4

Cálculo diferencial

Competencias

- Adquirir el concepto de derivada y las destrezas necesarias para el cálculo de derivadas de funciones concretas utilizando operaciones con funciones derivables, las derivadas de las funciones elementales y la propia definición.
- Saber aplicar el cálculo diferencial para el estudio del comportamiento y el dibujo de funciones y para la resolución de problemas concretos (optimización, desigualdades...) que pueden ser abordados mediante el análisis de ciertas funciones.
- Comprender el significado de los desarrollos de Taylor y saber utilizarlos para realizar cálculos aproximados del valor de una función, para la discusión del comportamiento local de funciones, para la estimación de tamaños relativos, desigualdades, convexidad, etc.
- Saber usar los potencialidades de grafismo, cálculo simbólico y numérico de Maxima como herramienta de apoyo en la formulación y resolución de los problemas abordados en este capítulo.

Contenidos

La derivada es uno de los conceptos más útiles en el estudio de las funciones reales, no sólo desde un punto de vista abstracto sino como herramienta práctica para la modelización matemática de diferentes fenómenos de la realidad, en particular de la Física, donde es sobradamente conocida la conexión existente entre la derivada y la velocidad (o la aceleración) de una partícula en movimiento.

Las rectas son las funciones cuyo comportamiento es más simple. La derivada está conectada con la posibilidad de aproximar, al menos localmente, una función mediante una recta. Aún sin definir el contenido preciso que asignamos a los términos, es claro que una recta no va a permitir «aproximar» una función «bastante general» con carácter global. La aproximación podrá ser adecuada únicamente con carácter local y ello si es elegida una «buena recta».

A las rectas siguen, en grado de dificultad, los polinomios. Las funciones polinómicas son más flexibles y es razonable plantearse la pregunta de si los polinomios podrán ser utilizados como alternativa a las rectas en la aproximación de las funciones.

Este tipo de cuestiones y sus consecuencias más destacadas constituyen el eje central de este capítulo. Los resultados principales son el teorema del valor medio (en diferentes formulaciones) y su generalización a través del teorema de Taylor, así como la aplicación de los mismos al estudio local de una curva o al cálculo de extremos de funciones. En todo este capítulo nos limitaremos a considerar funciones reales de variable real.

4.1. Funciones derivables

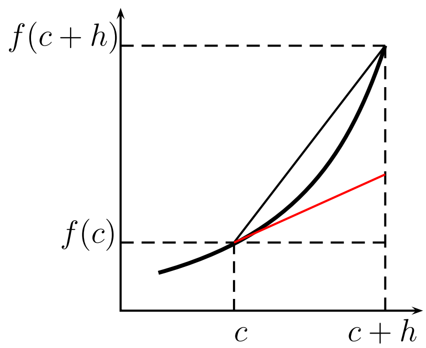
Definición 4.1.1 *Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ se dice que es derivable en $c \in I$ si existe*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} := f'(c).$$

El valor $f'(c)$ recibe el nombre de derivada de f en c y es frecuente llamar a

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

cociente incremental de f en c.



El cociente incremental representa la «tasa de variación media» de la función entre los puntos c y $c+h$. Es este un concepto usado en muchas situaciones para modelizar matemáticamente comportamientos en promedio de ciertas magnitudes. El concepto de velocidad media de un móvil es bien conocido: $f(x)$ representa la distancia al punto de partida de un móvil al cabo del tiempo x y

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

es el cociente entre el espacio recorrido desde el tiempo c al $c+h$ dividido por el tiempo empleado en hacerlo. Si $f(x)$ representa el número de bacterias en un determinado cultivo al cabo del tiempo x el cociente

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

representa ahora la tasa de crecimiento medio de la población bacteriana entre los instantes c y $c+h$. Modelos análogos se utilizan para medir la productividad media en un proceso industrial, la productividad de una inversión financiera, etc.

La derivada es una abstracción matemática para formular la «tasa de variación instantánea» de un determinado proceso, entendida como límite de la tasa de variación media al tender a cero la longitud del intervalo en el que se mide la variación.

Definición 4.1.2 *Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I se dice derivable en I si f es derivable en cada punto de I. La función $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ así definida se llama la derivada de la función f.*

Ejemplos 4.1.3 En los ejemplos que siguen, salvo que se indique lo contrario, el intervalo I será siempre abierto.

(1) Si $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función constante en un intervalo I, entonces f es derivable en I con derivada nula.
Esto es evidente, puesto que $f(x+h)-f(x)=0$ siempre que $x, x+h \in I$ y por tanto el cociente incremental es nulo.

(2) Si $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f(x)=x$ entonces f es derivable en I con derivada $f'(x)=1$ para todo $x \in I$.
En efecto, el cociente incremental en este caso siempre vale 1 ya que

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1 \quad x, x+h \in I.$$

(3) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)=|x|$, es derivable siempre en todo punto $c \neq 0$ siendo $f'(c)=1$ si $c>0$ y $f'(c)=-1$ si $c<0$, como es sencillo comprobar. En cambio en $c=0$ no es derivable ya que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \neq \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

La existencia de derivada en un punto interior de un intervalo requiere un cierto nivel de «suavidad» en el gráfico de la función: los puntos «angulosos» de la gráfica son puntos en los que, como ocurre con la función valor absoluto, no existe la derivada.

(4) La función f definida en $\mathbb{R}$ mediante $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es la función $f'(x) = nx^{n-1}$.
Para comprobarlo basta utilizar la definición y desarrollar $(x+h)^n$ mediante el binomio de Newton. En efecto:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k}{h} = \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

(5) La función seno, $g(x) = \operatorname{sen} x$, es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada $g'(x) = \cos x$ y la función coseno, $g(x) = \cos x$, también es derivable en $\mathbb{R}$ con derivada $g'(x) = -\operatorname{sen} x$.
Para hacer la derivada del seno basta recordar que

$$\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x = 2\cos[(2x+h)/2] \operatorname{sen}(h/2)$$

y admitir[1] que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos[(2x+h)/2] \operatorname{sen}(h/2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \cos[(2x+h)/2] \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} = \cos x. \end{aligned}$$

La derivada del coseno puede hacerse de forma análoga, resultando que

$$(\cos)'(x) = -\operatorname{sen} x.$$

[1] Una demostración de esta afirmación requiere la definición analítica precisa de la función seno que realizaremos en el capítulo 8. A pesar de ello, el lector podrá aceptar sin dificultad dibujando una circunferencia de radio 1 y un pequeño arco de amplitud $0 < x < \pi/4$ a partir de $0X$ (véase la figura de la página 96), que

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

dividiendo por $\operatorname{sen} x$ y utilizando la regla del sándwich se obtiene inmediatamente que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1.$$

(6) La función exponencial, $f(x) = e^x$, es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es la función $f'(x) = e^x$. Para probarlo observemos que, por la proposición 2.7.1, se tiene

$$\lim_{y\to 0} y^{-1}\log(1+y) = \lim_{y\to 0}\log(1+y)^{1/y} = 1,$$

de donde se sigue (haciendo el cambio de variable $e^h - 1 = y$) que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1.$$

Así pues:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x\frac{e^h-1}{h} = e^x.$$

(7) La función logaritmo, $f(x) = \log x$ es derivable en $(0,\infty)$ y $f'(x) = 1/x$.

(8) La función f definida por las fórmulas $f(x) = x\operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ no es derivable en $x = 0$. En cambio sí es derivable en todo $\mathbb{R}$ la función g dada por $g(x) = x^2\operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$.

Trate de demostrar la fórmula para la derivada del logaritmo; el ejercicio 2.9.3 puede serle útil. Volveremos sobre este tema en el teorema 4.2.13. Demuestre también las afirmaciones del ejemplo 8. Aunque no le va a ayudar en las demostraciones, si dibuja con Maxima las funciones f y g del ejemplo en cuestión en intervalos muy pequeños $[0, 0.001]$ podrá visualizar por qué una es suave y la otra no.

En la definición 4.1.1 puede reemplazarse el intervalo abierto I por cualquier abierto $\Omega \subset \mathbb{R}$ supuesto que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Incluso para intervalos que no sean abiertos puede tener sentido

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

siempre que $c,\ (c+h) \in I$, lo cual, en el caso de que c sea uno de los extremos del intervalo I puede reducirse a un límite por la derecha o por la izquierda. En ese caso todavía se dice que la función f es derivable en c.

Lo anterior lleva, para funciones definidas en un intervalo en que los límites

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} := f'(c^+) \qquad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} := f'(c^-)$$

existan, al concepto de derivada por la izquierda $f'(c^-)$ de f en c y de derivada por la derecha $f'(c^+)$ de f en c.

Un ejemplo típico de esta situación es la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. En $x = 0$ la función no es derivable, pero tiene derivada por la izquierda y por la derecha.

> Maxima es capaz de calcular derivadas de funciones de manera formal mediante `diff(`*Función*`,x,`*Número*`);` donde *Número* es 1 (no hay que ponerlo) si se trata de la primera derivada, 2 para la segunda, etc. Pero también le puede ayudar en un acercamiento experimental a la noción de derivada.

Definición 4.1.4 *Llamaremos entorno reducido de $a \in \mathbb{K}$ a cualquier conjunto de la forma $V \setminus \{a\}$ siendo V un entorno de a.*

Observación 4.1.5 El hecho de que exista la derivada de f en c y valga m puede formularse diciendo que

$$f(c+h) = f(c) + mh + h\alpha(h) \tag{4.1}$$

donde $\alpha(h)$ es una función definida en un entorno reducido del origen con la propiedad de que $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. En efecto, si la función f es derivable en c, en el sentido de la definición 4.1.1, definiendo

$$\alpha(h) = \frac{f(c+h)}{h} - f'(c)$$

se tiene que α está definida en un entorno reducido de 0, siendo $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. Despejando en la fórmula anterior $f(c+h)$ se obtiene

$$f(c+h) = f(c) + f'(c)h + h\alpha(h)$$

que es justo la ecuación (4.1) con $m = f'(c)$. Recíprocamente, si se cumple la ecuación (4.1), despejando ahora m se obtiene

$$m = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} + \alpha(h)$$

y como $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$, resulta que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = m,$$

con lo cual f es derivable en c y $f'(c) = m$.

La ecuación 4.1 también se escribe a veces en la forma

$$f(c+h) = f(c) + mh + o(h) \tag{4.2}$$

donde $o(h)$ representa una función definida en un entorno reducido de 0 con la propiedad de que $\lim_{h\to 0} \dfrac{o(h)}{h} = 0$. La función $o(h)$ se llama una «*o pequeña de h*».

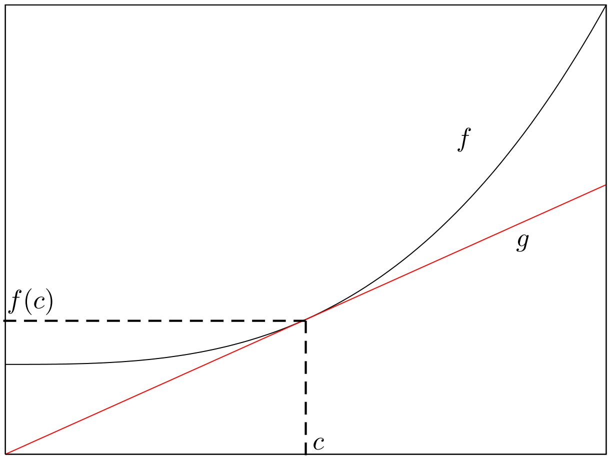


Figura 4.1: La recta tangente

La función g (véase la figura 4.1) definida por $g(x) = f(c) + m(x - c)$ tiene por gráfico una recta de pendiente m que pasa por el punto $(c, f(c))$. Dicha función recibe el nombre de *recta tangente a la curva* $y = f(x)$ *en el punto* $(c, f(c))$.

Definición 4.1.6 *Una función* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *se dice diferenciable en el punto* $c \in I$ *si existe una aplicación lineal* $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, llamada diferencial de* f *en* c *y denotada con* $df(c)$*, tal que* $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c) - L(h)}{h} = 0$.

La diferencial es una aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que aproxima el incremento de la función en el sentido de que $f(c+h) - f(c) = df(c)(h) + o(h)$.

De lo anterior se deduce el resultado siguiente.

Proposición 4.1.7 f *es una función derivable en el punto* c *si y sólo si* f *es diferenciable en* c *y, en ese caso,* $df(c)(x) = f'(c)x$.

Utilice sus conocimientos básicos de álgebra lineal para identificar todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. ¿Por qué número están caracterizadas? ¿Cuál es ese número en el caso de la diferencial de f en c? ¿Es claro lo que significa la fórmula

$$df(c)(1) = f'(c)$$

y que es cierta?

Proposición 4.1.8 *Si* $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función derivable en* $c \in I$ *entonces* f *es continua en* c.

Demostración: De la fórmula

$$f(c+h) = f(c) + mh + o(h)$$

se sigue que $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$ que corresponde a la continuidad de f en el punto c. □

El recíproco no es cierto. Basta considerar la función f definida en $\mathbb{R}$ por la fórmula $f(x) = |x|$.

> Operaciones rutinarias para el cálculo de la recta tangente en un punto, el dibujo de la misma en relación con la curva, pueden ser realizadas de forma sencilla con MAXIMA.

Algunas fórmulas elementales para el cálculo de derivadas vienen dadas por las proposiciones que siguen.

Proposición 4.1.9 *Si f, g son funciones del intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ derivables en un punto $c \in I$ entonces:*

(1) La suma $f+g$ es derivable en c con

$$(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c).$$

(2) El producto fg es derivable en c con

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

(3) Si $g(x) \neq 0$ en I entonces f/g es derivable en c y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g^2(c)}.$$

DEMOSTRACIÓN: El primer apartado se obtiene de forma inmediata aplicando la definición de derivada, ya que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(c+h) - (f+g)(c)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) + g(c+h) - f(c) - g(c)}{h} \\ & \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(c+h) - g(c)}{h} \\ &= f'(c) + g'(c)\end{aligned}$$

Observe cómo el límite de la suma es igual a la suma de los límites, pues la derivabilidad de f y g en c garantiza la existencia del límite de los dos sumandos.

Para el segundo, escribiendo la definición de derivada y sumando y restando $f(c)g(c+h)$ observamos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)g(c+h) - f(c)g(c)}{h} &= \lim_{h\to 0} g(c+h)\frac{f(c+h) - f(c)}{h} + \\ &+ \lim_{h\to 0} f(c)\frac{g(c+h) - g(c)}{h} \\ &= g(c)h'(c) + f(c)g'(c)\end{aligned}$$

ya que g es continua en c, por ser derivable en dicho punto (proposición 4.1.8).

Para probar la fórmula de la derivada del cociente escribimos:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f}{g}(c+h) - \frac{f}{g}(c)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)g(c) - f(c)g(c+h)}{hg(c)g(c+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)g(c) - f(c)g(c) + f(c)g(c) - f(c)g(c+h)}{hg(c)g(c+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} g(c)\frac{f(c+h) - f(c)}{hg(c)g(c+h)} + \lim_{h\to 0} f(c)\frac{g(c) - g(c+h)}{hg(c)g(c+h)} \\
&= g(c)\frac{f'(c)}{g^2(c)} + f(c)\left(-\frac{g'(c)}{g^2(c)}\right)
\end{aligned}$$

sin más que recordar, de nuevo, que la función g es continua en c. □

Observe que en la fórmula de la derivada del cociente aparece la expresión $g^2(c)$ que no es más que una forma rápida de escribir la cantidad $(g(c))^2$. En realidad es lógico escribir $g^2(c)$, ya que g^2 es una nueva función definida mediante $g^2(c) := (g(c))^2$. Esta notación es más clara que la alternativa $g(c)^2$.

Proposición 4.1.10 (Regla de la cadena) *Sean I_1, I_2 intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ y sean las funciones $f_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f_1(I_1) \subset I_2$. Si f_1 es derivable en $c \in I_1$ y f_2 es derivable en $f_1(c)$ entonces $f_2 \circ f_1$ es derivable en c y*

$$(f_2 \circ f_1)'(c) = f_2'(f_1(c))f_1(c).$$

Demostración: El resultado se obtiene utilizando que

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + h\alpha(h); \quad g(f(c)+k) = g(f(c)) + kg'(f(c)) + k\beta(k)$$

donde $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = \lim_{h\to 0} \beta(h) = 0$. En efecto:

$$\begin{aligned}
g(f(c+h)) &= g(f(c) + hf'(c) + h\alpha(h)) \\
&= g(f(c)) + (hf'(c) + h\alpha(h))g'(f(c)) + \\
&\quad + (hf'(c) + h\alpha(h))\beta\Big(hf'(c) + h\alpha(h)\Big) \\
&= g(f(c)) + hf'(c)g'(f(c)) + \\
&\quad + h\Big(\alpha(h)g'(f(c)) + (f'(c) + \alpha(h))\beta\Big(hf'(c) + h\alpha(h)\Big)\Big),
\end{aligned}$$

es decir,

$$g \circ f(c+h) = g \circ f(c) + hf'(c)g'(f(c)) + h\gamma(h),$$

donde $\lim_{h\to 0} \gamma(h) = 0$. Esto acaba la prueba del teorema, de acuerdo con la observación 4.1.5. □

Ejemplos 4.1.11 Vamos a aplicar los resultados anteriores (particularmente las proposiciones 4.1.9 y 4.1.10 más los ejemplos 4.1.3) y la definición de derivada para calcular la derivada de algunas funciones.

