de un momento todos los decimales son 0) determina un número racional. Pero no todos los números racionales son así. Piense, por ejemplo, en $1/3$ y $1/7$ cuyas representaciones decimales son, respectivamente $0,3333\ldots$ y $0,142857142857\ldots$

Maxima puede obtener expresiones decimales de números reales con el número de decimales que desee. La expresión decimal de $1/7$ se obtuvo con el comando `1/7,numer;` Experimente con números racionales como, por ejemplo, $4/21, 1/57, 1/13, 1/23\ldots$ hasta llegar a conjeturar que, *siempre*, antes o después, acaba produciéndose un grupo de decimales que se repite periódicamente (es lo que se conoce con el nombre de representación decimal periódica). Si necesita más cifras decimales puede conseguirlas con una sentencia del tipo

```
fpprec:40 $ bfloat(1/23);
```

Experimente luego con números irracionales, como $\sqrt{2}, \sqrt{3}\ldots$ ¿qué ocurre?

Después de esa experimentación seguramente la siguiente afirmación le parecerá natural.

Proposición 2.8.2 *Un número real positivo es racional si y sólo si tiene una representación decimal periódica.*

La demostración de la proposición anterior está a su alcance, ¡trate de realizarla! Dos pistas: 1) Intente descubrir la causa de que una fracción acabe generando siempre un periodo que se repite. Si el denominador es n, ¿cuál es el número máximo de cifras del periodo? 2) Si tenemos una expresión decimal periódica, corriendo la coma convenientemente (lo que significa multiplicar por alguna potencia de 10) y restando puede obtener una expresión decimal finita; eso le permitirá escribir los decimales periódicos como fracciones.

La proposición 2.8.1 aclara que un número real $x > 0$ que tenga una representación decimal infinita $a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$ está en el interior del intervalo cerrado de extremos

$$a_0, a_1a_2\ldots a_n \quad \text{y} \quad a_0, a_1a_2\ldots a_n + \frac{1}{10^n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto en la recta se le asocia el único punto que está en la intersección de todos esos segmentos de la recta. Recíprocamente, dado un punto P cualquiera de la recta, situado a la derecha de 0 pueden suceder dos cosas: 1) que se trate de uno de los puntos que se obtienen en alguna etapa del proceso de división progresiva de los segmentos en diez partes iguales, en cuyo caso tiene asociado unívocamente un número real con representación decimal finita; 2) que no sea uno de tales puntos, en cuyo caso, debido a que la separación entre puntos contiguos en la etapa n es de $1/10^n$ debería tener asociado un número real x que cumpliera

$$a_0, a_1a_2 \dots a_n < x < a_0, a_1a_2 \dots a_n + 1/10^n \tag{2.2}$$

supuesto que $a_0, a_1a_2 \dots a_n$ es el número decimal que corresponde al extremo inferior del intervalo que contiene a P en dicha etapa. Pero como esto es así para todo n, aplicando de nuevo la proposición 2.8.1 el punto P tiene asociado el único número real x que cumple las acotaciones 2.2 para todo n.

2.9. Ejercicios

Resueltos

2.9.1 *Con la axiomática que hemos empleado para $\mathbb{R}$ hemos podido demostrar la propiedad arquimediana y el principio de Cantor de los intervalos encajados utilizando la existencia de supremo en los conjuntos acotados. Pruebe que, recíprocamente, si tenemos un cuerpo totalmente ordenado en el que la propiedad arquimediana y el principio de Cantor de los intervalos encajados son ciertos, entonces cualquier conjunto acotado superiormente A tiene supremo.*