(1) Para estudiar la derivabilidad y, en su caso, calcular la derivada de la función definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

consideraremos en primer lugar que $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$. Hemos visto que la función $x \mapsto x$ es derivable y su derivada en todo punto es 1 (v. 4.1.3); por tanto, salvo para $x = 0$, la función $g_1(x) := 1/x$ es derivable y su derivada es $g_1'(x) = -1/x^2$ (v. 4.1.9). También que $g_2(x) := x^2$ es derivable siendo su derivada la función $g_2'(x) = 2x$ (v. 4.1.3). La función $g_3(z) := \operatorname{sen} z$ también es derivable y su derivada $g_3'(z) = \cos z$ (v. 4.1.3). Aplicando la regla de la cadena (4.1.10) se tiene que la función $g_4(x) := \operatorname{sen} 1/x = g_3 \circ g_1(x)$ es derivable y su derivada es

$$g_4'(g_1(x))g_1'(x) = \cos(g_1(x))(-1/x^2) = \frac{-\cos 1/x}{x^2}.$$

Por último la aplicación

$$g_5(x) := \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} = (\operatorname{sen} \frac{1}{x})^2 = g_2 \circ g_4(x)$$

y por tanto también es derivable, por la regla de la cadena, siendo su derivada

$$g_5'(x) = g_2'(g_4(x)) \cdot g_4'(x) = 2g_4(x) \cdot g_4'(x) = 2(\operatorname{sen} 1/x)\frac{-\cos 1/x}{x^2}$$

Ahora bien $f(x) = g_2(x) \cdot g_5(x)$ y por tanto se trata de una función derivable, por ser producto de funciones derivables, siendo su derivada (v. 4.1.9)

$$\begin{aligned} f'(x) = g_2'(x) \cdot g_5(x) + g_2(x) \cdot g_5'(x) &= 2x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} + x^2 2(\operatorname{sen} 1/x)\frac{-\cos 1/x}{x^2} \\ &= 2x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} - \operatorname{sen} \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Somos conscientes de que usando «recetas» aprendidas el lector podría haber encontrado la fórmula para $f'(x)$, pero, posiblemente, no habría sido consciente de que son las proposiciones que hemos ido realizando en esta primera sección del capítulo las que dan soporte a esas recetas. En este nivel no sólo hay que manejar con destreza las recetas, sino que además hay que saber dar razón de ellas.

Para todos los $x \neq 0$ la función f viene dada por la fórmula $f(x) = x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$ y hemos visto que f es derivable siendo $f'(x) = 2x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} - \operatorname{sen} \frac{2}{x}$. Sólo nos queda ya estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$. Pero ¡cuidado! no debe pensarse, como alguno de nuestros alumnos escribió en cierta ocasión, que siendo f constante en $x = 0$ su derivada es 0: ¡cualquier función es constante en $x = 0$! Para calcular la derivada en $x = 0$ hay que acudir a la definición.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h \operatorname{sen}^2 \frac{1}{h} = 0$$

debido a que la función seno es acotada.

(2) Analicemos ahora la derivabilidad y calculemos la derivada de la función f definida mediante $f(x) = x^x$ en los puntos en que sea posible. La primera cuestión a tener en cuenta es que f sólo está definida cuando $x > 0$ (véase la sección 2.5) siendo

$$f(x) = x^x = e^{x \log x}.$$

Como la funciones identidad ($x \mapsto x$), logaritmo (para $x > 0$) y exponencial son derivables, se obtiene que f también lo es (utilice un proceso de descomposición análogo al del ejemplo anterior), siendo

$$f'(x) = e^{x \log x}(\log x + x\frac{1}{x}) = x^x(\log x + 1). \tag{4.3}$$

Resulta que f está definida en el intervalo $(0, \infty)$ y es derivable en todos los puntos, siendo su derivada la que aparece en la fórmula (4.3). Cabe preguntarse si será posible prolongar de forma «natural» (lo cual significa de forma continua) f en $x = 0$ y así es, ya que existe $\lim_{x\to 0} e^{x \log x} = e^0 = 1$ porque, aunque $\lim_{x\to 0} x \log x$ corresponde a una indeterminación, en el enfrentamiento $x \to 0$ con $\log x \to -\infty$ «gana» la x (cuestión de tamaños).

En el corolario 2.7.3 se demostró que $\log n \ll n^b$ para todo $b > 0$. En particular para $b = 1$ esto significa que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n} = \infty$. De ello se puede deducir, cambiando el signo en el lugar adecuado, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = 0$$

Y ahora se puede generalizar para obtener

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0$$

Para ello basta mayorar por una expresión en términos de $\left[\frac{1}{x}\right]$. Realice los detalles de todo esto.

Siendo analíticamente escrupulosos la cuestión funciona así:

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\log(1/x)}{1/x} = \lim_{y\to +\infty} \frac{-\log y}{y} = 0$$

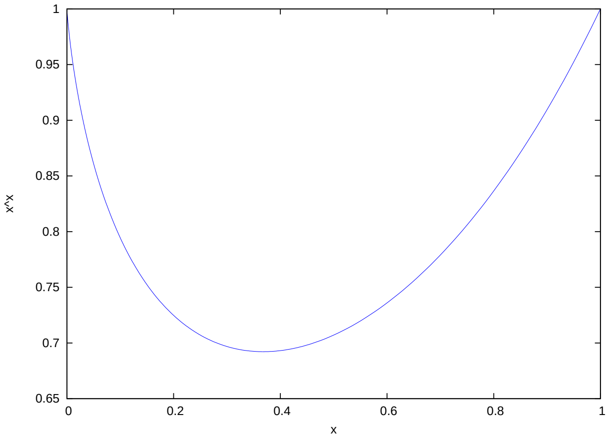


Figura 4.2: Gráfica de la función $f(x) = x^x$ en $[0, 1]$

En consecuencia el dominio de f es $[0, \infty)$ y hacemos $f(0) = 1$, para que f sea continua. La posibilidad de derivar f en $x = 0$ y el valor de la derivada, en su caso, depende del siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{h \log h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h \log h}{h} = \lim_{h \to 0^+} \log h = -\infty$$

donde hemos recurrido al cálculo de $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ realizado en el ejercicio 2.9.3. Así pues, f no es derivable en 0.

La figura 4.2 ha sido realizada con Maxima: genérela. ¿Qué ocurre al dibujarla para $x \in [-1, 1]$? Utilice esta herramienta para calcular las derivadas de las funciones de los ejemplos 4.1.11, prestando especial atención al origen.

4.2. Extremos de funciones derivables. Teoremas del valor medio

Recordemos que una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo I se dice creciente si $x < y$ implica que $f(x) \leq f(y)$ cualesquiera que sean los puntos $x, y \in I$. La función se llama estrictamente creciente si se verifica que $f(x) < f(y)$ siempre que $x < y$.

La función f se dice decreciente si $x < y$ implica que $f(x) \geq f(y)$ cualesquiera que sean los puntos $x, y \in I$. Y estrictamente decreciente si $x < y$ implica que $f(x) > f(y)$ cualesquiera que sean los puntos $x, y \in I$.

Las definiciones anteriores corresponden a propiedades globales de crecimiento en el intervalo. La definición que sigue formula los conceptos con carácter local, de forma coherente con los correspondientes conceptos globales.

Definición 4.2.1 *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Sea $c \in I$, se dice que:*

(1) f es creciente (respectivamente, estrictamente creciente) en c, si existe un entorno reducido V de c tal que

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \quad \textit{(respectivamente } \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0\textit{)}$$

para cada $x \in I \cap V$.

(2) f es decreciente (respectivamente, estrictamente decreciente) en c, si existe un entorno reducido V de c tal que

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \quad \textit{(respectivamente } \frac{f(x)-f(c)}{x-c} < 0\textit{)}$$

para cada $x \in I \cap V$.

(3) f tiene un máximo local en $c \in I$ si existe un entorno V de c tal que

$$f(x) \leq f(c)$$

para todo $x \in V$.

(4) f tiene un mínimo local en $c \in I$ si existe un entorno V de c tal que

$$f(x) \geq f(c)$$

para todo $x \in V$.

(5) f tiene un extremo relativo en c si f tiene en c un máximo o un mínimo relativo.

Observe que f es creciente en c significa que en un entorno V de c se tiene que $f(x) \geq f(c)$ para $x \in V$, $x > c$, y $f(x) < f(c)$ para $x \in V$, $x < c$. Un comentario análogo puede hacerse para las otras propiedades de crecimiento, estricto o no, en c. No debe confundirse esta noción local, referida a los valores que toma f en comparación al valor $f(c)$ con el crecimiento o decrecimiento en un entorno de c, por muy pequeño que éste sea, véase a este respecto la observación 4.2.4 (3).

El siguiente resultado establece la equivalencia entre el crecimiento global y el crecimiento local en cada uno de los puntos del intervalo.

Proposición 4.2.2 *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Son equivalentes:*

(1) f es creciente (decreciente) en I.

(2) f es creciente (decreciente) en cada $x \in I$.

Demostración: Evidentemente la segunda afirmación es consecuencia de la primera.

Recíprocamente, supongamos f creciente en cada $x \in I$. Sea y con $x < y$; se trata de probar que $f(x) \leq f(y)$. Consideramos $A := \{z : z \in (x, y], f(x) \leq f(z)\}$. El conjunto A es no vacío, pues f es creciente en x, y A está acotado superiormente por y; sea $\alpha := \sup A$. Para obtener el resultado buscado es suficiente probar que $\alpha = y$ y que $f(x) \leq f(\alpha)$.

Como f es creciente en α existe $\delta > 0$ con $f(z) \leq f(\alpha)$ para cada $z \in (\alpha-\delta, \alpha)$. Pero por definición de α existe z_0 con $\alpha-\delta < z_0$ y $z_0 \in A$ siendo, por tanto, $f(x) \leq f(z_0)$; aplicando la propiedad transitiva se obtiene finalmente que $f(x) \leq f(\alpha)$.

Veamos ahora que $\alpha = y$. Desde luego $\alpha \leq y$; pero si fuera $\alpha < y$ existiría $z \in I$ con $\alpha < z \leq y$ y tal que $f(\alpha) \leq f(z)$, debido al crecimiento de f en α; pero entonces se tendría $f(x) \leq f(\alpha) \leq f(z)$, es decir, $z \in A$ lo que contradice el que $\alpha = \sup A$. □

Proposición 4.2.3 *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I, sea $c \in I$ y f derivable en c.*

(1) Si $f'(c) > 0$ entonces f es estrictamente creciente en c.

(2) Si $f'(c) < 0$ entonces f es estrictamente decreciente en c.

(3) Si c es un punto interior del intervalo I, f es derivable en c y c es un extremo relativo, entonces $f'(c) = 0$.

Demostración: Es una consecuencia inmediata de la definición 4.2.1 y del significado de $f'(c)$. □

Observaciones 4.2.4

(1) La anulación de la derivada en un punto no implica que la función tenga un extremo en dicho punto. Un ejemplo de ello es la función $f(x) = x^3$ (v. la figura 4.3) que es estrictamente creciente a pesar de que $f'(0) = 0$.

(2) La función $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$, tiene un máximo relativo en $x = 1$ y sin embargo $f'(1) = 1 \neq 0$.

(3) No debe confundirse el que una función sea creciente en un punto con que lo sea en un entorno del punto. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 2x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ verifica que $f'(0) = 1$ y por tanto es estrictamente creciente en $x = 0$; sin embargo su derivada $f'(x) = 1+4x \operatorname{sen}(1/x)-2\cos(1/x^2)$, para $x \neq 0$, toma valores positivos y negativos en cada entorno reducido de 0. Entonces f no puede ser estrictamente creciente en ningún entorno de 0 pues, si así fuera, no podría ser decreciente en ningún punto, pero lo es en todos aquellos en los que su derivada es estrictamente negativa.

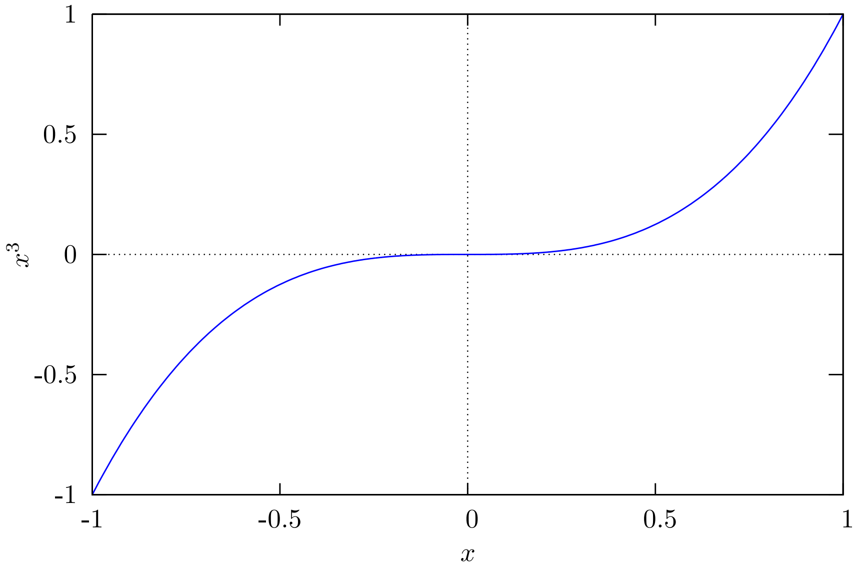


Figura 4.3: La función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente aunque tenga derivada nula en el origen.

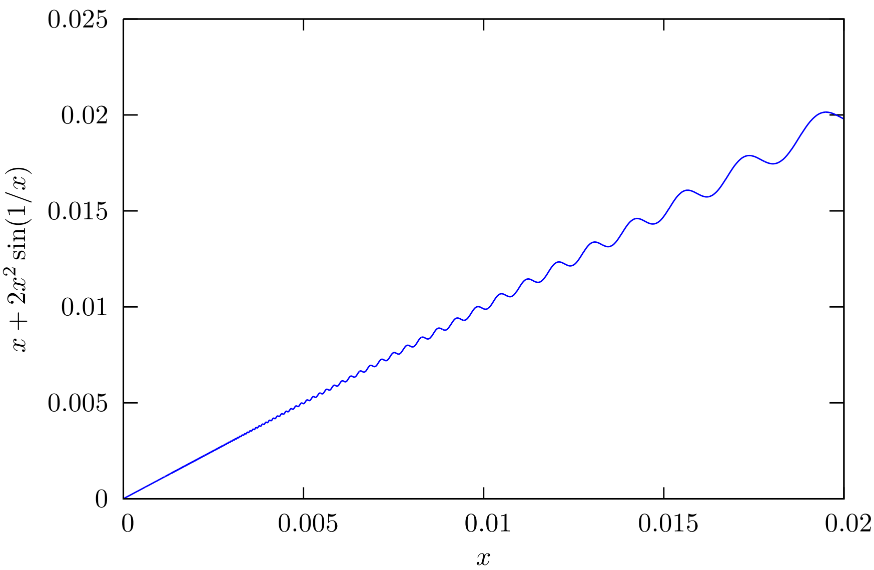
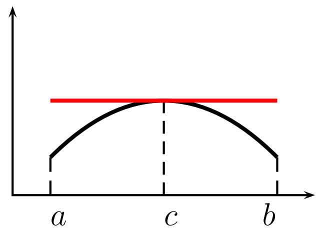


Figura 4.4: La gráfica de la función de la observación 4.2.4 (3). Aunque se ha elegido un intervalo bastante pequeño, el crecimiento aparente cerca de 0 se debe a problemas de precisión y a que las oscilaciones son muy pequeñas en comparación con el grosor del trazo. Conviene darse cuenta de que la gráfica oscila todo el tiempo, como lo hace, de forma aparente, en la zona derecha.

Verifique con rigor la afirmación realizada antes: la derivada $f'(x) = 1 + 4x\,\mathrm{sen}(1/x) - 2\cos(1/x)$, para $x \neq 0$, toma valores positivos y negativos en cada entorno reducido de 0.

Teorema 4.2.5 (Teorema de Rolle) *Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN:



Si la función es constante entonces tomando

$$c := \frac{a + b}{2}$$

(o cualquier otro punto) se tiene el resultado. Si la función no es constante utilizando el teorema de Weierstrass 3.3.1 sabemos que la función f posee un máximo y un mínimo absoluto en $[a, b]$. Alguno de ellos ha de alcanzarse en un punto c interior al intervalo, es decir, en $c \in (a, b)$, porque se trata de una función no constante y $f(a) = f(b)$. Pero entonces podemos aplicar el tercer apartado de la proposición 4.2.3 para concluir que $f'(c) = 0$. □

Corolario 4.2.6 (Teorema del valor medio de Cauchy)
Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas. Si f, g son derivables en (a, b) entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.

DEMOSTRACIÓN: Basta considerar la función h definida por

$$h(x) := (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$$

y aplicarle el teorema de Rolle 4.2.5 □

Observación 4.2.7 La conclusión del teorema del valor medio de Cauchy se escribe a menudo en la forma:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} =$$

(entre otras razones porque puede ser más fácil de recordar). Pero, ¿son equivalentes ambas formas? Obviamente los problemas pueden venir de que se presenten ceros de los denominadores en la fórmula anterior, de manera que la primera formulación es, en principio, más general. Observe sin embargo que si tenemos garantizado que $g'(x)$ no se anula en (a, b), entonces, por el teorema de Rolle, se debe tener $f(b) - f(a) \neq 0$, y, en tal caso, la concusión puede escribirse en forma de fracción.

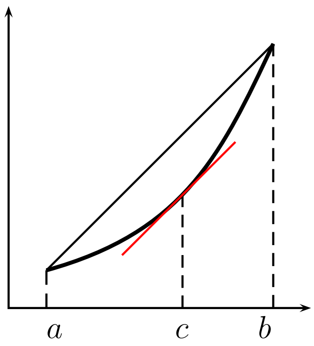


Figura 4.5: Significado geométrico del teorema de Lagrange: la recta secante es paralela a alguna de las rectas tangentes

Corolario 4.2.8 (Teorema del valor medio de Lagrange)
Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si f es derivable en (a, b), entonces existe $\theta \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(\theta)(b - a)$.

Demostración: Se obtiene como caso particular del teorema de valor medio de Cauchy tomando $g(x) := x$. La figura 4.5 esquematiza el contenido geométrico de este teorema. □

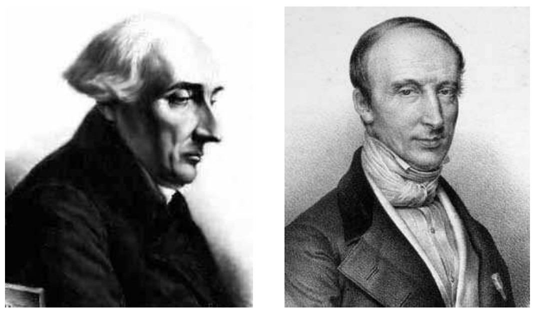


Figura 4.6: Joseph-Louis Lagrange (Turin, 1736 – Paris, 1813) y Augustin Louis Cauchy (Paris, 1789 – Paris, 1857). Biografías en MacTutor

A veces el teorema del valor medio de Lagrange se enuncia en la forma siguiente: existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'\Big(\lambda a + (1 - \lambda) b\Big)(b - a).$$

Naturalmente esto no es más que una forma de escribir todos los puntos de (a, b) como combinaciones lineales (con coeficientes que suman 1, es decir combinaciones convexas) de a y b.