SOLUCIÓN: Sea A un conjunto no vacío acotado superiormente. Queremos ver que tiene supremo. Sea K una cota superior de A. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $K-1$ no es cota superior (si lo fuera cambiaríamos K por $K-1$ repitiendo el proceso en caso necesario). Sea $K-1 < a_1 \leq b_1 = K$ con $a_1 \in A$. Tomemos el punto medio m_1 del intervalo $I_1 := [a_1, b_1]$. Si m_1 es cota superior de A definimos $a_2 := a_1$ y $b_2 = m_1$. Si m_1 no es cota superior de A existe $a_2 \in A$ con $m_1 < a_2 < b_1$ y entonces definimos $b_2 := b_1$. En ambos casos el intervalo $I_2 := [a_2, b_2]$ está contenido en I_1 y su longitud es menor o igual que $1/2$ de la longitud de I_1. Procediendo recursivamente construimos una sucesión de intervalos encajados $[a_n, b_n]$ siendo $a_n \in A$ y b_n cota superior de A y longitud de I_n menor o igual que $(1/2)^{n-1}$ veces la longitud de I_1, con lo que, por la propiedad arquimediana dicha longitud tiende a cero. Entonces, por el principio de encaje de Cantor $\bigcap_n I_n$ posee un único elemento, digamos $\bigcap_n I_n =: \{\alpha\}$.

Afirmamos que $\alpha = \sup A$, lo cual requiere probar dos cosas:

(1) α es cota superior de A. En efecto, si para algún $a \in A$ fuese $\alpha < a$ entonces habría de ser $b_n < a$ para algún n ya que en caso contrario se tendría $a \leq b_n$ para todo n, de donde se llegaría a

$$0 < a - \alpha \leq b_n - \alpha$$

lo cual es absurdo puesto que $\alpha = \lim_n b_n$. Pero, por otra parte, al ser b_n cota superior de A se tiene $a \leq b_n$, lo cual es también contradictorio. En consecuencia α es cota superior de A.

(2) α es la menor cota superior de A. En efecto si $\beta < \alpha$ fuese cota superior de A se tendría $a_n \leq \beta < \alpha$ y por tanto tomando límites $\alpha \leq \beta < \alpha$ lo cual es absurdo.

Resumiendo, la propiedad de que los conjuntos acotados superiormente poseen supremo es equivalente a que se verifiquen la propiedad arquimediana y el principio de encaje de Cantor. □

2.9.2 *Una sucesión* $(a_n)_n$ *se dice que es contractiva si existe* $0 < c < 1$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se verifica* $|a_{n+1} - a_n| \leq c|a_n - a_{n-1}|$. *Demuestre que las sucesiones contractivas son de Cauchy.*

SOLUCIÓN: Sea $m > n$ entonces haciendo uso de la desigualdad triangular y de la estimación $|a_{n+1} - a_n| \leq c|a_n - a_{n-1}|$ se tiene

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &\leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \cdots + |a_{m-1} - a_m| \\ &\leq |a_n - a_{n+1}|(1 + c + c^2 + \cdots + c^{m-n}) \text{ [progresión geométrica]} \\ &= |a_n - a_{n+1}|\frac{1 - c^{m-n+1}}{1 - c} \leq |a_n - a_{n+1}|\frac{1}{1 - c}\end{aligned}$$

Por otra parte $|a_2 - a_3| \leq c|a_1 - a_2|$, $|a_3 - a_4| \leq c|a_2 - a_3| \leq c^2|a_1 - a_2|$ y en general es sencillo obtener por inducción que

$$|a_n - a_{n+1}| \leq c^{n-1}|a_1 - a_2|$$

de donde se tiene

$$|a_n - a_m| \leq c^{n-1}\frac{|a_1 - a_2|}{1 - c} \text{ siempre que } m > n.$$