En el esquema que hemos seguido hemos probado el teorema de valor medio de Lagrange a partir del teorema de Rolle. Pero de hecho, el teorema de Rolle es un caso particular del teorema de Lagrange. Así pues

$$\text{T. de Rolle} \Rightarrow \text{T. de Cauchy} \Rightarrow \text{T. de Lagrange} \Rightarrow \text{T. de Rolle}$$

O dicho de otro modo, los tres teoremas son equivalentes.

El teorema de Lagrange (y sus equivalentes) tiene consecuencias muy importantes, como tendremos ocasión de ir desgranando a lo largo de este capítulo. Una de ellas es que una función derivable cuya derivada está acotada necesariamente es uniformemente continua. En lugar de escribir nosotros los detalles proponemos al lector que los escriba él. ¡Sin miedo! Es una cuestión sencilla. Pero le permitirá profundizar un poco más en la comprensión del significado «intuitivo» de función uniformente continua.

Corolario 4.2.9 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)*

(1) Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es constante en $[a, b]$.

(2) $f'(x) \geq 0$ en (a, b) si y sólo si f es creciente en (a, b).

(3) $f'(x) \leq 0$ en (a, b) si y sólo si f es decreciente en (a, b).

(4) Si $f'(x) > 0$, en (a, b), entonces f es estrictamente creciente en (a, b).

(5) Si $f'(x) < 0$, en (a, b), entonces f es estrictamente decreciente en (a, b).

Demostración: Todas se realizan de forma sencilla aplicando el teorema de valor medio de Lagrange. Haremos la primera de ellas y dejamos al cuidado del lector la comprobación de las otras.

Fijado $x \in (a, b]$, por el teorema de Lagrange, aplicado al intervalo $[a, x]$, tenemos que $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$ para algún $c \in (a, x) \subset (a, b)$. Pero, por hipótesis, f' se anula en (a, b) y en consecuencia $f(x) = f(a)$ cualquiera que sea $x \in (a, b]$. Es decir, f es constante. □

Obsérvese que una función puede ser estrictamente creciente y tener derivada cero en algún punto, así ocurre, por ejemplo, con $f(x) = x^3$ y $c = 0$ (véase su gráfico en la página 141).

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces f es creciente (o decreciente) en (a, b) si y sólo si f es creciente (o decreciente) en $[a, b]$. Así pues en los apartados (2) y (3) del corolario anterior se puede reemplazar el crecimiento o decrecimiento en el intervalo abierto (a, b) por la misma propiedad en el cerrado $[a, b]$. Exactamente lo mismo se puede decir del crecimiento o decrecimiento estrictos (respecto a los apartados (3) y (4)). Justifique estas afirmaciones.

Corolario 4.2.10 *Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y sea $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

(1) Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) \leq 0$ para $x \in (c - \delta, c) \subset (a, b)$ y $f'(x) \geq 0$ para $x \in (c, c + \delta) \subset (a, b)$, entonces f posee un mínimo relativo en c.

(2) Si existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) \geq 0$ si $x \in (c-\delta, c) \subset (a,b)$ y $f'(x) \leq 0$ si $x \in (c, c+\delta) \subset (a,b)$, entonces f posee un máximo relativo en c.

Demostración: Se obtienen de forma sencilla utilizando el corolario anterior. En el primer caso: f es decreciente en $[c-\delta, c]$ y creciente en $[c, c+\delta]$, por tanto f posee un mínimo relativo en c. □

Ejemplo 4.2.11 La desigualdad de Bernoulli

$$(1+x)^n > 1 + nx; \qquad \text{si } x > -1, x \neq 0 \text{ y } n \in \mathbb{N} \text{ con } n > 1$$

puede ser demostrada por inducción sobre n cuando n es un número natural (ejercicio 1.3). Pero es cierta incluso cuando $n > 1$ es un número real, como mostraremos a continuación.

Para probarlo, fijemos un número real $\alpha > 1$ y consideremos la función f definida para $x > -1$ por la fórmula

$$f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x.$$

Como $f(0) = 0$, para obtener lo que pretendemos es suficiente probar que f es estrictamente creciente, si $x > 0$ y estrictamente decreciente si $-1 < x < 0$. Derivando tenemos que

$$f'(x) = \alpha\Big((1+x)^{\alpha-1} - 1\Big)$$

y mediante esta fórmula podemos obtener lo que deseamos. Si $x > 0$ entonces $1 + x > 1$ y por tanto $f'(x) > 0$, es decir f es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$. Por otra parte, si $-1 < x < 0$ entonces $0 < 1 + x < 1$ y por tanto $f'(x) < 0$, es decir f es estrictamente decreciente en $(-1, 0)$.

> Los resultados teóricos esta sección proporcionan instrumentos muy útiles para abordar problemas de optimización y verificación de desigualdades.

Si una función f es derivable y la derivada f' es continua, entonces f' posee la propiedad de los valores intermedios. Sin embargo, como se muestra a continuación, la continuidad de la derivada no es una condición necesaria para la validez de dicha propiedad.

Proposición 4.2.12 (Propiedad de los valores intermedios en derivadas) *Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y sean $x, y \in (a,b)$ tales que $f'(x) < \eta < f'(y)$. Entonces existe $z \in (a,b)$ tal que $f(z) = \eta$*

Demostración: Supongamos $x < y$ y consideremos la función g definida en $[x, y]$ mediante

$$g(t) = f(t) - \eta t.$$

La función g es continua y derivable. De acuerdo con el teorema de Weierstrass 3.3.1 alcanza un mínimo absoluto en un punto $z \in [x, y]$. Como $g'(x) < 0$, g es estrictamente decreciente en x, por lo que existe $x_1 > x$, tan próximo a x como queramos, tal que $g(x_1) < g(x)$. De forma análoga, como $g'(y) > 0$, existe $y_1 < y$ con $g(y_1) < g(y)$. No hay inconveniente en suponer $x_1 < y_1$, lo que significa que el mínimo de g en $[x, y]$, en realidad se alcanza en $[x_1, y_1] \subset (x, y)$, por tanto $z \in (x, y)$ y en consecuencia $g'(z) = 0$ (proposición 4.2.3), es decir, $f'(x) = \eta$. □

Teorema 4.2.13 (Teorema de la función inversa) *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en I y derivable en el interior de I con derivada no nula. Entonces f es una biyección de I sobre un intervalo J de $\mathbb{R}$ y*

$$f^{-1} : J \longrightarrow I$$

es continua en J y derivable en el interior de J con $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Demostración: Como f' no se anula, aplicando la proposición 4.2.12, obtenemos que o bien $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, o bien $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$; en otras palabras, f es estrictamente monótona. Así que f es una función biyectiva de I sobre un intervalo J siendo f^{-1} estrictamente monótona y continua (véanse el corolario 3.3.4 y el teorema 3.3.6). Por simplicidad en la notación, utilizaremos la x para referirnos a los elementos del intervalo I y la y para referirnos a los correspondientes elementos de J. Debido a que $f : I \longrightarrow J$ y $f^{-1} : J \longrightarrow I$ son biyecciones, a cada $x \in I$ le corresponde un único $y \in J$ tal que $f(x) = y$. Sean $y, y_0 \in J$ y pongamos $x = f^{-1}(y)$ y $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Entonces debido a que f y f^{-1} son estrictamente monótonas y continuas se tiene que $x \to x_0$ si y sólo si $y \to y_0$ y, además, $y \neq y_0$ si y sólo si $x \neq x_0$. A tenor de estas observaciones tenemos que

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}\end{aligned}$$

Lo que prueba que f^{-1} es derivable en y_0 (cualquiera que sea y_0 en el interior de J) y que

$$(f^{-1})'(y_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

que es justo lo que queríamos probar. □

Ejemplos 4.2.14 Podemos aplicar el teorema de la función inversa para calcular las derivadas de las funciones logaritmo, arco seno, arco coseno y arco tangente, puesto que tales funciones son las inversas de funciones cuyas derivadas ya fueron establecidas en los ejemplos 4.1.3.

(1) $f = \log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable con derivada

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

En efecto: f es la función inversa de $g : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ dada por $g(x) = e^x$. Así que utilizando la notación del teorema de la función inversa ($f = g^{-1}$) tenemos:

$$f'(y) = (g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(f(y))} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}.$$

(2) $f = \operatorname{arc\,sen} : (-1, 1) \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ es derivable con derivada

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

En efecto: f es la «inversa» de la función seno. Pero para ello hace falta que la función seno sea biyectiva, cosa que no ocurre si consideramos que su dominio es todo $\mathbb{R}$, en cambio sí es biyectiva tomando un dominio más reducido como, por ejemplo, el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. En resumen, tomando

$$g : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$

definida mediante $g(x) = \operatorname{sen}(x)$, entonces resulta que

$$f : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

es justamente g^{-1}. Utilizando de nuevo la notación del teorema de la función inversa se tiene:

$$f'(y) = (g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Y esto es justo lo que queríamos demostrar. Observe que al escribir $\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$ estamos eligiendo la rama positiva de la raíz cuadrada, esto es así porque variando x en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ sabemos que $\cos x$ es positivo.

Observe también que f no admite derivadas laterales en $\pi/2$ ni en $-\pi/2$, de modo que se ratifica el enunciado del teorema de la función inversa: sólo se puede asegurar que f^{-1} es derivable en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi/2)$.

(3) $f : \operatorname{arc\,cos} : (-1, 1) \longrightarrow (0, \pi)$ es derivable con derivada

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

La demostración es análoga a la anterior, utilizando ahora que f es la inversa de la función

$$g : (0, \pi) \longrightarrow (-1, 1)$$

definida por $g(x) = \cos x$ (¡complete los detalles!).

(4) $f = \operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ es derivable con derivada

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

La función que nos ocupa ahora es la «inversa» de la función tangente. La función tangente no está definida en los puntos en los que se anula el coseno; pero además, siendo las funciones seno y coseno periódicas, la función tangente también lo es y por tanto, al igual que ocurre con el seno y el coseno, no puede ser biyectiva a menos que tomemos un dominio adecuado. Pero sabemos que $\operatorname{tg}'(x) = 1/\cos^2 x > 0$ siempre que esté definida y eso ocurre, por ejemplo, considerando

$$g : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por $g(x) = \operatorname{tg} x$. Utilizando el mismo método que en los ejemplos anteriores

$$f'(y) = (g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{1/\cos^2 x} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2},$$

ya que al ser $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, dividiendo por $\cos^2 x$, se obtiene

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ o equivalentemente } \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

El resultado que sigue es de utilidad en la resolución de diversos tipos de indeterminaciones de la forma $\dfrac{0}{0}$ o bien $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Proposición 4.2.15 (regla de L'Hôpital) *Sean f, g funciones derivables en $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Supongamos que g y g' no tienen ceros en I y que se cumple una de las condiciones siguientes:*

(1) $\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = 0$.

(2) $\lim_{x \to b^-} g(x) = \pm\infty$.

Entonces, si existe

$$L := \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \widetilde{\mathbb{R}} \text{ también existe } \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

En el caso de que $x \to a^+$ los resultados son análogos. En consecuencia si f, g son derivables en $(a, b) \backslash \{c\}$, y existe

$$L := \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \widetilde{\mathbb{R}},$$

entonces también

$$L = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)},$$

siempre que se verifique que

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$$

o bien

$$\lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty.$$

En la demostración de la regla de l'Hôpital utilizaremos una forma especial de expresar un límite, concretamente: $\lim_{x \to b^-} \mu(x) = L \in \tilde{\mathbb{R}}$ equivale a que, para cada k_1, k_2 para los que tenga sentido $k_1 < L < k_2$ existe un entorno V de b de modo que $k_1 < \mu(x) < k_2$ siempre que $x \in V$. En efecto, si $L \in \mathbb{R}$ entonces es obvio que $k_1 < L < k_2$ tiene sentido y, dado $\varepsilon > 0$ en la definición usual del límite, basta tomar $k_1 = L - \varepsilon$ y $k_2 = L + \varepsilon$. En el caso $L = +\infty$ sólo tiene sentido $k_1 < L$, que no expresa más que k_1 es un número real arbitrario, mientras que $L < k_2$ no tiene sentido, no expresa nada. Algo análogo ocurre si $L = -\infty$ en cuyo caso sólo $L < k_2$ tiene sentido.
DEMOSTRACIÓN:

1) Supongamos k_1', k_2' tales que $k_1' < L < k_2'$. Tomamos k_1 y k_2 de modo que $k_1' < k_1 < L < k_2 < k_2'$. Entonces para $z \in V \cap (a, b)$ se tiene $k_1 < \frac{f'(z)}{g'(z)} < k_2$ y por tanto

$$k_1 < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} < k_2 \qquad x, y \in V \cap (a, b)$$

(observe que la hipótesis $g'(z) \neq 0$ implica que $g(x) \neq g(y)$). Tomando límites cuando $y \to b^-$ se tiene

$$k_1' < k_1 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq k_2 < k_2', \qquad x \in V \cap (a, b).$$

Es decir, $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, de acuerdo con la observación antes realizada.

2) Dados k_1', k_2' tomamos $k_1' < k_1 < L < k_2 < k_2'$ y, como en el apartado anterior, consideramos un entorno V de b para el que

$$k_1 < \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} < k_2 \text{ si } x, y \in V \cap (a,b). \tag{4.4}$$

Supongamos $\lim_{x\to b^-} g(x) = +\infty$ (en caso contrario cambiar g por su opuesta) y fijamos y; necesariamente es

$$\frac{g(x)-g(y)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) > 0$$

para $x \in V' \cap (a,b)$ siendo $V' \subset V$ otro entorno de b, ya que el límite de dicha expresión es 1. Multiplicando la desigualdad (4.4) por esta expresión se tiene:

$$k_1\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < k_2\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}$$

Como $\lim_{x\to b^-} \frac{f(y)}{g(x)} = 0$ tenemos que

$$\lim_{x\to b^-} k_1\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} = k_1$$

y análogamente para k_2. Por tanto existe un cierto entorno $V'' \subset V'$ de b tal que para $x, y \in V'' \cap (a,b)$ se verifican las desigualdades:

$$k_1' < k_1\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} \qquad \text{y} \qquad k_2\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} < k_2',$$

es decir

$$k_1' < \frac{f(x)}{g(x)} < k_2' \quad \text{si } x \in V'' \cap (a,b).$$

Como se quería demostrar. □

Observación 4.2.16 El recíproco de la proposición anterior no es cierto. En efecto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1.$$

Pero, sin embargo, no existe el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x + \operatorname{sen} x)'}{(x - \operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}.$$

En 1695 el marqués de L'Hôpital publicó su famoso libro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* que fue el primer libro de texto sobre el cálculo diferencial. En la introducción, L'Hôpital reconoce su deuda con Leibniz, Jacob Bernoulli y Johann Bernoulli pero considera el trabajo como fruto de sus propias ideas, algo que no se corresponde con la realidad. Véase al respecto la biografía de L'Hôpital en MacTutor.

Ejemplos 4.2.17 Incluimos aquí algunas muestras de cómo utilizar la regla de L'Hôpital en el cálculo de límites.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\log x$.

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\log x = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x^{-1/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-(1/2)x^{-3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{3/2}}{-(1/2)x} = 0$$

(2) label $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x - x\operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{0}{2} = 0.\end{aligned}$$

Téngase en cuenta que, de acuerdo con la observación precedente, la igualdad entre los límites de las sucesivas derivadas (dos en nuestro caso) deben considerarse «bajo cuarentena» hasta que se esté seguro de que el último de ellos existe y, en cada paso, deben verificarse las hipótesis.

(3) La última observación es importante: «a cada paso deben verificarse las hipótesis», de no ser así este «abuso» de la regla de l'Hôpital puede producir monstruos. Vea, si no, qué ocurre cuando continuamos, en el ejemplo anterior, la aplicación de esta regla. Ya la hemos utilizado dos veces, ¿por qué no una tercera? Tendríamos pues:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x - x\operatorname{sen} x + \cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x - x\cos x - \operatorname{sen} x} = \frac{-1}{0} = -\infty\end{aligned}$$

Obviamente la última aplicación de la regla es incorrecta, porque como se ve en el punto anterior, el denominador no tiende a 0 ni a $\pm\infty$.

De igual modo, es preciso verificar el resto de las hipótesis de la regla de l'Hôpital, es decir que $g(x)$ y $g'(x)$ no se anulan en (a, b). En realidad es obvio que esta condición no es necesario exigirla globalmente, sino tan sólo en un pequeño entorno reducido del punto en el que deseamos calcular el límite (o en dicho entorno pero a izquierda o derecha en caso de que deseemos calcular un límite lateral). Esta verificación puede ser difícil en algunos casos. Veamos que en las dos aplicaciones de la regla del ejemplo (2) anterior.

En la primera aplicación el denominador es la función $g(x) = x \operatorname{sen} x$. Es claro que en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ la función $\operatorname{sen} x$ sólo se anula en $x = 0$, por tanto lo mismo le ocurre a $g(x)$. En cuanto a $g'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x$, observemos que sus ceros son soluciones de la ecuación $x = -\operatorname{tg} x$. Pero esta ecuación no tiene soluciones, distintas de $x = 0$, en $(-\pi/2, pi/2)$, pues el signo de $\operatorname{tg} x$ es igual al signo de x en dicho intervalo. Para la segunda aplicación de la regla, el denominador es precisamente $g'(x)$ que ya sabemos que no se anula en un entorno reducido de 0. ¿Qué ocurre con su derivada $g''(x) = 2\cos x - x \operatorname{sen} x$? En este caso $\lim_{x\to 0} g''(x) = 2 > 0$, luego en un entorno de 0 se tiene $g''(x) > 0$.