Como $\lim_n c^n = 0$, fijado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n_0 \leq n$ se tiene

$$c^n < \varepsilon \frac{1 - c}{|a_1 - a_2|}$$

y por tanto

$$|a_n - a_m| \leq c^{n-1}\frac{|a_1 - a_2|}{1 - c} < \varepsilon \frac{|a_1 - a_2|}{1 - c}\frac{1 - c}{|a_1 - a_2|} = \varepsilon$$

siempre que $n, m > n_0 + 1$. Así pues $(a_n)_n$ es de Cauchy. □

2.9.3 *Demuestre que para cualquier sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números reales que converja hacia* 0, *siendo* $|x_n| < 1$ *y* $x_n \neq 0$, *se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 + x_n)}{x_n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = 1. \tag{2.3}$$

Aplique lo anterior para probar que si $\lim_n(x_n) = 1$ *y* $\lim_n y_n = +\infty$ *entonces*

$$\lim_n (x_n)^{y_n} = e^{\lim_n y_n(x_n - 1)} \tag{2.4}$$

supuesto que el segundo límite exista.

Solución: Comencemos por el primero de los límites de (2.3) y supongamos que $0 < x_n < 1$ para todo n. Se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \log\left(1+x_n\right)^{1/x_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \qquad [\text{haciendo } 1/x_n = y_n] \\
&= \log \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \qquad [\text{usando la prop. 2.5.7 }] \\
&= \log e = 1 \quad [\text{usando la prop. 2.7.1}]
\end{aligned}$$

Cuando $0 > x_n > -1$ la prueba es idéntica (en esta situación $\lim_n y_n = -\infty$). Para el caso general en el $-1 < x_n < 1$ los términos de la sucesión se reparten en dos sucesiones disjuntas, una, $(x'_n)_n$, que contenga los términos positivos y la otra, $(x''_n)_n$, los negativos. Entonces puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x'_n)}{x'_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x''_n)}{x''_n} = 1$$

se llega a la conclusión de que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1.$$

El segundo límite de la fórmula (2.3) puede reducirse al primero mediante el cambio de variable $y_n = e^{x_n} - 1$ ya que entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{x_n}-1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{\log(1+y_n)} = 1$$

puesto que $\lim_n y_n = 0$.

Pasemos a la aplicación. Como

$$(x_n)^{y_n} = e^{y_n \log x_n} = e^{y_n \log(1+(x_n-1))}$$

usando la proposición 2.5.4 se tiene

$$\lim_n (x_n)^{y_n} = e^{\lim_n y_n \log(1+(x_n-1))}$$

supuesto que este segundo límite exista. Pero sabemos que

$$\lim_n y_n \log(1+(x_n-1)) = \lim_n y_n(x_n-1)\frac{\log(1+(x_n-1))}{(x_n-1)} = \lim_n y_n(x_n-1)$$

ya que $\lim_n (x_n - 1) = 0$. Se tiene así probada la fórmula (2.3). □

2.9.4 *Estudie el límite de la sucesión* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cuyos términos son:*

$$H_1 = 1, H_2 = 1 + 1/2, H_3 = 1 + 1/2 + 1/3, \ldots H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$$

Solución: Esta sucesión es conocida como la *serie armónica* (en inglés «Harmonic»).

Es claro que se trata de una sucesión monótona creciente. En consecuencia o está acotada superiormente, en cuyo caso tiene por límite un número real (proposición 2.2.2), o no lo está, en cuyo caso su límite es $+\infty$. ¿Cómo determinar cuál de los dos casos se da? El primer caso se da si y sólo si la sucesión es de Cauchy (teorema 2.4.3). Por tanto el límite será $+\infty$ si y sólo si la sucesión no es de Cauchy, que es lo que ocurre como vamos a ver.

Recordemos que una sucesión es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que siempre que $n, m \geq n_0$ se cumple $|H_n - H_m| < \varepsilon$. Por tanto, negar que la sucesión es de Cauchy significa demostrar que hay al menos un $\varepsilon_0 > 0$ de manera que para cada n_0 que tomemos siempre existen números $n, m \geq n_0$ de modo que

$$|H_n - H_m| \geq \varepsilon_0.$$

Veamos que tomando $\varepsilon_0 = 1/2$ se cumple la última desigualdad para ciertos $n, m \geq n_0$ cualquiera que sea el n_0 elegido. Tomemos $n = n_0$ y hagamos $m = n_0 + k$ para cierto $k \in \mathbb{N}$ que luego determinaremos. Entonces

$$|H_n - H_m| = \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \frac{1}{n_0+3} + \cdots + \frac{1}{n_0+k} \geq \frac{k}{n_0+k}$$

y si la sucesión fuera de Cauchy habría de ser

$$\frac{k}{n_0+k} \leq |H_n - H_m| < 1/2$$

para todo k, pero eso es imposible puesto que $\lim\limits_{k} \dfrac{k}{n_0+k} = 1$.

Conseguido nuestro objetivo, queremos advertir al lector que este resultado no debe hacerle llegar a la conclusión de que una suma con «infinitos sumandos» da siempre como resultado ∞. Por ejemplo, la sucesión

$$s_n = 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \cdots + 1/2^n$$

tiene por límite 1 (es la suma de una progresión geométrica infinita). □

A MAXIMA le han dicho cual es el límite de esta sucesión $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pero a pesar de que en las fórmulas para MAXIMA no podemos escribir los puntos suspensivos ... que contiene la fórmula de H_n, y por ello no podemos usar el comando `limit`, sí podemos hacer uso de un comando que hace sumas. Por ejemplo,

```
sum(1/n, n, 1, 100);
sum(1/n, n, 1, 100),numer;
```

permiten calcular el valor de H_{100} de forma exacta como fracción, o en forma decimal aproximada, respectivamente. El límite de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se obtiene mediante

```
sum(1/n, n, 1, inf),simpsum;
```

Aquí `inf` denota a ∞, como puede suponerse, y `simpsum` es un parámetro técnico que viene a significar algo así como «simplifica la suma». Pero ¡cuidado! no debe pensarse que MAXIMA sabe hacer *cualquier* suma infinita... ¡los humanos no somos capaces de hacerlo!

2.9.5 *Calcule el siguiente límite, donde suponemos que a, b y c son constantes positivas.*

$$\lim_n \left(\frac{n}{3}\log((n+a)(n+b)(n+c)) - \log n^n\right).$$

SOLUCIÓN: Puesto que

$$\left(\frac{n}{3}\log((n+a)(n+b)(n+c)) - \log n^n\right) = \frac{n}{3}\log\frac{(n+a)(n+b)(n+c)}{n^3} = $$
$$= \frac{1}{3}\left(n\log\left(1+\frac{a}{n}\right) + n\log\left(1+\frac{b}{n}\right) + n\log\left(1+\frac{c}{n}\right)\right)$$

hemos de calcular $\lim_n n\log(1+a/n)$ (también para b y c). Pero usando el ejercicio 3 de esta misma sección se tiene

$$\lim_n n\log(1+a/n) = \lim_n n\frac{a}{n}\frac{\log(1+a/n)}{a/n} = a$$

En consecuencia el límite buscado es $(a+b+c)/3$. □

El límite anterior sirve para mostrar que MAXIMA puede calcular algunos límites de sucesiones que dependan de parámetros (a, b, c en nuestro caso). Así ante el comando

```
limit( (1/3)*n*log( (n+a)*(n+b)*(n+c) ) - log (n^n),n,inf );
```

MAXIMA pregunta sucesivamente en tres ocasiones si `a`, `b` y `c` son positivos o negativos; respondiendo en cada ocasión con

```
positive;
```

proporciona finalmente que el valor del límite es $(a+b+c)/3$.