(4) La regla de L'Hôpital es una herramiental útil para el cálculo límites, como acabamos de mostrar en los ejemplos anteriores. Pero no es una técnica que resulte eficaz en cualquier situación. Para convencerse de ello considere la función f definida por las fórmulas $f(0) = 0$ y $f(x) = e^{-1/x^2}$. Compruebe que f es derivable en el origen y calcule su derivada en el origen (debe obtener $f'(0) = 0$). Puede utilizar Maxima si lo cree conveniente.

4.3. Fórmula de Taylor

La fórmula de Taylor es uno de los instrumentos más útiles del cálculo diferencial y constituye un contenido esencial del curso. La idea básica es la posibilidad de aproximar localmente una función varias veces derivable mediante polinomios. El interés de la fórmula reside, por una parte, en que los polinomios constituyen una clase de funciones cuyo manejo es sencillo en términos relativos, y por otra, en que determinadas cuestiones que se estudian en el Análisis Matemático (límites, extremos...) tienen un carácter local. Junto a ello, la fórmula explícita del resto, que se establece, permite estimar el orden de magnitud del error cometido cuando se utiliza una aproximación polinómica de una función en un punto.

4.3.1. Desarrollos limitados

Definición 4.3.1 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $a \in I$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

(1) Si f es derivable en un entorno de a y f' también es derivable en a se dice que f es dos veces derivable en a y la derivada de f' en a se denota con $f''(a)$ o bien $f^{(2)}(a)$ y se llama la derivada segunda de f en a. Si f es derivable dos veces en todo punto de I se dice que f es derivable dos veces en I.

(2) *Por inducción, se dice que f es n veces derivable en a si f es $(n-1)$ veces derivable en un entorno de a y la derivada $(n-1)$-ésima, $f^{(n-1)}$, es derivable en a, en cuyo caso se denota la derivada con $f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)})'(a)$. Si f es n veces derivable en cada punto de I se dice que f es derivable n veces en I.*

(3) *Se dice que f es de clase $\mathscr{C}^n$ en I si f es derivable n veces en I y la derivada n-ésima de f es continua en todo punto de I. Se dice que f es de clase $\mathscr{C}^\infty$ en I si es de clase $\mathscr{C}^n$ para todo n.*

Los polinomios $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ son funciones de clase $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$ y conociendo el valor de P y sus derivadas en un punto x_0 es posible reconstruir el polinomio. En efecto, basta observar que dividiendo $P(x)$ por $(x-x_0)^n$ se puede escribir $P(x) = b_n(x-x_0)^n + Q_{n-1}(x)$ donde b_n es constante y $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $n-1$. Procediendo por inducción se obtiene:

$$P(x) = b_n(x-x_0)^n + b_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \cdots + b_0.$$

Pero entonces $b_0 = P(x_0)$ y derivando sucesivamente se obtiene que

$$b_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}$$

con lo que

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

En el caso de funciones f que sean n veces derivables puede construirse la expresión que figura en el segundo miembro de la identidad anterior, con f en lugar de P.

Definición 4.3.2 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función n veces derivable en el punto x_0 del intervalo abierto I, se llama polinomio de Taylor de grado n de f en x_0 al siguiente polinomio*

$$P_n(f, x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

En lo sucesivo, cuando los parámetros estén claros por el contexto, nos limitaremos a escribir $P_n(x)$ para denotar el polinomio de Taylor.

Antes hemos probado que cuando f es un polinomio de grado n entonces $f(x) = P_n(x)$, pero, obviamente, esto sólo ocurre cuando f es un polinomio. En otro caso $f(x) - P_n(x) \not\equiv 0$; el teorema de Taylor, objeto de esta sección, expresa de diferentes formas el valor de $f(x) - P_n(x)$.

El concepto de «o pequeña de h», a menudo denominada «o de Landau», introducido en la observación 4.1.5 puede extenderse del siguiente modo:

Definición 4.3.3 *Se dice que una función g definida en un entorno reducido de x_0 es una «o pequeña de $|x-x_0|^n$» y se escribe $g(x) = o(|x-x_0|^n)$ si*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|g(x)|}{|x-x_0|^n} = 0.$$

Si $g(x) = o(|x-x_0|^n)$ obsérvese que también se tiene

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|g(x)|}{|x-x_0|^k} = 0, \quad \text{para todo } 0 \leq k \leq n \tag{4.5}$$

sin más que multiplicar numerador y denominador por $(x-x_0)^{n-k}$.

Definición 4.3.4 *Se dice que dos funciones f y g tienen un contacto de orden n en x_0 si $f(x) - g(x) = o(|x-x_0|^n)$.*

Por ejemplo, una función derivable en x_0 y su tangente tienen un contacto de orden 1 en x_0. La proposición siguiente extiende este resultado y afirma que cualquier función de clase $\mathscr{C}^n$ tiene un contacto de orden n con su polinomio de Taylor de grado n en el punto x_0.

Proposición 4.3.5 *Si $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es $n-1$ veces derivable en (a,b) y existe la derivada n-ésima en $x_0 \in (a,b)$, entonces $f(x) = P_n(f, x; x_0) + o(|x-x_0|^n)$, donde P_n es el polinomio de Taylor de grado n de f en x_0.*

Demostración: Aplicaremos la regla de L'Hôpital $n-1$ veces y la definición de derivada n-ésima de f en el punto x_0.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - P_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - P_n^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\ldots 2(x-x_0)}$$

pero al ser P_n el polinomio de grado n

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

el cálculo de su derivada $n-1$ es muy sencillo, ya que sólamente es necesario prestar atención a los términos de grado $n-1$ y n (los demás desaparecen al derivar $n-1$ veces), siendo

$$\begin{aligned} P_n^{(n-1)}(x) =& (n-1)!\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + n(n-1)\ldots 2\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0) \\ =& f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0) \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\dots 2(x-x_0)}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!(x-x_0)}\\
&= \frac{1}{n!}\left[\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)}-f^{(n)}(x_0)\right]=0
\end{aligned}$$

por la definición de $f^{(n)}(x_0)$. Resumiendo: $f(x)=P_n(f,x;x_0)+o(|x-x_0|^n)$. □

Una expresión de una función f en la forma

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o(|x-x_0|^n)$$

se llama un *desarrollo limitado de orden n para f en el punto x_0*. La proposición anterior significa, en particular, que las funciones de clase $\mathscr{C}^n$ admiten desarrollos limitados de orden n en x_0 y proporciona además el valor de las constantes a_k $(0\le k\le n)$. De hecho se tiene:

Proposición 4.3.6 *El desarrollo limitado de orden n de una función en un punto (cuando existe) es único.*

Demostración: Supongamos que f es una función de clase $\mathscr{C}^n$ que admita otro desarrollo limitado en la forma

$$f(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\cdots+b_n(x-x_0)^n+o(|x-x_0|^n).$$

Entonces se tiene

$$(b_0-a_0)+(b_1-a_1)(x-x_0)+\cdots+(b_n-a_n)(x-x_0)^n=o(|x-x_0|^n).$$

Tomando límites cuando x tiende a x_0 se tiene, como consecuencia de la fórmula 4.5, que $b_0=a_0$. Eliminando dicho término en la expresión anterior y dividiendo por $(x-x_0)$ se obtiene igualmente $b_1=a_1$ y repitiendo el proceso se concluye que $b_k=a_k$ para $0\le k\le n$. □

Los desarrollos limitados son útiles para diferentes propósitos. En lo que resta de sección veremos algunas aplicaciones al cálculo de límites y al estudio del comportamiento local de una función en un punto.

El cálculo del desarrollo limitado en x_0 de una función concreta requiere realizar el cálculo de las sucesivas derivadas en x_0 hasta el orden n. Aunque esto puede hacerse en cada caso resulta sin embargo muy conveniente tener un listado de los desarrollos limitados de funciones usuales, ya que a partir de ellos pueden construirse muchos otros. Nos limitamos aquí a relacionar los desarrollos limitados de funciones que tienen una fórmula sencilla para la derivada n-ésima, ya que es eso, en última instancia, lo que va a posibilitar disponer de una «fórmula regular» para su desarrollo limitado de cualquier orden.

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) && (4.6)\\
\operatorname{sen} x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) && (4.7)\\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}) && (4.8)\\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) && (4.9)\\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n) && (4.10)\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) && (4.11)
\end{aligned}
$$

Demostraremos estas fórmulas en la sección siguiente (ejemplos 4.3.12), pero el lector que se lo proponga será capaz de obtenerlas por sí mismo sin mayores dificultades y, desde luego, le animamos a que lo haga.

Algunas reglas nemotécnicas para recordar estás fórmulas son:

- $(1+x)^\alpha$ es, formalmente, como el binomio de Newton. Cuando α no es un número natural la definición de $\binom{\alpha}{k}$ es la siguiente:

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

- $\dfrac{1}{1+x}$ es fácil de reconstruir acordándose de la fórmula de la suma para una progresión geométrica infinita.

- $\log(1+x)$ tiene por derivada $\dfrac{1}{1+x}$ cuyo desarrollo, calculando una primitiva término a término, produce el desarrollo de $\log(1+x)$.

- $\cos x$ se obtiene del desarrollo de $\operatorname{sen} x$ derivándolo término a término, y al revés, por lo que basta recordar uno de los dos desarrollos para reconstruir el otro. Observe que en el desarrollo del $\operatorname{sen} x$ todos los términos son de exponente impar y los signos positivo y negativo se alternan. En el desarrollo del $\cos x$ todos los términos son de exponente par.

Cuando estudiemos series de potencias en el capítulo 8 quedarán justificadas estas reglas nemotécnicas.

Observe que todas las fórmulas anteriores proporcionan los desarrollos limitados en el punto $x_0 = 0$. Cada una de las funciones anteriores admiten desarrollos limitados en otros puntos, que naturalmente no coinciden con los anteriores y que serán polinomios en $x - x_0$.

El conocimiento de los desarrollos limitados de las funciones habituales, que aparecen en las fórmulas anteriores, nos permite realizar desarrollos limitados de funciones que se obtienen como resultado de operaciones con tales funciones. El soporte para estas manipulaciones formales de los desarrollos limitados se encuentra en la proposición siguiente.

Proposición 4.3.7 *Sean f y g funciones de clase $\mathscr{C}^n$ definidas en sendos entornos de los puntos x_0 e y_0 y derivables n veces en dichos puntos.*

(1) Si $y_0 = x_0$ entonces el desarrollo limitado de orden n de $f + g$ en x_0 se obtiene sumando los desarrollos limitados de orden n de f y g.

(2) Si $y_0 = x_0$ entonces el desarrollo limitado de orden n de $f \cdot g$ en x_0 se obtiene multiplicando los desarrollos limitados de orden n de f y g y agrupando los términos convenientemente, tanto en la parte polinómica de grado no superior a n como en la parte del resto de Landau.

(3) Si $y_0 = x_0$ y $g(x_0) \neq 0$ entonces el desarrollo limitado de orden n de f/g en x_0 se obtiene dividiendo los desarrollos limitados de f y g y agrupando los términos convenientemente tanto en la parte polinómica de grado no superior a n como en la parte del resto de Landau.

(4) El desarrollo limitado de orden $n-1$ de f' se obtiene derivando formalmente el desarrollo limitado de orden n de f y bajando el orden del resto de landau en una unidad.

(5) Si $f(x_0) = y_0$ y la función $g \circ f$ está definida en un entorno de x_0 y admite un desarrollo limitado en x_0 entonces tal desarrollo se obtiene sustituyendo formalmente el desarrollo de f en el de g, y agrupando los términos convenientemente tanto en la parte polinómica de grado no superior a n como en la parte del resto de Landau.

La proposición 4.3.7 tiene un valor más operacional que conceptual. Y aunque no la demostremos aquí, sí vamos a señalar que la prueba se apoya en la unicidad de los desarrollos limitados (proposición 4.3.6). El lector interesado en la justificación del enunciado puede tratar de hacerlo por sí mismo (los primeros ítems son muy fáciles) y si tuviera dificultades puede consultar el libro de Fernández Viña [4], por ejemplo.

Ejemplos 4.3.8

(1) El cálculo de

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{\operatorname{tg} x - x}$$

genera en primera instancia una indeterminación, porque numerador y denominador tienen límite 0 en $x = 0$. Pero sabemos (proposiones 4.3.5 y 4.3.6) que tanto el numerador como el denominador de la fracción admiten un desarrollo limitado unívocamente determinado, pudiendo así –para calcular el límite propuesto– sustituir el cociente original por el cociente de los respectivos desarrollos limitados, el cual dará origen «esencialmente» al límite de un cociente de polinomios y de ese modo el cálculo resulta trivial.

Pongamos $F(x) := \operatorname{sen} x - x$ y $G(x) := \operatorname{tg} x - x$. Se tiene entonces que

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

donde podemos tomar el valor de n que queramos, $n = 1$ o $n = 2$... Los números a_0, a_1, etc. existen y son únicos, siendo precisamente los que corresponden al polinomio de Taylor de grado n para F en el $x = 0$; para calcular estos coeficientes tenemos dos opciones: o hacer las sucesivas derivadas de F en 0, o bien utilizar el desarrollo del seno que hemos visto en la página 156 y restarle x. Por una economía de esfuerzo utilizamos esta segunda opción, resultando entonces, por ejemplo, que

$$F(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) - x = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

También podríamos haber empleado las siguientes fórmulas

$$F(x) = -\frac{x^3}{3!} + o(x^3) = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$$

y muchas otras, que son igualmente válidas. ¿Cuál utilizar? Pues como queremos hacer un límite cuando $x \to 0$ lo que nos interesa es el «tamaño», el valor aproximado en términos relativos a x de $F(x)$ (cuando $x \to 0$) y eso claramente corresponde a $F(x) \approx -x^3/3!$ ya que los restantes sumandos son despreciables frente a éste. De modo que utilizaremos la más simple de las fórmulas, es decir,

$$F(x) = -\frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

Para la función G hacemos lo mismo

$$G(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$$

pero como no conocemos el desarrollo limitado de la función tg hemos de obtenerlo calculando para ello las sucesivas derivadas de tg en $x = 0$, que son $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg}'(0) = 1$, $\operatorname{tg}''(0) = 0$, $\operatorname{tg}'''(0) = 2$ siendo, en este caso, innecesario calcular más derivadas por las mismas razones de «tamaño» empleadas con F. Es decir,

$$G(x) = x + 2\frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

con lo que finalmente se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{\operatorname{tg} x - x} &= \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3!} + o(x^3)/x^3}{\frac{1}{3} + o(x^3)/x^3} = \frac{-1/3!}{1/3} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

En el ejemplo anterior hemos obtenido el desarrollo limitado de la tangente en $x = 0$ calculando sus derivadas sucesivas. Pero también podíamos haber obtenido su desarrollo, digamos

$$\operatorname{tg} x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$$

haciendo uso de la proposición 4.3.7. Puesto que, por ejemplo,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \operatorname{tg} x$$

y como conocemos los desarrollos limitados de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ podemos sustituir éstos en la fórmula anterior e ir calculando sucesivamente los parámetros $a_0, \ldots a_3$. Complete los detalles.
Otra posibilidad, usando de nuevo la proposición 4.3.7, es obtener el desarrollo dividiendo ordenadamente los desarrollos limitados del seno y el coseno. Utilice también este procedimiento.

(2) Para calcular

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{cotg}^2 x \left(1 + \frac{1}{2}x - x^2 - \frac{x}{\log(1+x)}\right)$$

lo escribiremos en términos de un cociente como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\log(1+x))\left(1 + \frac{1}{2}x - x^2\right) - x}{(\operatorname{tg} x)^2(\log(1+x))}$$

Procederemos aquí como con el ejemplo anterior, pero comenzando con el desarrollo del denominador, por ser más simple. Realmente sólo estamos interesados en el desarrollo hasta el primer coeficiente no nulo, desarrollo que podemos obtener multiplicando los desarrollos de las funciones que definen el denominador: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \log(1+x)$. Y para ello bastará (¿por qué?) con tomar el desarrollo de primer orden tanto para la tangente, como para el logaritmo, es decir

$$(x + o(x)) \cdot (x + o(x)) \cdot (x + o(x)) = x^3 + o(x^3).$$

En cambio en el numerador no es suficiente utilizar el desarrollo de primer orden del logaritmo, ya que, debido a que tienen lugar ciertas cancelaciones, si hiciéramos de esta forma obtendríamos un coeficiente erróneo para el término x^2. Tampoco basta con quedarse en el orden 2 para el logaritmo, ya que de nuevo se producen cancelaciones en el grado 2 y el término de grado 3 que obtendríamos sería incorrecto. Es necesario hacer el desarrollo del logaritmo hasta el grado 3 para no obtener un desarrollo incorrecto del numerador. La moraleja de esta experiencia es que no puede decirse a priori hasta qué grado hay que hacer los desarrollos de las funciones «componentes», eso es algo que depende de las cancelaciones que se vayan produciendo. En concreto para el numerador haciendo las cuentas cuidadosamente se obtiene

$$-\frac{11}{12}x^3 + o(x^3).$$

En consecuencia el límite buscado vale $-11/12$.

Una vez entendida la idea, el cálculo de límites de este tipo resulta muy sencillo, porque se reduce a un cálculo de límites con polinomios. La única dificultad estriba en los errores que se pueden producir al calcular los desarrollos limitados.

> Con ayuda de MAXIMA el cálculo de los desarrollos limitados resulta trivial debido a que esa tarea puede realizarse con el comando `taylor(`*Función*,*variable*,*punto*,*grado*`)`.
> Y como es MAXIMA quien hace las cuentas resulta muy «barato» (algo que no sucede al hacerlo manualmente) mandarle que calcule desarrollos con bastantes términos, aunque luego no los usemos.

En el último apartado de la proposición 4.2.3 ha sido establecida una condición necesaria para la existencia de extremos relativos. La proposición 4.3.5 nos permite ahora dar una condición suficiente de extremo relativo.

Corolario 4.3.9 *Sean $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Supongamos que f es $n - 1$ veces derivable en (a, b) siendo $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y que existe $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.*

(1) Si n es par, entonces f presenta en x_0 un máximo relativo en el caso de que $f^{(n)}(x_0) < 0$ o un mínimo relativo en el caso de que $f^{(n)}(x_0) > 0$.

(2) Si n es impar, entonces f no tiene extremo relativo en x_0.

DEMOSTRACIÓN: De acuerdo con la proposición 4.3.5 se tiene que

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \tag{4.12}$$

y por tanto

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n}.$$

Supongamos que n es par. Si además $f^{(n)}(x_0) < 0$ entonces, existe un entorno de x_0 en el cual el segundo miembro de la igualdad anterior es estrictamente negativo y por consiguiente, también lo es el primero, pero al ser n par ello requiere que

$$f(x) - f(x_0) < 0$$

en dicho entorno, es decir, f tiene en x_0 un máximo relativo estricto. Si, por el contrario, fuera $f^{(n)}(x_0) > 0$ un razonamiento análogo mostraría que

$$f(x) - f(x_0) > 0$$

en dicho entorno, es decir, f tiene en x_0 un mínimo relativo estricto.

Si n es impar, procediendo de forma similar llegaríamos a la conclusión de que existiría un entorno de x_0 en el que el primer miembro de la ecuación (4.12) habría de ser, o bien estrictamente negativo, o bien estrictamente positivo. Pero un instante de reflexión sobre el signo del numerador de la fracción del primer miembro de la ecuación (4.12) muestra que ambas situaciones son incompatibles con la existencia de extremo relativo en x_0. □

Ejemplos 4.3.10

(1) Vamos a determinar los extremos de la función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x.$$

Para ello derivamos f obteniendo

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2 \operatorname{sen} x$$

Es claro que $x = 0$ es una solución de la ecuación $f'(x) = 0$ y como además $f''(0) = f'''(0) = 0$, pero la cuarta derivada de f en 0 vale 4, podemos aplicar el corolario 4.3.9 para concluir que la función tiene un mínimo en $x = 0$. Pero, ¿tiene más extremos? El grafismo de MAXIMA puede ayudarnos a conjeturar una respuesta a esa cuestión (experiméntelo); pero una respuesta matemática a la misma requiere un poco más de trabajo. Comencemos observando que como f es una función par ($f(x) = f(-x)$) bastará con que analicemos los puntos críticos (es decir, los puntos en los que se anula la derivada[2]) en $(0,\infty)$. Además para valores «grandes» de $x > 0$ es $f'(x) > 0$ y por tanto f es estrictamente creciente en cierto intervalo de la forma $(a,+\infty)$. Veamos qué pasa en los restantes puntos. Al igual que f' sirve para analizar el crecimiento de f, f'' hace lo propio con f' y así sucesivamente. En nuestro caso al llegar a la cuarta derivada

$$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$$

la situación se clarifica, puesto que no sólo $f^{(4)}(0) > 0$ sino que, de hecho, $f^{(4)}(x) > 0$ en todo el intervalo $[0,\pi/2]$ ya que los dos primeros sumandos son mayores que cero y el tercero es no negativo en dicho intervalo. A partir de $\pi/2$ se tiene

$$f^{(4)}(x) > e^x + 2\cos x \geq e^x - 2 \geq e^{\pi/2} - 2 > e - 2 > 0.$$

En resumen, como $f^{(4)}(x) > 0$ en $[0,+\infty)$ se sigue que $f^{(3)}$ es estrictamente creciente y siendo $f^{(3)}(0) = 0$ se tiene que $f^{(3)}(x) > 0$ en $(0,+\infty)$ y repitiendo el razonamiento también se cumple que $f^{(2)}(x) > 0$ y $f'(x) > 0$ para $x \in (0,+\infty)$. Lo que significa que no existen más puntos críticos y f es estrictamente creciente en $[0,+\infty)$.

(2) La determinación de los extremos de la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \text{ y } g(0) = 0$$

utiliza las mismas ideas. Comencemos calculando la derivada.

$$g'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}(2x^{-3}) \text{ si } x \neq 0$$

con lo cual g es estrictamente creciente para $x > 0$ y estrictamente decreciente para $x < 0$, por tanto $x = 0$ es el punto en el g alcanza su único mínimo (relativo y absoluto), aunque, eventualmente, no fuera un punto crítico (pues podría no ser derivable en dicho punto). Pero sí lo es, ya que acudiendo a la definición (¡que no sustituyendo en la fórmula de $g'(x)$ antes calculada!) se tiene

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1/h}{e^{\frac{1}{h^2}}} = 0$$

Este último límite puede ser calculado haciendo el cambio de variable $1/h = x$ y aplicando el corolario 2.7.3 del siguiente modo:

$$0 \leq \lim_{h\to 0} \left| \frac{1/h}{e^{\frac{1}{h^2}}} \right| = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x^2}} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

[2] En ocasiones un punto en donde se anula la derivada de f se denomina punto crítico o, también, punto estacionario.

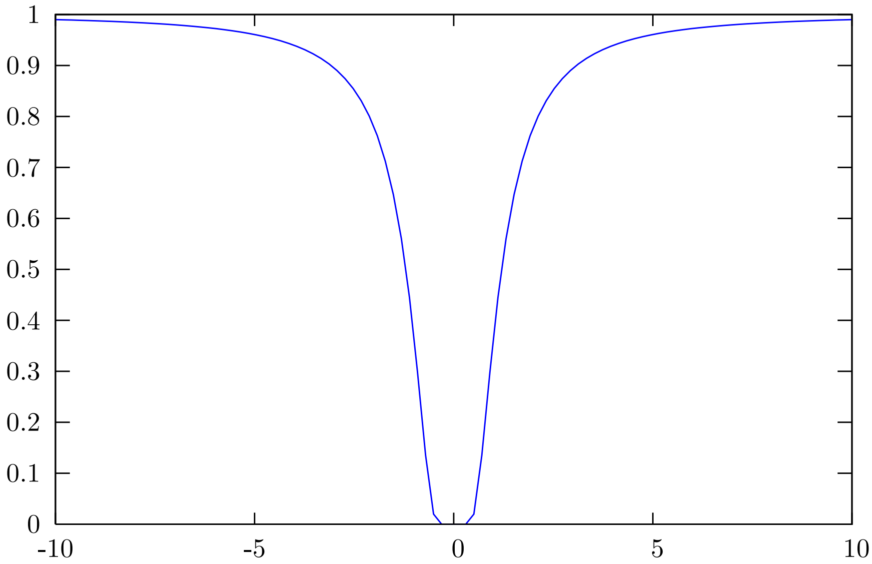


Figura 4.7: Representación gráfica de $f(x) = e^{-1/x^2}$

> En sentido estricto, el corolario 2.7.3 únicamente asegura que $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0$. Pero nosotros hemos aplicado un resultado más fuerte (al menos, formalmente) que dice $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. ¿Podría demostrar este resultado a partir de aquél?

Esta función, cuyo gráfico aparece en la figura 4.7, es muy interesante porque, como vamos a ver a continuación, no sólo $g'(0) = 0$ sino que $g^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que significa que ¡cualquier desarrollo limitado de g en 0 es nulo! En efecto, anteriormente hemos probado que

$$g'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}(2x^{-3}) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_3(1/x) \text{ si } x \neq 0 \text{ y } g'(0) = 0$$

donde $P_3(1/x)$ representa un polinomio de grado 3 en la variable $1/x$. Aplicando inducción (¡hágalo!) puede comprobarse que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$g^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n}(1/x) \text{ si } x \neq 0 \text{ y } g^{(n)}(0) = 0$$

donde $P_{3n}(1/x)$ representa un polinomio de grado $3n$ en la variable $1/x$.

4.3.2. Fórmula de Taylor con resto

En la sección anterior hemos visto que para una función n veces derivable en un intervalo (a, b) se verifica que

$$f(x) = P_n(x) + o(|x - x_0|^n) \quad \text{o equivalentemente } f(x) - P_n(x) = o(|x - x_0|^n)$$

si $x_0 \in (a, b)$. De la diferencia $f(x) - P_n(x)$ sólo sabemos, hasta ahora, algo en términos comparativos: su valor es «despreciable» frente a $(x-x_0)^n$. En esta sección vamos a obtener una fórmula más precisa para esa diferencia, más allá del carácter de «despreciable» frente a $(x - x_0)^n$. Una tal fórmula nos será de utilidad, en particular, para calcular valores aproximados, con estimaciones precisas del error cometido, de funciones no polinómicas usando polinomios.

Teorema 4.3.11 (Fórmula de Taylor) *Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ n veces derivable en (a, b) y sean $x_0, x \in (a, b)$. Sea*

$$\begin{aligned} R_{n-1}(x; x_0) :=& f(x) - P_{n-1}(x; x_0) \\ =& f(x) - \left[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Entonces para cada $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$, existe c estrictamente contenido entre x y x_0 de modo que

$$R_{n-1}(x, x_0) = \frac{(x - x_0)^k (x - c)^{n-k}}{(n-1)!k} f^{(n)}(c).$$

Esta forma de expresar el resto se llama la forma de Schömilch, como casos particulares tomando $k = 1$ y $k = n$ se obtienen, respectivamente, los siguientes:

(1) Resto de Lagrange: existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n.$$

(2) Resto de Cauchy: existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x - x_0)(x - c)^{n-1}.$$

Demostración: Aplicando el teorema del valor medio de Cauchy 4.2.6 a las funciones:

$$F(t) := f(x) - [f(t) + \frac{1}{1!}f'(t)(x - t) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t)(x - t)^{n-1}] \quad \text{y}$$
$$g(t) := (x - t)^k$$

en el intervalo de extremos x_0 y x, se obtiene

$$(F(x_0) - F(x))g'(c) = (g(x_0) - g(x))F'(c)$$

pero como

$$\begin{array}{ll} F(x) = 0, & F(x_0) = R_{n-1}(x; x_0) \\ g(x) = 0, & g(x_0) = (x - x_0)^k \\ g'(t) = -k(x-t)^{k-1} & \end{array}$$

el teorema del valor medio de Cauchy adopta la forma

$$R_{n-1}(x; x_0) = \frac{F'(c)}{g'(c)}(x - x_0)^k.$$

Solo resta ya calcular la derivada de F en el punto c

$$\begin{aligned} F'(t) = &- \left[f'(t) + \frac{1}{1!} f''(t)(x-t) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} \right] + \\ &+ \left[\frac{1}{1!} f'(t) + 2\frac{1}{2!} f''(t)(x-t) + \cdots + (n-1)\frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-2} \right] = \\ &= -\frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} \end{aligned}$$

para concluir

$$R_{n-1}(x; x_0) = \frac{\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}}{k(x-c)^{k-1}}(x-x_0)^k = \frac{(x-c)^{n-k}(x-x_0)^k}{k(n-1)!} f^{(n)}(c) \tag{4.13}$$

y obtener así la fórmula de Schömilch para el resto. Haciendo $k = 1$ y $k = n$ en la ecuación (4.13) se obtienen, respectivamente, las fórmulas de Lagrange y Cauchy para el resto que aparecen en el enunciado. □

A veces se escribe $x = x_0 + h$ y $c = x_0 + \theta h$ con $0 < \theta < 1$ en cuyo caso la fórmula de Taylor adopta diferentes formas, que se muestran a continuación.

(1) Para el resto de Lagrange:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{n!}h^n \tag{4.14}$$

(2) Para el resto de Cauchy:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}h^n \tag{4.15}$$

Cuando $x_0 = 0$ la fórmula de Taylor recibe el nombre de *fórmula de MacLaurin*. La expresión

$$P_{n-1}(f, x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

se llama el *polinomio de Taylor de grado* $n-1$ *de* f *en* x_0.

Una cuestión natural para funciones de clase $\mathscr{C}^{(\infty)}$ (por ejemplo en todo $\mathbb{R}$) es estudiar si f coincidirá con su polinomio de Taylor «infinito». El segundo de los ejemplos 4.3.10 permite responder de forma negativa a esta cuestión. Existen, sin embargo, una gran cantidad de funciones para las que la respuesta es positiva, como veremos en el capítulo 8; pero eso requiere dar sentido a sumas con infinitos sumandos, lo cual será abordado en próximos capítulos.

Encontrar los primeros términos en los desarrollos de Taylor es sencillo. Las dificultades pueden aparecer en el cálculo del término general o del término correspondiente al resto. Veamos a continuación algunos ejemplos importantes de desarrollos de Taylor que, de hecho, han sido ya utilizados como desarrollos limitados con resto de Landau en la página 156.

Ejemplos 4.3.12 Calcularemos ahora las fórmulas de Taylor en el origen (MacLaurin) de algunas de las funciones de uso más frecuente en el curso.

(1)

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n}$$

En efecto: el cálculo de las derivadas sucesivas es, en este caso, muy sencillo pues si $f(x) = e^x$, es claro que cualquier derivada de f coincide con f, es decir, $f^{(n)}(x) = e^x$, y por tanto, $f^{(n)}(0) = 1$.

(2)

$$\boxed{\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{\operatorname{sen}(\theta x + n\pi/2)}{n!}x^n}$$

En efecto: si ponemos $f(x) = \operatorname{sen} x$ se tiene:

$$\begin{array}{rlll}
f(x) & = \operatorname{sen} x & & f(0) = 0 \\
f'(x) & = \cos x & = \operatorname{sen}(x + \pi/2) & f'(0) = 1 \\
f^{(2)}(x) & = -\operatorname{sen} x & = \cos(x + \pi/2) = \operatorname{sen}(x + 2\pi/2) & f^{(2)}(0) = 0 \\
f^{(3)}(x) & = -\cos x & = \cos(x + 2\pi/2) = \operatorname{sen}(x + 3\pi/2) & f^{(3)}(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) & = \operatorname{sen} x & = \cos(x + 3\pi/2) = \operatorname{sen}(x + 4\pi/2) & f^{(4)}(0) = 0 \\
\vdots & & & \\
f^{(n)}(x) & & = \operatorname{sen}(x + n\pi/2) & f^{(n)}(0) = \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})
\end{array}$$

(3)

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{\cos(\theta x + n\pi/2)}{n!}x^n}$$

Los cálculos en este caso son análogos a los realizados para el desarrollo del seno y se dejan como ejercicio al lector.

(4)

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n(1+\theta x)^{-(n+1)}x^n}$$

En efecto: tomando $f(x) = (1+x)^{-1}$ se tiene

$$\begin{array}{rll}
f(x) & = (1+x)^{-1} & f(0) = 1 \\
f^{(1)}(x) & = (-1)(1+x)^{-2} & f^{(1)}(0) = -1 = -1! \\
f^{(2)}(x) & = (-1)(-2)(1+x)^{-3} & f^{(2)}(0) = (-1)(-2) = 2! \\
\vdots & & \\
f^{(n)}(x) & = (-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)} & f^{(n)}(0) = (-1)^n n!
\end{array}$$

(5)

$$\boxed{\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n(1+\theta x)^n}x^n}$$

En efecto: tomando la función $f(x) = \log(1+x)$ se tiene:

$$\begin{array}{rll}
f(x) & = \log(1+x) & f(0) = 0 \\
f^{(1)}(x) & = (1+x)^{-1} & f^{(1)}(0) = 1 \\
f^{(2)}(x) & = (-1)(1+x)^{-2} & f^{(2)}(0) = -1 = -1! \\
f^{(3)}(x) & = (-1)(-2)(1+x)^{-3} & f^{(3)}(0) = (-1)(-2) = 2! \\
\vdots & & \\
f^{(n)}(x) & = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} & f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{array}$$

(6)

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}\frac{(1+\theta x)^\alpha}{(1+\theta x)^n}x^n.}$$

En efecto: tomando $f(x) = (1+x)^\alpha$ se tiene:

$$\begin{array}{rll}
f(x) & = (1+x)^\alpha & f(0) = 1 \\
f^{(1)}(x) & = \alpha(1+x)^{\alpha-1} & f^{(1)}(0) = \alpha \\
f^{(2)}(x) & = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f^{(2)}(0) = \alpha(\alpha-1) \\
\vdots & & \\
f^{(n)}(x) & = \alpha\cdots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n} & f^{(n)}(0) = \alpha\cdots(\alpha-(n-1))
\end{array}$$

La fórmula es ahora consecuencia de la siguiente definición:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(k-1))}{k!}.$$

Figura 4.8: Brook Taylor (Edmonton, 1685 – London 1731). Además de descubrir la fórmula que lleva su nombre, Taylor inventó la integración por partes y añadió una nueva rama a las matemáticas que hoy se conoce con el nombre de «cálculo de diferencias finitas». Biografía en MacTutor

> MAXIMA puede ayudarnos a visualizar el significado geométrico de los polinomios de Taylor de una función f en un punto, en relación con la aproximación polinómica de la función mediante tales polinomios. En la figura 4.9 aparecen los gráficos de la función seno y de sus primeros polinomios de Taylor para $x_0 = 0$ en el intervalo $[0, \pi]$ construida (esencialmente) del siguiente modo

```
f(x):=sin (x)$ T(x,n):=taylor(f(x),x,0,n)$
plot2d([f(x),T(x,1),T(x,3),T(x,5),T(x,7)],[x,0,%pi],[y,0,1]);
```

Ejemplos 4.3.13 Con ayuda de los desarrollos de Taylor con resto es posible realizar cálculos aproximados como los que siguen.

(1) El número e fue introducido en el corolario 2.2.4 como el valor de

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

y demostramos allí que es irracional. Veamos que la fórmula de Taylor nos permite obtener aproximaciones racionales del valor de e con la precisión que queramos. De esta forma, aplicando toda la maquinaria desarrollada, el número e pasa de tener una existencia puramente teórica a tener una realidad «tangible». Para fijar ideas, supongamos que deseamos una aproximación racional de e con error menor de $1/1000$.

Sabemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

y por tanto para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta}}{n!}$$

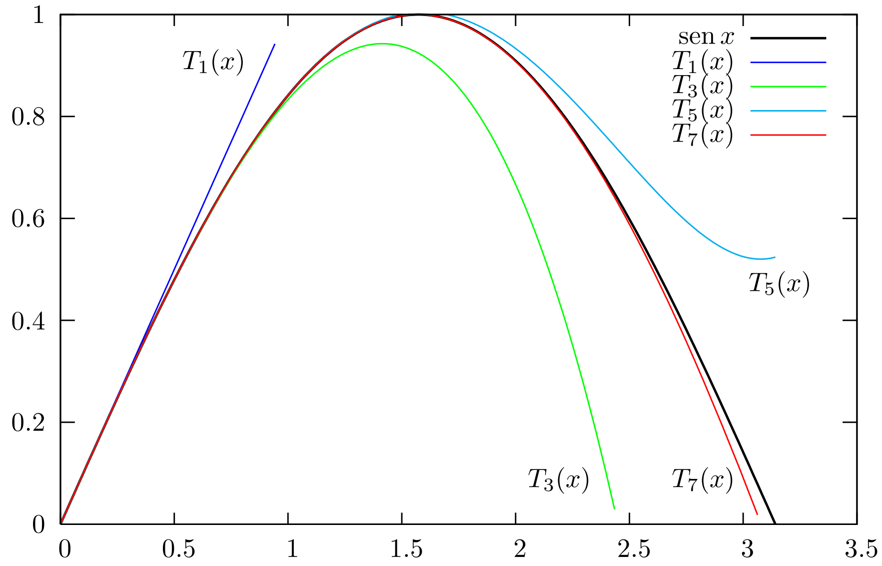


Figura 4.9: La función seno y sus primeros polinomios de Taylor para $x_0 = 0$

donde θ, cuyo valor desconocemos, verifica $0 < \theta < 1$. Si prescindiéramos del término complementario $\frac{e^\theta}{n!}$, cuyo valor desconocemos, podríamos calcular con

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}$$

un valor aproximado para e siendo precisamente $\frac{e^\theta}{n!}$ el error cometido, del cual sólo podemos conocer una estimación de su tamaño (recordemos que $e < 3$)

$$\frac{e^\theta}{n!} < \frac{e}{n!} < \frac{3}{n!}.$$

Dando valores a n observamos que para $n = 7$ se cumple que

$$3/n! = 1/7! = 1/1680 < 1/1000,$$

así que[3]

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = \frac{1957}{720} \approx 2,718$$

es una aproximación de e con error inferior a $1/1000$.

(2) Vamos a calcular ahora el seno de 31 grados con error inferior a $1/100000$. Lo primero que debemos señalar es que a diferencia de las funciones exponencial y logaritmo, las funciones trigonométricas no han sido introducidas de forma rigurosa; esto se hará en el capítulo 8. A pesar de ello, las hemos venido

[3] Además de manualmente, la suma puede hacerse con Maxima mediante `sum(1/n!, n, 0, 6)`.

utilizando, porque los estudiantes ya conocen su significado geométrico y propiedades básicas. Sin embargo desde un punto de vista operacional-analítico es necesario hacer algunas precisiones (que sean consistentes con el análisis que se realizará en el citado capítulo) relacionadas con la medida de ángulos.

Los estudiantes saben que los ángulos se miden utilizando grados, minutos y segundos y aún en los grados se distingue entre sexagesimales y centesimales. Seguramente también han hecho uso de los radianes en los cálculos con la calculadora electrónica y conocen, por ejemplo, que 360 grados sexagesimales corresponden a 2π radianes, 90 a $\pi/2$... Pero, en la fórmula

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{\operatorname{sen}(\theta x + n\pi/2)}{n!}x^n$$

¿cuál de estos valores de x debo poner? O dicho de otra manera ¿cuál es la forma natural de medir los ángulos y cuál es la unidad a utilizar en las fórmulas del Análisis Matemático? La respuesta a esta pregunta es inequívoca: los ángulos se miden utilizando la medida de longitudes en la circunferencia y la unidad que se utiliza es la misma que para medir longitudes en la recta. Lo cual significa que los ángulos se miden siempre en radianes; que eso es lo que significa radian, tomar como unidad de longitud la del radio. Así pues, la imagen corresponde a utilizar una misma «cinta métrica» flexible tanto para medir longitudes de segmentos rectilíneos, como regiones angulares determinadas por dos semirectas concurrentes, para las cuales se mide el correspondiente arco que, en la circunferencia de radio 1, delimitan las semirectas.

Así pues los 31 grados sexagesimales representan un valor

$$x = (2\pi/360)31 = 31\pi/180$$

y la fórmula es entonces

$$\operatorname{sen} \tfrac{31\pi}{180} = \tfrac{31\pi}{180} - \tfrac{1}{3!}\left(\tfrac{31\pi}{180}\right)^3 + \tfrac{1}{5!}\left(\tfrac{31\pi}{180}\right)^5 + \cdots + \tfrac{\operatorname{sen}(\theta\frac{31\pi}{180} + \frac{n\pi}{2})}{n!}\left(\tfrac{31\pi}{180}\right)^n \tag{4.16}$$

Aplicando el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior hemos de determinar $n \in \mathbb{N}$ para acotar el término complementario

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta\frac{31\pi}{180} + \frac{n\pi}{2})}{n!}\left(\frac{31\pi}{180}\right)^n \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{31\pi}{180}\right)^n \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{31\cdot 11}{7\cdot 90}\right)^n := R(n) \leq \frac{1}{100\,000}$$

donde hemos utilizado la acotación de Arquímedes:

$$\pi < 3 + \frac{1}{7}$$

Para la determinación del entero n que satisface $R(n) \leq 10^{-5}$ puede ayudarnos MAXIMA. Para ello definimos la función

```
R(n):=n!*(7*90)^n-(31*11)^n*10^5;
```

y calculamos `R(n)` para distintos valores de n hasta obtener una cantidad positiva, obteniendo como menor valor $n = 7$.

En consecuencia el valor aproximado que buscamos es

$$\operatorname{sen}\frac{31\pi}{180} \approx \frac{31\pi}{180} - \frac{1}{3!}\left(\frac{31\pi}{180}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{31\pi}{180}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{31\pi}{180}\right)^7$$

La acotación de Arquímedes $3+\frac{10}{71} < \pi < 3+\frac{1}{7}$ es bastante conocida. Arquímedes la obtuvo mediante el método de exhausción. Puede consultar la obra C.H. EDWARDS JR., *The Historical Development of the calculus*, Springer-Verlag, 1979.

Otra manera de abordar el cálculo del seno de 31 grados sexagesimales es tomar $x_0 = \pi/6$ (que corresponde a 30 grados sexagesimales) en lugar de $x_0 = 0$. La razón es que los valores del seno y coseno de $\pi/6$ son conocidos (y eso es todo lo que necesitamos para hacer el desarrollo limitado en ese punto) y además como

$$\frac{31\pi}{180} - \frac{\pi}{6} < \frac{31\pi}{180}$$

a igual valor de n el resto es menor para $x_0 = \pi/6$ que para $x_0 = 0$. En la fórmula

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0 + \frac{1}{1!}\operatorname{sen}\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0) + \frac{1}{2!}\operatorname{sen}(x_0+\pi)(x-x_0)^2 + \dots\\ \frac{1}{(n-1)!}\operatorname{sen}\left(x_0+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)^{n-1} + \frac{1}{n!}\operatorname{sen}\left(\theta x_0+n\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)^n\end{aligned}$$

tomamos $x = 31\pi/180$ y $x_0 = \pi/6$ y buscamos n de manera que se tenga

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\left|\operatorname{sen}\left(\theta x_0+n\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)^n\right| \leq \frac{1}{n!}\left(\frac{31\pi}{180}-\frac{\pi}{6}\right)^n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^n <\\ < \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{45}\right)^n \leq \frac{1}{100\,000}\end{aligned}$$

Ayudándonos, como antes, de MAXIMA podemos comprobar que $n = 3$ es un valor adecuado, obteniendo:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 31\pi/180 \approx \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \frac{1}{1!}\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{31\pi}{180}-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2!}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{31\pi}{180}-\frac{\pi}{6}\right)^2\\ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} - \frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2\end{aligned}$$

con un error menor de $1/500\,000$.

Dibuje un triángulo equilátero de lado 1. Como todos los lados son iguales también lo son los ángulos. Por otra parte es conocido de la enseñanza secundaria que la suma de los ángulos de un triángulo son dos rectos, es decir π. Trace una altura y use el teorema de Pitágoras para deducir que $\operatorname{sen} \pi/6 = 1/2$ y $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$.

En los ejemplos anteriores hemos necesitado calcular la fórmula de la derivada n-ésima para poder acotar el resto de Taylor. No siempre los cálculos son tan simples. Incluso para funciones sencillas como, por ejemplo, $f(x) = \log(1 + x^2)$ calcular el resto de orden 7 resulta tedioso. MAXIMA no implementa un comando que permita realizar directamente tales cálculos pero, sabiendo la fórmula del resto de Lagrange con c como punto intermedio, es muy sencillo construirlo (la sintaxis es autoexplicativa).

```
R(n):=diff(subst(c,x,f(x)),c,n)*x^n /n!;
```

Ahora es muy fácil hacer esas cuentas con `f(x):=log(1+x^2)$ R(7);` que proporciona

$$\frac{\left(-\frac{10\,080\,c}{(c^2+1)^4} + \frac{80\,640\,c^3}{(c^2+1)^5} - \frac{161\,280\,c^5}{(c^2+1)^6} + \frac{92\,160\,c^7}{(c^2+1)^7}\right) x^7}{5\,040}$$

4.4. Funciones convexas

La convexidad y concavidad son propiedades relevantes de las funciones. Sin embargo, el hecho de que estos términos se utilicen también en el lenguaje común[4] propicia la confusión terminológica cuando son empleados en matemáticas. De hecho, a diferencia de lo que ocurre con otros conceptos de las matemáticas, unos manuales de enseñanza media llaman función convexa al mismo objeto que otros denominan función cóncava. Ciertamente, ponerle una u otra denominación es cuestión de convenio y no es esencial para la comprensión o creación matemáticas. Pero no establecer el convenio terminológico resulta, cuando menos, incómodo.

Volveremos a introducir aquí la terminología y los conceptos en el modo comunmente utilizado en el lenguaje y los escritos de las matemáticas «universitarias».

Definición 4.4.1 *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I.*

(1) f se dice convexa en I si para todo $x, x' \in I$ se verifica

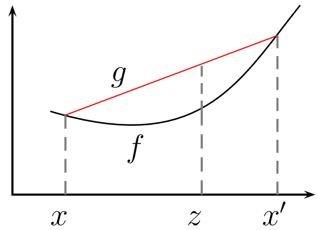
$$f((1-t)x + tx') \leq (1-t)f(x) + tf(x').$$

(2) f se dice cóncava en I si para todo $x, x' \in I$ se verifica

$$f((1-t)x + tx') \geq (1-t)f(x) + tf(x').$$

[4] Por ejemplo, «las concavidades existentes en la pared nos permitieron realizar la escalada» o «me encanta el perfil convexo que tiene el jarrón».

Obsérvese que f es cóncava si, y sólo si, $-f$ es convexa; en consecuencia, es posible limitar el estudio al caso de las funciones conexas.



Geométricamente, f es convexa si para cada par de puntos $x, x' \in I$ la gráfica de la secante que une los puntos $(x, f(x))$ y $(x', f(x'))$ está por encima de la gráfica de la función f para el intervalo determinado por x y x'. Y f es cóncava si para cada par de puntos $x, x' \in I$ la gráfica de la secante que une los puntos $(x, f(x))$ y $(x', f(x'))$ está por debajo de la gráfica de la función f para el intervalo determinado por x y x'.

Para darse cuenta de que eso es justamente lo que se afirma en la definición de convexidad basta observar que:

- Cualquier punto z del intervalo $[x, x']$ puede ser expresado en la forma
$$z = x + t(x' - x) = (1 - t)x + tx', \quad \text{donde } t \in [0, 1]. \tag{4.17}$$
- La ecuación de la recta secante que une el punto $(x, f(x))$ con el $(x', f(x'))$ puede ser escrita, como es bien conocido, en la forma
$$g(s) = f(x) + \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}(s - x).$$
En particular para $s = z$ se tendría
$$\begin{aligned} g(z) =& f(x) + \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}(z - x) \\ =& f(x) + \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}t(x' - x) \qquad \text{[usando la ec. (4.17)]} \\ =& f(x) + (f(x') - f(x))t \\ =& (1 - t)f(x) + tf(x') \geq f(z). \end{aligned}$$

Ejemplos 4.4.2 Las siguientes funciones, definidas en $\mathbb{R}$, son convexas:

(1) $f(x) = ax + b$ para todo a, b.

(2) $f(x) = x^2$.

(3) $f(x) = |x|$.

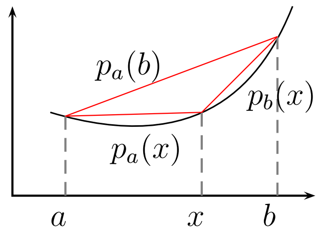
La convexidad admite una reformulación sumamente útil, para la que resulta conveniente introducir la siguiente notación (véase la figura que ilustra la definición de convexidad) para la pendiente de la recta secante pasando por los puntos $(x, f(x))$ y $(x', f(x'))$
$$p_x(x') = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x}.$$
Observe que se verifica $p_x(x') = p_{x'}(x)$.

Proposición 4.4.3 *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es convexa en I.

(2) Cualesquiera que sean $a < x < b$ en I se verifica que $p_a(x) \leq p_b(x)$.

Demostración:



Sean $a < b$ puntos en el intervalo I. Entonces

$$x = a + t(b-a) = (1-t)a + tb$$

para cierto $t \in (0,1)$. En consecuencia

$$x - a = t(b-a), \qquad x - b = (1-t)(a-b) \quad (4.18)$$

y se tiene la siguiente cadena de equivalencias (atención a las notas aclaratorias)

$$\begin{aligned}
p_a(x) \leq p_b(x) &\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \\
{}^5 &\Leftrightarrow (f(x)-f(a))(x-b) \geq (f(x)-f(b))(x-a) \\
{}^6 &\Leftrightarrow f(x)(a-b) \geq f(a)(x-b) - f(b)(x-a) \\
{}^7 &\Leftrightarrow f(x)(a-b) \geq f(a)(1-t)(a-b) - f(b)t(b-a) \\
{}^8 &\Leftrightarrow f(x) \leq f(a)(1-t) + f(b)t \\
&\Leftrightarrow f \text{ es convexa.}
\end{aligned}$$

La equivalencia queda así probada. □

Como observación final vamos a establecer que, con las notaciones de la demostración anterior, para todo $x \in (a,b)$ se verifica $p_a(b) \geq p_a(x)$. Mirando el dibujo esta propiedad es clara. La justificación analítica es muy sencilla.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \iff \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \geq f(x)$$

y esto último es cierto debido a que f es convexa. Con otras palabras esto significa que la función $x \mapsto p_a(x)$ es creciente.

Corolario 4.4.4 *Una función convexa definida en un intervalo es continua en los puntos del interior.*

[5] Multiplicando por $(x-a)(x-b) < 0$
[6] Reagrupando
[7] Usando las ecuaciones (4.18)
[8] Dividiendo por $a - b < 0$

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa y sea x_0 un punto del interior de I. Sean $x' < x_0 < x$ con $x, x' \in I$. De acuerdo con la proposición 4.4.3 se tiene

$$p_{x_0}(x') = p_{x'}(x_0) \le p_x(x_0) = p_{x_0}(x)$$

y como hemos visto antes que p_{x_0} es creciente, esta fórmula nos permite concluir que existe $\alpha := \lim_{x\to x_0^+} p_{x_0}(x)$. Pero por otra parte es claro que si $x > x_0$ se tiene

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

y tomando límites

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) + \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x\to x_0^+} (x - x_0) = f(x_0) + \alpha \cdot 0 = f(x_0)$$

Esto prueba la continuidad por la derecha de f en x_0. Un razonamiento análogo permite probar la continuidad por la izquierda. $\square$

Aunque las funciones convexas definidas en un intervalo sean continuas en los puntos del interior pueden no ser continuas en los extremos del mismo. Por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \in (0,1) \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

está en esa situación.

Corolario 4.4.5 *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en el intervalo abierto I. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es convexa.

(2) f' es una función creciente en I.

(3) Para cada punto de I la gráfica de la función f está situada por encima de la recta tangente correspondiente a dicho punto.

Además, si f es dos veces derivable en I, se verifica que f es convexa si y sólo si $f'' \ge 0$ en I.

DEMOSTRACIÓN: Probemos que (1) implica (2). Supongamos que $a < b$ son dos puntos de I. Se tiene que

$$f'(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a^+} p_a(x); \; f'(b) = \lim_{x'\to b^-} \frac{f(x') - f(b)}{x' - b} = \lim_{x'\to b^-} p_b(x').$$

Si f es convexa, aplicando la proposición 4.4.3, se obtiene que

$$p_a(x) \leq p_{x'}(x) = p_x(x') \leq p_b(x'), \qquad \text{siempre que } a < x < x' < b$$

de donde se sigue que $f'(a) \leq f'(b)$ y por tanto que f' es creciente.

Probemos ahora que (2) implica (3). Fijado cualquier $x_0 \in I$ hemos de demostrar que el gráfico de la función f está situada por encima de la recta tangente a f en x_0, es decir, que para cada $x \in I$ se verifica

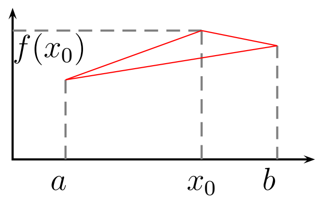
$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{4.19}$$

Para probarlo vamos a distinguir los casos $x_0 < x$ y $x < x_0$. Si fuera $x_0 < x$, por el teorema del valor medio de Lagrange 4.2.8 se tendría

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0),$$

pero como f' es creciente y $c \in (x_0, x)$ sería $f'(c)(x - x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$ y por tanto se obtiene la desigualdad (4.19). Si fuera $x < x_0$ sería $c \in (x, x_0)$ y, de nuevo, utilizando que f' es creciente obtendríamos $f'(c)(x - x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$ y por tanto se verificaría también (4.19).

Para acabar con el ciclo de equivalencias veamos que (3) implica (1). Procedemos por reducción al absurdo.



Si f no fuera convexa, de acuerdo con la definición de convexidad, existirían $a < x_0 < b$ en I tales que $f(x_0)$ estaría por encima de la secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Pero es claro que ninguna recta que pase por el punto $(x_0, f(x_0))$ (en particular, la tangente a f en x_0) puede dejar por encima de ella, simultáneamente, a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Pero esto contradice la hipótesis (3) que afirma que la curva está situada por encima de la tangente correspondiente al punto x_0.