2.9.6 *Sea $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria. Pruebe que existen sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($b_n \neq 0$) tales que $\lim_n a_n = 0 = \lim_n b_n$ y $c_n = a_n/b_n$.*

SOLUCIÓN: Basta tomar $a_n = \dfrac{c_n}{c_n^2 + n^2}$ y $b_n = \dfrac{1}{c_n^2 + n^2}$ y observar que

$$|a_n| = \frac{|c_n|}{c_n^2 + n^2} \leq \frac{1}{2n}, \quad b_n \leq \frac{1}{n^2}$$

para obtener el resultado. □

Ejercicios propuestos

2.1) Demuestre, aplicando las definiciones correspondientes, que la sucesión de termino general $x_n = \dfrac{5n-3}{2n-1}$ converge hacia $5/2$.

2.2) Utilizando el concepto de límite resuelva las siguientes cuestiones

a) Una sucesión es convergente y sus términos son alternativamente, positivos y negativos. ¿Cual es su limite? Razone la respuesta.

b) Pruebe que si
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lambda,$$
la sucesión $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots$ también tiene limite λ.

2.3) Pruebe que $\lim x_n = a$ equivale a $\lim z_n = 0$, siendo $z_n = |x_n - a|$.

2.4) Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales o complejos tales que existe el límite de las subsucesiones $(x_{2n})_n$, $(x_{2n+1})_n$,

a) ¿Existe $\lim x_n$?

b) Si además $\lim x_{3n}$, ¿existe $\lim x_n$?

2.5) Si $a > 0$ tomamos $x_1 > \sqrt{a}$ y definimos la sucesión recurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mediante la fórmula
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

a) Demuestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona decreciente y que $\lim_n x_n = \sqrt{a}$.

b) Sea $\varepsilon_n := x_n - \sqrt{a}$. Demuestre que
$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{a}}$$
y en consecuencia que
$$\varepsilon_{n+1} < \beta\left(\frac{\varepsilon_1}{\delta}\right)^{2^n}, \quad n = 1, 2, 3\ldots$$
en donde $\beta := 2\sqrt{a}$.

c) La sucesión $(x_n)_n$ proporciona un buen procedimiento para calcular aproximaciones decimales de una raíz cuadrada. Por ejemplo, tome $a = 3$ y $x_1 = 2$ y calcule el una estimación para ε_5, es decir, el error máximo que se comete al tomar el término x_5 como aproximación de $\sqrt{3}$ ¿cuantas cifras exactas proporciona x_7?

2.6) Sea $(x_n)_n$ la sucesión que tiene por términos

$$1, \frac{1}{1+1}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}, \dots$$

a) Encuentre una fórmula recurrente para los términos x_n, de la forma $x_{n+1} = f(x_n)$.

b) Calcule el límite de la sucesión.

Indicación: estudie por separado la subsucesión de los índices pares e impares.

2.7) Si $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$, para $n \geq 1$ y $0 < x_1 < 1$. Pruebe que x_n es una sucesión decreciente con limite 0. Pruebe también que $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ converge hacia $1/2$.

2.8) Calcule los siguientes límites:

Maxima puede ayudarle a obtener los resultados.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3+6+\cdots+3n}{n^2}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+7^{n+1}}{4^n+7^n}$

c) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-1} - (2n-1))$

d) $\lim_{n\to\infty} n\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\log n}$

e) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n^{\frac{3}{2}}+1} - \sqrt{n^2-n^{\frac{3}{2}}-1})$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{n}+2n+1)}{n^2+3}$

g) $\lim_{n\to\infty} \frac{(4n-2)(3n+1)(2n-5)^2}{n^2(2n+3)(3n-1)}$

h) $\lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt[3]{4}-4\sqrt[5]{n^2}}{\sqrt[3]{n}-3(4-\sqrt[5]{n})}$

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$

j) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{a})^n$

k) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3n]{n^3-1}$

l) $\lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{n}-3}{\sqrt{n}+1})^{\sqrt{n}}$

m) $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(\frac{1+n\log n}{n\log n})^n$

n) $\lim_{n\to\infty}(n^2+n)^{\frac{1}{n+2}}$

ñ) $\lim_{n\to\infty}(2+n^2)^{\frac{1}{\log n}}$

o) $\text{lím}_{n\to\infty}(\frac{\log(n+a)}{\log n})^{n\log n}$

2.9) Estudie si son de Cauchy las siguientes sucesiones

a) $a_n = \frac{3n^3+2n+1}{n^3+2}$;

b) $b_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$;

c) $c_n = \frac{\text{sen}\,1}{2} + \frac{\text{sen}\,2}{2^2} + \cdots + \frac{\text{sen}\,n}{2^n}$.

2.10) Analice la convergencia de la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por la fórmula

$$s_n = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \cdots + 1/n^2$$

SUGERENCIA: Compare con el ejercicio 4 de la página 83 y tenga en cuenta la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n^2} \quad \text{para } 1 < n \in \mathbb{N}$$

2.11) Calcule el límite de la siguiente sucesión:

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}$$

2.12) *Este ejercicio presenta un resultado importante que constituye un criterio útil a la hora de calcular límites*
Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales con límite $a \in \mathbb{R}$. Pruebe que

$$\text{lím}_n \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

INDICACIÓN: Comience suponiendo que $a = 0$.

2.13) *Este ejercicio presenta un resultado importante que constituye...*
Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, con $a_n > 0$ y $łim_n a_n = a$.

a) Demuestre que $\text{lím}_n \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a$.

b) Demuestre que si existe
$$\text{lím}_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$$
entonces $\text{lím}_n \sqrt[n]{a_n} = b$.

INDICACIÓN: Para el primer apartado si $a = 0$ razone directamente y si $a > 0$ calcule logaritmos y utilice el ejercicio anterior.
Para el segundo apartado, sea $b_1 = a_1$ y $b_n = a_{n+1}/a_n$ para $n \geq 2$. Estudie la sucesión $\sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}$.

2.14) Sea $(a_n)_n$ una sucesión acotada superior e inferiormente. Supongamos que existe $a := \lim a_n - a_{n-1}$. ¿Cuanto vale a? Justifique la respuesta.

Suponga ahora que $a = 0$. ¿Es la sucesión $(a_n)_n$ necesariamente convergente? Justifique la respuesta.

2.15) Sobre la constante de Euler

a) Deduzca las siguientes desigualdades $\dfrac{1}{n+1} < \log(1 + \dfrac{1}{n}) < \dfrac{1}{n}$

b) Pruebe que la sucesión

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

es convergente. A su límite se le denomina la constante de Euler y es usualmente denotada como γ (más sobre el tema en wikipedia). Utilice MAXIMA para obtener las primeras cifras decimales de γ.

c) Calcule $\lim_n \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

2.16) Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente (resp. inferiormente) y sea $\alpha = \sup A$ (resp. $\alpha = \inf A$). Pruebe que existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $\alpha = \lim_n a_n$.

2.17) En caso de que sean convergentes, calcule el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\lim_{n\to\infty} 2^{\sqrt{n}}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{\ln n}$

c) $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$

g) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$

h) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-2n+1} - \sqrt{n^2-7n+3}$

i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2}[\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}]$

j) $\lim_{n\to\infty} n(0.9)^n$

k) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}\ ; a > 0$

l) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n}$

m) $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}$

n) $\text{lím}_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^2+n}$

ñ) $\text{lím}_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{1+e^n}$

o) $\text{lím}_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

p) $\text{lím}_{n\to\infty}(\frac{2}{n+1})^{2/(2+\ln n)}$

q) $\text{lím}_{n\to\infty} \left(\frac{2^{-n}+(-2)^n}{2^n}\right) + i\left(\frac{2^n+(-2)^n}{3^n}\right)$

r) $\text{lím}_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{2n^2}\right) + i\left(\frac{10^6n^3+3n^2}{10^{-12}n^4-10n^3}\right)$

MAXIMA puede serle de utilidad para verificar sus cálculos.