El hecho de que si f es dos veces derivable en I, se verifica que f es convexa si y sólo si $f'' \geq 0$ en I, es una consecuencia inmediata de la equivalencia entre (1) y (2) y de las proposiciones 4.2.3 y 4.2.9. ¡Piénselo! □

4.4.1. Convexidad local y comportamiento de una función respecto de su tangente

La definición de convexidad que hemos dado es una definición global para un intervalo. Resulta también interesante considerar un concepto de convexidad local.

Definición 4.4.6 (Convexidad local) *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el intervalo I derivable en $x_0 \in I$.*

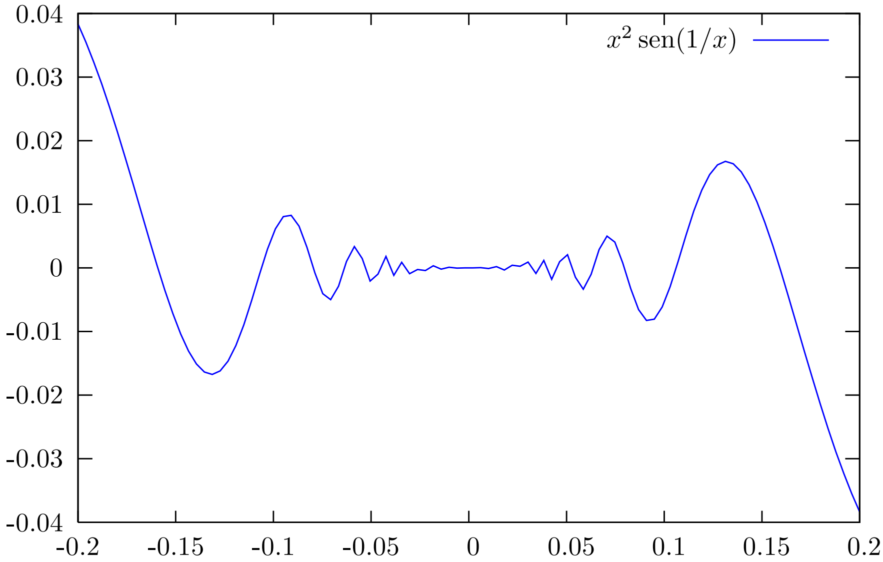


Figura 4.10: Gráfica de $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ en un entorno del origen

(1) *Diremos que f es convexa en x_0 si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x_0, \delta) \cap I$ entonces se verifica que $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.*

(2) *Diremos que f es cóncava en x_0 si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x_0, \delta) \cap I$ entonces se verifica que $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.*

(3) *Diremos que x_0 es un punto de inflexión si existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x_0, \delta) \cap I$ entonces se verifica que*

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ para } x < x_0 \text{ y}$$
$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ para } x > x_0.$$

Así, la función es convexa en x_0 si la gráfica se sitúa por encima de la recta tangente en x_0 para algún entorno de x_0, y cóncava si se sitúa por debajo de la tangente. Si a un lado está por encima y a otro está por debajo se dice que f tiene en x_0 un *punto de inflexión*, en cuyo caso la gráfica de f atraviesa a la recta tangente en x_0.

No siempre se presenta una de las tres situaciones: la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ en $x_0 = 0$ es un buen ejemplo de ello. El gráfico de dicha función, que está representada en la figura 4.10, ayuda a comprender intuitivamente lo que ocurre. Pero eso no es suficiente. Demuestre analíticamente (calculando la recta tangente) que en el punto x_0 la función f no es convexa, ni cóncava y tampoco tiene una inflexión.

Proposición 4.4.7

(1) *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ donde I es un intervalo abierto. Sea $x_0 \in I$ y supongamos que f es derivable en un entorno de x_0 y que existe $f''(x_0)$.*

a) *Si* $f''(x_0) > 0$ *entonces* f *es convexa en* x_0.

b) *Si* $f''(x_0) < 0$ *entonces* f *es cóncava en* x_0.

c) *Si* x_0 *es un punto de inflexión entonces* $f''(x_0) = 0$.

(2) Si f *es* $n-1$ *veces derivable en un entorno de* x_0 *y existe* $f^{(n)}(x_0)$ *siendo además* $f^{(2)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, *pero* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ *entonces:*

a) *Si* n *es par y* $f^{(n)}(x_0) > 0$ *se verifica que* f *es convexa en* x_0.

b) *Si* n *es par y* $f^{(n)}(x_0) < 0$ *se verifica que* f *es cóncava en* x_0.

c) *Si* n *es impar, se verifica que* x_0 *es un punto de inflexión para* f.

Demostración: La primera parte se puede obtener fácilmente utilizando el desarrollo limitado

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + o(x-x_0)^2$$

y teniendo en cuenta que la ecuación de la recta tangente es, precisamente, $f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

Para demostrar la segunda parte se usa de nuevo el desarrollo limitado

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o(x-x_0)^n.$$

¡Complete los detalles! Si no se le ocurre y necesita una ayudita, revise, con espíritu crítico, la demostración del corolario 4.3.9. □

> La segunda derivada, cuando existe, permite analizar de forma muy sencilla la convexidad de una función. Pero lo importante de la convexidad es la fórmula que la define (v. la definición 4.4.1), que se utiliza para probar cierto tipo de desigualdades.

Para funciones derivables en un intervalo abierto hay dos conceptos de convexidad: uno local y otro global. La relación entre ellos es la siguiente:

Proposición 4.4.8 *Sea* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivable en el intervalo abierto* I. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f *es (globalmente) convexa en* I.

(2) f *es (localmente) convexa para cada* $x \in I$.

Demostración: Utilizando el corolario 4.4.5, es claro que (1) implica (2).

Para demostrar que (2) implica (1) procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que existieran $a < b$ tales que la secante a la gráfica en estos puntos no la deja por debajo en todos los puntos del intervalo $[a,b]$. Es decir que existe $a < c < b$ con

$$f(c) > f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a).$$

Consideremos una función $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que mida la separación entre f y la recta secante, definida por

$$g(x) := f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right).$$

La función g es continua (por serlo f y la recta secante) y $0 = g(a) = g(b) < g(c)$, por lo que existe el máximo absoluto para g en $[a,b]$ que necesariamente se alcanza en un punto interior $\xi \in (a,b)$ siendo $g(\xi) > 0$. Por tanto, aplicando el teorema de Rolle 4.2.5, ha de ser $g'(\xi) = 0$. Así que

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{y} \quad g(x) \leq g(\xi) \quad \text{para todo } x \in [a,b] \tag{4.20}$$

Por consiguiente

$$f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right) \leq f(\xi) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(\xi-a) \right)$$

lo cual, reagrupando y teniendo en cuenta las fórmulas (4.20), conduce a

$$f(x) \leq f(\xi) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-\xi) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi), \quad \text{para } x \in [a,b] \tag{4.21}$$

Por otra parte, al ser f convexa en ξ existe (por definición) un intervalo $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ tal que $\xi \in (\alpha,\beta)$ de modo que

$$f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) \leq f(x) \text{ para } x \in [\alpha,\beta] \tag{4.22}$$

lo que, unido a la desigualdad (4.21), nos lleva a

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) \text{ para todo } x \in [\alpha,\beta],$$

es decir, f coincide con una recta en $[\alpha,\beta]$. Dicha recta es paralela a la recta secante, pues ambas tienen la misma pendiente de acuerdo con las fórmulas (4.20), y no coincide con ella puesto que $g(\xi) > 0$ y, recordemos, g mide la separación entre f y la recta secante. En consecuencia

$$f(a) < f(\xi) + f'(\xi)(a-\xi) \tag{4.23}$$

Sea $[\alpha',\beta']$ (con $[\alpha,\beta] \subset [\alpha',\beta'] \subset [a,b]$) el mayor intervalo para el que la fórmula (4.22) es cierta. Para finalizar basta con que demostremos que $a = \alpha'$, pues ello significaría que $(a, f(a))$ pertenece a la recta $f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$, obteniéndose así una contradicción con la ecuación 4.23.

Probemos entonces que $a = \alpha'$. Si fuera $a < \alpha'$ como f es convexa en α' se tendría

$$f(z) \geq f(\alpha') + f'(\alpha')(z - \alpha') \quad \text{para cierto } r > 0 \text{ y } z \in B(\alpha', r).$$

Pero como a la derecha de α' f coincide con una recta de pendiente $f'(\xi)$, necesariamente $f'(\alpha') = f'(\xi)$, de modo que

$$\begin{aligned} f(z) \geq & f(\alpha') + f'(\alpha')(z - \alpha') = f(\alpha') + f'(\xi)(z - \alpha') \\ = & f(\xi) + f'(\xi)(\alpha' - \xi) + f'(\xi)(z - \alpha') \\ = & f(\xi) + f'(\xi)(z - \xi) \end{aligned}$$

para todo $z \in B(\alpha', r)$.

Pero, usando de nuevo (4.21) obtenemos la desigualdad opuesta y se concluye que

$$f(z) = f(\xi) + f'(\xi)(z - \xi) \quad \text{para } z \in B(\alpha', r).$$

Esto contradice la supuesta maximalidad de $[\alpha', \beta']$. □

4.5. Ejercicios

Resueltos

4.5.1 *Calcule el siguiente límite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{(1+x)^x - 1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

SOLUCIÓN: Es un límite típico para usar desarrollos de Taylor. Se trata de realizar los desarrollos limitados de numerador y denominador hasta el primer coeficiente no nulo. En el numerador bastará con obtener el desarrollo limitado de la tangente hasta la primera potencia no nula superior a 1, que, en este caso, es la tercera

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} 0 + \frac{1}{1!}\operatorname{tg}'(0)x + \frac{1}{2!}\operatorname{tg}''(0)x^2 + \frac{1}{3!}\operatorname{tg}'''(0)x^3 + o(x^3)\\ &= 0 + x + 0x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Obteniéndose, por tanto, el siguiente desarrollo limitado del numerador

$$x - \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Para el denominador podría procederse del mismo modo, pero habida cuenta de que puede ser escrito en términos de funciones cuyos desarrollos limitados son conocidos

$$(1+x)^x - 1 - \operatorname{sen}^2 x = e^{x\log(1+x)} - 1 - (\operatorname{sen} x)^2$$

podemos sacar ventaja utilizando convenientemente productos, sumas y composición de los siguientes desarrollos

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + o(u^n) \tag{4.24}$$

$$\log(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{v^n}{n} + o(v^n) \tag{4.25}$$

$$\operatorname{sen} w = w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(w^{2n+1}) \tag{4.26}$$

para obtener que

$$
\begin{aligned}
u = x\log(1+x) &= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n} + o(x^{n+1})\\
e^u = e^{x\log(1+x)} &= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right) + \\
&+ \frac{1}{2!}\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right)^2 + o(u^3) = \\
&= 1 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} + o(x^4)
\end{aligned}
$$

$$(\operatorname{sen} x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

con lo que sustituyendo y efectuando ordenadamente los cálculos se obtiene el desarrollo del denominador

$$e^{x\log(1+x)} - 1 - (\operatorname{sen} x)^2 = -\frac{x^3}{2} + \frac{7x^4}{6} + o(x^4) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

que basta realizar hasta tercer orden porque el numerador es de grado 3. Con ayuda de estos desarrollos el límite es inmediato

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{(1+x)^x - 1 - \operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3} + o(x^3)/x^3}{-\frac{1}{2} + o(x^3)/x^3} = \frac{2}{3}$$

Las ideas son sencillas y también los procesos, sólo hay que tratar de hacer únicamente los cálculos necesarios para determinar la menor potencia de x que no se anula y tener cuidado de no olvidar ninguna potencia de x al operar con los desarrollos limitados. □

Con Maxima obtener los desarrollos limitados de cualquier orden es inmediato usando el comando `taylor(`*Función,variable,punto,orden*`)`. Y como los cálculos los hace la máquina, no es costoso poner un orden alto y luego quedarnos con los que nos interesa, que es el primer término no nulo del desarollo.
Podríamos haber empezado, por ejemplo, por desarrollos de orden 5 en el numerador y denominador, para darnos cuenta de inmediato que con los de orden 3 es suficiente.

```
taylor(x-tan(x),x,0,3);
taylor((1+x)^x -1- (sin(x))^2,x,0,3)
```

proporcionan respectivamente $-\frac{1}{3}x^3$ y $-\frac{1}{2}x^3$ lo cual permite calcular el límite de forma sencilla entendiendo bien el resultado.
Podríamos haber utilizado también
`limit( (x-tan(x))/((1+x)^x -1- (sin(x))^2),x,0);` y el resultado hubiera sido el mismo. Pero entonces Maxima habría sido una caja negra para nosotros.

4.5.2 *Sea la función $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1-x)^{(1-x)}x^x$.*

(1) Estudie y dibuje la función.

(2) Pruebe que es simétrica respecto al eje $x = \dfrac{1}{2}$.

(3) Pruebe que es convexa.

(4) Demuestre que $(1-x)^{(1-x)}x^x \leq (1-x)^2 + x^2$.

Solución: Como $x, 1-x > 0$ la función está bien definida y corresponde a

$$f(x) = e^{(1-x)\log(1-x)}e^{x\log x} = e^{(1-x)\log(1-x)+x\log x}$$

La función puede ser prolongada por continuidad en 0 y 1 con valor 1 en ambos casos ya que $\lim_{x\to 1}(1-x)\log(1-x) = \lim_{x\to 0} x\log x = 0$[9] y en consecuencia

$$\lim_{x\to 0}[(1-x)\log(1-x) + x\log x] = 0 = \lim_{x\to 1}[(1-x)\log(1-x) + x\log x]$$

El dominio de f es pues $[0,1]$ después de realizar esta prolongación por continuidad. El teorema de la función compuesta nos garantiza que f es derivable en $(0,1)$.

Para analizar el crecimiento de f basta con que lo hagamos en el exponente

$$g(x) := (1-x)\log(1-x) + x\log x$$

ya que la función exponencial es creciente y positiva. Pero

$$g'(x) = -\log(1-x) + \frac{1-x}{1-x}(-1) + \log x + 1 = \log\frac{x}{1-x}$$

y por tanto

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

siendo $g'(x) > 0$ para $x > 1/2$ y $g'(x) < 0$ para $x < 1/2$. En consecuencia g, y por ende f, tiene un mínimo en $x = 1/2$ siendo f una función estrictamente creciente a la derecha de $1/2$ y estrictamente decreciente a la izquierda de $1/2$. Además g' es estrictamente creciente, porque el logaritmo lo es y, trivialmente, también lo es $x/(1-x)$. En consecuencia (y sin necesidad de calcularla) sabemos que $g'' \geq 0$. Pero entonces $f(x) = e^{g(x)}$ tiene por derivada segunda $(e^{g(x)}g'(x))' = e^{g(x)}[(g'(x))^2 + g''(x)] \geq 0$ y por tanto f es convexa. Con esa información ya resulta muy sencillo construir la gráfica.

Además la «simetría de la fórmula» de f sugiere una «simetría geométrica» en la gráfica, como así ocurre y aparece explícitamente señalado en uno de

[9] Observe que $x \to 0$, $\log x \to -\infty$ ¿quien gana? Justifíquelo usando la regla de L'Hospital.

los ítems. La demostración analítica de la simetría se hace comprobando con un cálculo sencillo que

$$f(\frac{1}{2}-y)=f(\frac{1}{2}+y) \quad \text{para } y\in[0,\frac{1}{2}]$$

o sea, que sustituyendo en la fórmula x por $1/2-y$ o bien por $1/2+y$ se obtiene el mismo valor.

La desigualdad

$$(1-x)^{(1-x)}x^x \le (1-x)^2+x^2$$

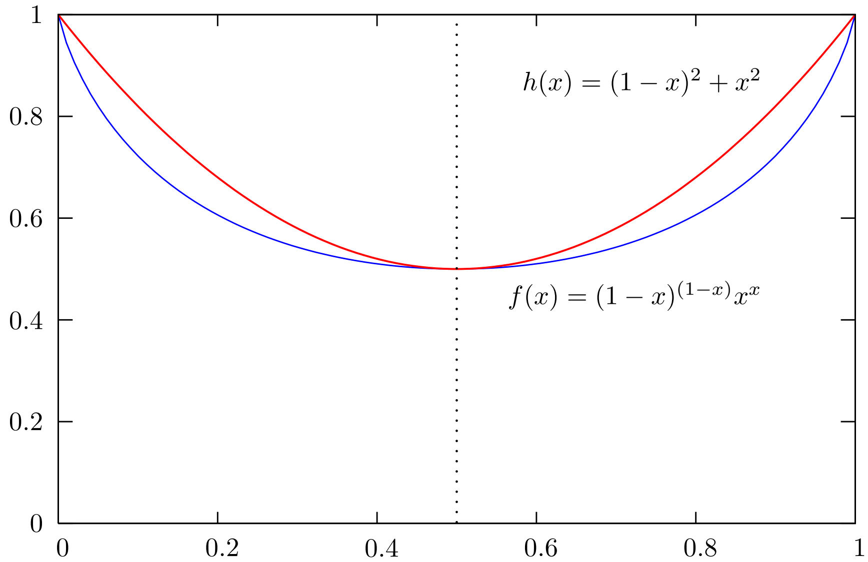
es consecuencia de que la función exponencial es convexa y por tanto

$$e^{(1-t)w+tz}\le(1-t)e^w+te^z$$

cualesquiera que sean $w,z\in\mathbb{R}$ y $t\in[0,1]$ lo cual conduce a

$$(1-x)^{(1-x)}x^x=e^{(1-x)\log(1-x)+x\log x}\le(1-x)e^{\log(1-x)}+xe^{\log x}=(1-x)^2+x^2$$

obteniendo de ese modo la fórmula buscada.



$\square$

4.5.3 *Determine intervalos en los que exista una única solución para las ecuaciones siguientes*

$$3x^4-4x^3-12x^2+12=0; \quad x-x^2-\log(1+x)=0.$$

SOLUCIÓN: La función $f(x):=3x^4-4x^3-12x^2+12$ un polinomio de grado 4 por lo que, cómo máximo, tiene 4 ceros que son las raíces de la primera ecuación. Como f es infinitamente derivable, entre cada dos ceros de f ha de existir un máximo o mínimo relativo, que serán, a la sazón, puntos en los que se anula f'. La derivada

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x+1)(x-2)$$

se anula en $x = -1, 0, 2$ siendo $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -1)$, $f'(x) > 0$ en $(-1, 0)$, $f'(x) > 0$ en $(0, 2)$ y $f'(x) > 0$ en $(2, +\infty)$. Así pues f es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ hasta $f(-1) = 7$ por lo que en ese intervalo no existe ningún cero de f. En el intervalo $[-1, 0]$ tampoco puede existir debido al crecimiento. En el intervalo $[0, 2]$ f va decreciendo desde $f(0) = 12$ hasta $f(2) = -20$ debiendo por tanto existir un cero en dicho intervalo como consecuencia del teorema de Bolzano, y só existe uno puesto que la función es estrictamente decreciente en dicho intervalo. Como f es estrictamente creciente en $[2, +\infty)$ (por ser $f' > 0$) y $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$ existe uno y sólo un cero en dicho intervalo, de hecho el cero está en el intervalo $[2, 3]$ puesto que $f(3) = 39$. Resumiendo, el polinomio propuesto tiene sólo dos raíces reales, una en el intervalo $[0, 2]$ y otra en el $[2, 3]$.

Una vez «separadas» las raíces, el cálculo aproximado de las mismas podría realizarse con el mismo procedimiento que el utilizado en la demostración abstacta del teorema de Bolzano. Pero esa tarea, ya rutinaria, puede ser realizada por una máquina y, de hecho, MAXIMA dispone de un comando para obtener soluciones aproximadas en tales situaciones[10]

`find_root(`*Función=0, Variable, Punto 1, Punto 2*`);`

`find_root(3*x^4 -4* x^3 - 12*x^2 + 12=0,x,0,2);` devuelve 0,95786495175773.

`find_root(3*x^4 -4* x^3 - 12*x^2 + 12=0,x,2,3);` devuelve 2,633286420252845.

Para el caso de polinomios, para obtener raíces aproximadas, se pueden utilizar también

- `realroots(`*Polinomio=0, Precisión*`);` donde *Precisión* es de la forma 0.00001 que calcula las raíces reales fijando la precisión de la aproximación
- `allroots(`*Polinomio=0*`);` que proporciona las raíces reales y complejas.

Para separar los ceros de la función $g(x) = x - x^2 - \log(1+x)$ utilizaremos ideas similares. En primer lugar, el dominio de la función es $(-1, +\infty)$ y se trata de una función infinitamente derivable, porque el logaritmo y los polinomios lo son. Además $\lim_{x\to-1^+} g(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ (ya que es x^2 quien determina el tamaño de g en $+\infty$) por lo tanto g tiene al menos un cero; de hecho $g(0) = 0$. Sólo nos falta determinar si g tiene más ceros. Como

$$g'(x) = 1 - 2x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x(1+2x)}{1+x}$$

tenemos que g' se anula en $x = -1/2$ y $x = 0$ siendo $g'(x) < 0$ cuando $x \in (-1, -1/2)$, $g'(x) > 0$ para $x \in (-1/2, 0)$ y $g'(x) < 0$ para $x \in (0, +\infty)$. En $x = -1/2$ existe un mínimo, siendo

$$g(-1/2) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \log\frac{1}{2} = \log 2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\log\frac{2^4}{e^3} < 0$$

Hemos afirmado que $\log(2^4/e^3) < 0$, es decir, que $2^4/e^3 < 1$. Esta desigualdad no es evidente y el lector cuidadoso quizá haya comprobado, con MAXIMA o con cualquier otra calculadora, que efectivamente así es. Sin embargo, un instante de reflexión muestra que esa no es una respuesta satisfactoria desde un punto de vista riguroso, puesto que tales herramientas electrónicas conocen el valor aproximado de e, mientras que nosotros, realmente sólo sabemos que e es el límite de la sucesión monótona creciente $(1 + 1/n)^n$. En consecuecia

$$2^4 = 16 < (1 + 1/10)^{30} = \frac{17449402268886407318558803753801}{1000000000000000000000000000000} \approx 17.449 < e^3$$

En consecuencia, existe un único cero en el intervalo $(-1, -0,5)$ cuyo valor aproximado podemos calcular mediante
`find_root (g(x),x,-0.99,-0.5);` obteniendo -0.68380262375202. En el intervalo $(-1/2, 0)$ no existe ningún cero pues g es estrictamente creciente y $g(0) = 0$, tampoco existe ningún cero de g en el intervalo $(0, +\infty)$ pues g es estrictamente decreciente en ese intervalo. Con esto finaliza el análisis sobre la distribución de ceros de la función g. $\square$

4.5.4 *Pruebe que* $\dfrac{x}{\operatorname{sen} x} < \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ *si* $x \in (0, \pi/2)$.

SOLUCIÓN: La desigualdad propuesta es equivalente a probar que la función $f : (0, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) := \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x - x^2$ cumple que $f(x) > 0$. La función f puede prolongarse por continuidad en $x = 0$ haciendo $f(0) = 0$. Si f fuera estrictamente creciente en $(0, \pi/2)$ tendríamos resuelto el problema. Y también lo tendríamos resuelto si al sustituir $f(x)$ por su desarrollo de Taylor fueramos capaces de asegurar que $f(x) > 0$ en $(0, \pi/2)$. Veamos si alguna de estas estrategias, o ambas, producen el resultado deseado.

$$f'(x) = \cos x \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} - 2x$$

Es claro que $f'(0) = 0$ pero no está claro el signo de $f'(x)$ en $(0, \pi/2)$. Podemos tratar de aplicar a f' la misma idea y calcular f''

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x \cos x}{\cos^3 x} - 2 \\
&= \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{\cos^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - 2 \\
&= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - 2 \\
&= \cos x + \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - 2 = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{tg}^2 x - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \cos x + 1 + 2\operatorname{tg}^2 x - 2 = \cos x + 2\operatorname{tg}^2 x - 1\\
&= 2\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 2(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2})\\
&\geq 2(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}) = 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}(\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} - 1) = 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}
\end{aligned}$$

Con lo cual $f''(x) > 0$ en $(0, \pi/2)$, por lo tanto f' es estrictamente creciente y siendo $f'(0) = 0$ se tiene que $f'(x) > 0$ en $(0, \pi/2)$, es decir f es estrictamente creciente en $(0, \pi/2)$. Hemos obtenido lo que buscábamos.

Utilizando el desarrollo de Taylor de f en $x = 0$ tenemos

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(c)}{3!}x^3 = \frac{f'''(c)}{3!}x^3$$

para $x \in (0, \pi/2)$. Pero

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= (\cos x + 2\operatorname{tg}^2 x - 1)' = -\operatorname{sen} x + 2\operatorname{tg} x\frac{1}{\cos^2 x}\\
&= (\operatorname{sen} x)(-1 + \frac{2}{\cos^3 x}) = \frac{\operatorname{sen} x(2 - \cos^3 x)}{\cos^3 x}
\end{aligned}$$

y por tanto $f'''(c) > 0$ para cualquier $c \in (0, \pi/2)$. Con este procedimiento obtenemos también lo que buscábamos. □

4.5.5 *Sean $f, g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[0, 1]$ y derivables en $(0, 1)$, tales que*

$$f(0) = 0, \qquad g(0) = 2, \qquad |f'(x)| \leq 1, \qquad |g'(x)| \leq 1,$$

para todo $x \in (0, 1)$. Demuestre que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [0, 1)$ y $f(1) \leq g(1)$.

Solución: Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial existen $\alpha, \beta \in (0, 1)$ tales que

$$f(x) = f(0) + f'(\alpha)x = f'(\alpha)x, \qquad g(x) = g(0) + g'(\beta)x = 2 + g'(\beta)x.$$

Por tanto,

$$g(x) - f(x) = 2 + (g'(\beta) - f'(\alpha))x.$$

Pero $|g'(\beta) - f'(\alpha)| \leq |g'(\beta)| + |f'(\alpha)| \leq 1 + 1 = 2$ o dicho de otra forma $-2 \leq g'(\beta) - f'(\alpha) \leq 2$. En consecuencia

$$g(x) - f(x) = 2 + (g'(\beta) - f'(\alpha))x \geq 2 - 2x \geq 0$$

y se obtiene así que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Además

$$g(x) - f(x) \geq 2 - 2x > 0$$

para $x \in [0, 1)$. □

4.5.6 *(1) Pruebe que la función $f(x) = x\log x$ es estrictamente convexa en $(0,\infty)$ –en particular esto significa que el producto de dos funciones cóncavas puede ser una función estrictamente convexa–*

(2) Si x, y, a, b son reales positivos pruebe que

$$x\log\frac{x}{a} + y\log\frac{y}{b} \geq (x+y)\log\frac{x+y}{a+b}$$

siendo la desigualdad estricta salvo si $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

(3) Determine el valor mínimo de

$$x_1^{x_1}x_2^{x_2}\dots x_n^{x_n}$$

bajo la condición $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = S$, siendo $S > 0$ constante.

SOLUCIÓN:

Para analizar la convexidad estudiaremos el signo de la segunda derivada de f.

$$f'(x) = \log x + x\frac{1}{x} = \log x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} > 0$$

por lo que f es estrictamente convexa.

Observemos que $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a+b} = 1$ y en consecuencia utilizando la convexidad de f se tiene

$$\begin{aligned}
x\log\frac{x}{a} + y\log\frac{y}{a} &= a\frac{x}{a}\log\frac{x}{a} + b\frac{y}{b}\log\frac{y}{a} \\
&= (a+b)\left(\frac{a}{a+b}\frac{x}{a}\log\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}\log\frac{y}{a}\right) \\
[f \text{ es convexa}] &\geq (a+b)f\left(\frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}\right) \\
&= (a+b)f\left(\frac{x+y}{a+b}\right) = (x+y)\log\frac{x+y}{a+b}
\end{aligned}$$

La desigualdad del segundo apartado está probada.

Continuando con la demostración de dicho ítem, supongamos $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$. Entonces también se cumple $\frac{x}{a} = \frac{x+y}{a+b}$, como es fácil probar, y por tanto

$$x\log\frac{x}{a} + y\log\frac{y}{a} = (x+y)\log\frac{x}{a} = (x+y)\log\frac{x+y}{a+b}$$

Por otra parte siendo f estrictamente convexa la igualdad

$$f\left(\frac{a}{a+b}z + \frac{b}{a+b}w\right) = \frac{a}{a+b}f(z) + \frac{b}{a+b}f(w)$$

sólo puede darse cuando $z = w$, lo cual completa la demostración del segundo apartado.

Veamos ahora el tercer apartado.

$$\begin{aligned}
x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n} &= e^{x_1 \log x_1} e^{x_2 \log x_2} \dots e^{x_n \log x_n} \\
&= e^{f(x_1)+\dots+f(x_n)} \\
&= e^{n(\frac{1}{n}f(x_1)+\dots+\frac{1}{n}f(x_n))} \\
[f \text{ convexa y exponencial crece}] &\geq e^{nf(\frac{1}{n}x_1+\frac{1}{n}x_2+\dots+\frac{1}{n}x_n)} = e^{nf(S/n)} \\
&= e^{n(S/n)\log(S/n)} = e^{S\log(S/n)} \\
&= (e^{\log(S/n)})^S = (\frac{S}{n})^S
\end{aligned}$$

Y cuando $x_1 = x_2 = \dots = x_n = S/n$ se cumple

$$x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n} = (\frac{S}{n})^S$$

siendo, por tanto ese el valor mínimo de la expresión. □

Ejercicios propuestos

4.1) Estudie la derivabilidad en $x = 0$ de las siguientes funciones

$$f(x) = (x^3 + x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad f(x) = \sqrt{|x|}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}} \log |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\operatorname{sen} x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4.2) Calcule las derivadas de las siguientes funciones

a) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + \arccos \sqrt{\frac{x-1}{x}}$, $x > 1$.

b) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, $x \in (0, \pi)$.

c) $f(x) = x^{x^x}$, $x > 0$.

d) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

e) $f(x) = x$ si $x \leq 0$, $f(x) = \frac{4x^2}{\pi^2}$ si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $f(x) = 1$ si $\frac{\pi}{2} \leq x$.

f) $f(x) = -x + a$ si $x \leq 0$, $f(x) = x^2 + bx$ si $0 < x < 1$, $f(x) = c$ si $1 \leq x$.

4.3) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$ para cada par de números reales x, y. Pruebe que f es una función constante.

4.4) Sea f una función derivable en $x \in (a, b)$. Pruebe que existe el límite

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x).$$

De un ejemplo de una función f para la que existe el límite anterior, sin ser derivable en x.

4.5) Pruebe que el determinante de una matriz cuyos elementos son funciones derivables también es una función derivable.

Considerando el determinante de orden n

$$F_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix}$$

Establecer la fórmula $F_n'(x) = nF_{n-1}(x)$ y deducir que $F_n(x) = x^n + nx^{n-1}$.

4.6) Pruebe que si $0 < x_1 < x_2 < \pi/2$ se tiene

$$\frac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} x_1} > \frac{x_2}{x_1}$$

4.7) En cada uno de los casos siguientes, encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y mínimos relativos y absolutos de f (si existen) en el conjunto en el que f esta definida:

a) $f(x) = x^3 + ax + b$; $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \log(x^2 - 9)$; $|x| > 3$.

c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)^4$; $x \in [0,1]$.

d) $f(0) = 1$, $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$; $0 < x \le \frac{\pi}{2}$.

4.8) Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una elipse de semiejes a y b.

4.9) Halle la relación entre la arista de un cubo y el radio de una esfera para que siendo constante la suma de sus áreas, sea mínimo el valor de la suma de sus volúmenes.

4.10) Calcule el tiempo necesario para cruzar en línea recta y con la mínima velocidad, una calle de anchura k, por el centro de la cual circulan a la misma velocidad y en el mismo sentido, automóviles de ancho a separados uno de otro por una distancia d.

4.11) Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, y x_0 un punto de I. Sabiendo que f es derivable en todos los puntos de I distintos de x_0 y que existe el límite de $f'(x)$ cuando x tiende a x_0, pruebe que f también es derivable en x_0.

4.12) Sea $f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, derivable en $(0,1)$, con derivada acotada. Pruebe que f es uniformemente continua en $(0,1]$.

4.13) Pruebe que $0 < 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{x^2}{2}$ si $x \in (0, \pi/2)$

4.14) Establecer las siguientes desigualdades:

$\tanh x \le x \le \operatorname{senh} x$, $\forall x \in [0, +\infty)$; siendo $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

$e^x > \frac{1}{1+x}$, $\forall x \in (0, +\infty)$;

$x - \frac{1}{2}x^2 < \log(1+x) < \operatorname{tg} x$, $\forall x \in (0,1)$;

$\frac{1}{1+x}x < \log(1+x) < x$, $\forall x > -1$;

$1 - \frac{a}{b} < \log b - \log a < \frac{b}{a} - 1$, para $0 < a < b$;

$\frac{1}{\cos^2 x} < \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x}{y - x} < \frac{1}{\cos^2 y}$, para $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$.

4.15) Demuestre que para todo $x \geq 0$ se tiene $|\sqrt[3]{1+x} - (1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9})| \leq \frac{5x^3}{81}$

4.16) Pruebe que para una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable hasta el orden n que se anula en $n+1$ puntos distintos de $[a, b]$, existe un punto en (a, b) donde $f^{(n)}$ es nula.

4.17) Sea $f : (a, b) \longrightarrow [0, \infty)$ tres veces derivable en (a, b). Supongamos que existen dos puntos $x_1 < x_2 \in (a, b)$ tales que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Pruebe que existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'''(c) = 0$.

4.18) Calcule los siguientes límites

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{sen} x - e^x}{(\operatorname{arctg} x)^2} \qquad \lim_{x \longrightarrow 0^+} (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{\log x}} \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} x\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e\right)$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x} \qquad \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\log x}{x - \sqrt{x}} \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} x^{\frac{5}{2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$$

4.19) Determine los siguientes desarrollos limitados en un entorno del origen

De orden 4 para $f(x) = \log^2(1+x)$; De orden 3 para $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$;
De orden 6 para $f(x) = \log(\cos x)$; De orden 4 para $f(x) = (1+x)^x$.

Hágalo también usando Maxima.

4.20)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + \operatorname{sen} x) - \log(1+x)}{x - \operatorname{tg} x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log \sec x - \operatorname{sen}^2 x}{x(x - \operatorname{tg} x) \cos x}$$

Hágalo también usando Maxima.

4.21) Haciendo uso de la fórmula de Taylor para la función $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ situando el término complementario en el lugar de las derivadas terceras, calcule aproximadamente $(1,03)^{\frac{1}{3}}$. Estime el error cometido en la aproximación.

4.22) Calcule $\cos 64°$ con error menor de una milésima.

4.23) Represente gráficamente la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ para $x > 0$

a) ¿Cuál de los dos números e^π, π^e es mayor?

b) ¿Cuantas soluciones tiene la ecuación $n^m = m^n$ en $\mathbb{N}$?

Hágalo también usando Maxima.

4.24) Estudie y dibuje las gráficas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \tfrac{x+e^x}{x-e^x}, \quad f(x) = e^{\frac{2x}{x^2-1}}, \quad f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

Hágalo también usando Maxima.

4.25) Las funciones seno, coseno y tangente hiperbólicos se definen mediante las fórmulas siguientes:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$$

a) Estudie los dominios de definición, continuidad, derivabilidad, convexidad y represente gráficamente estas funciones.

b) Estudie la existencia de inversa para cada una de ellas y sus dominios de definición. Dichas inversas son llamadas argumento seno hiperbólico,... Exprese dichas inversas en términos de la función log

c) Estudie los dominios de definición, continuidad, derivabilidad, convexidad y represente gráficamente estas funciones inversas.

d) Demuestre las siguientes fórmulas:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

y deduzca las fórmulas de $\operatorname{senh}^2 x, \cosh^2 x$ en función de $\cosh 2x$

e) Calcule los primeros términos del desarrollo limitado de estas funciones.

4.26) Pruebe que para $x \in [0, \pi/2]$ se verifica $\operatorname{sen} x \geq \frac{2x}{\pi}$.

4.27) Sea $f : (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\log(\log x)$. Pruebe que f es convexa y que si $a, b \in (1, \infty)$ se cumple $\log(\frac{a+b}{2}) \geq \sqrt{\log a \log b}$.

4.28) Demuestre que la media aritmética de n números reales positivos es mayor o igual que la media geométrica.