5

Cálculo integral

Competencias

- Saber definir el concepto de integral de Riemann y conocer que las funciones continuas y monótonas son integrables.
- Saber aplicar las propiedades de linealidad y monotonía de las integrales.
- Conocer y saber aplicar el teorema fundamental de cálculo para evaluar integrales o discutir ecuaciones.
- Saber evaluar integrales y calcular áreas, utilizando el teorema fundamental del cálculo, el cambio de variable, la integración por partes.
- Saber usar Maxima para calcular integrales.

Contenidos

5.1. La integral de Riemann
5.2. Caracterización y propiedades elementales
5.3. Teorema fundamental del cálculo
5.4. Aplicaciones de la integral
5.5. Ejercicios

Una de las interpretaciones más simples del concepto de integral de Riemann está vinculado con el concepto de «área» bajo la gráfica de una función positiva y acotada f, definida en un intervalo acotado $[a, b]$, que es representada simbólicamente en la forma

$$\int_a^b f(t)\,dt.$$

Intuitivamente la noción de área está conectada con principios básicos bastante naturales:

- Elegir la unidad de medida, para la que tradicionalmente se adopta el cuadrado de lado unidad.
- Aceptar que el área de un conjunto es un número mayor o igual que cero.
- Aceptar que si un conjunto se descompone en un número finito de subconjuntos disjuntos, entonces el área del conjunto total es la suma de las áreas de los subconjuntos.
- Aceptar que realizar movimientos rígidos en un conjunto no varía su área.

Con esos principios es sencillo asignar área a rectángulos y triángulos, y por ende a regiones que admiten una descomposición en triángulos, como los polígonos. Incluso se podría llegar a determinar el área de un círculo a través de las áreas de una sucesión de polígonos regulares de n lados inscritos en él, o circunscritos a él, si tales límites existieran. Pero, ¿por qué limitarse a estos tipos especiales de figuras? ¿por qué no ir más allá dejándose guiar por los mismos principios? y poder así asignar área a conjuntos más generales. Esa es la perspectiva de la integral de Riemann que definimos en este capítulo y cuyas propiedades estudiamos.

Desde otro punto de vista, pero conectado con la noción anterior, aparece la noción de integral indefinida

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Ahora la integral se muestra como una función que podemos analizar con ayuda de la herramientas del cálculo: estudiando su continuidad, derivabilidad, etc. El resultado de este análisis nos lleva al célebre Teorema Fundamental del Cálculo, que establece el vínculo entre el cálculo de derivadas (tangente a una curva) y el de integral de Riemann (área bajo una curva), como problemas inversos, y proporciona una herramienta utilísima para la evaluación de áreas y el cálculo de integrales.

Las ideas pueden ser aplicadas y adaptadas a situaciones de otro tipo, tanto en el ámbito de las matemáticas (volúmenes, superficies de revolución...), de la ingeniería y la física (trabajo, energía, centros de gravedad, momentos de inercia...) de la estadística y probabilidad o de la economía.

5.1. La integral de Riemann

A lo largo del capítulo $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ será siempre una función acotada aunque no se mencione explícitamente.

Definición 5.1.1

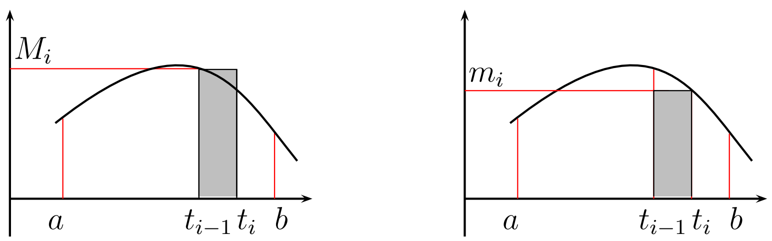
(1) Llamaremos partición de $[a, b]$ a cualquier conjunto finito $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ tal que

$$t_0 = a < t_1 < t_2 \ldots < t_n = b.$$

El conjunto de todas las particiones de $[a, b]$ lo designaremos con $\mathscr{P}[a, b]$. Denotaremos con $M_i = \sup_{[t_{i-1},t_i]} f(t)$ y con $m_i = \inf_{[t_{i-1},t_i]} f(t)$ donde con $t_0 = a < t_1 < t_2 \ldots < t_n = b$ representamos un elemento de $\mathscr{P}[a, b]$.

(2) Si $P \in \mathscr{P}[a, b]$ llamamos suma superior y suma inferior de f correspondiente a P a los números reales definidos por las siguientes fórmulas

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$
$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$



Es sencillo ver la interpretación geométrica de tales sumas (véase la figura 5.1) y también que $s(f, P) \leq S(f, P)$, pues para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene $m_i \leq M_i$.

A continuación establecemos una relación de orden (no total) en el conjunto de las particiones y estudiamos el comportamiento de las sumas inferior y superior respecto a dicho orden.

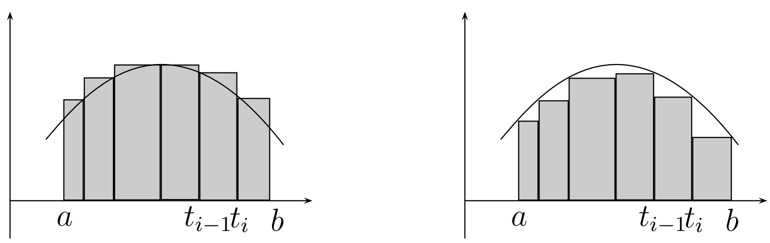


Figura 5.1: Sumas superiores, $S(f, P)$, e inferiores, $s(f, P)$.

Desde los albores de la matemática el cálculo de áreas de figuras planas y de volúmenes de cuerpos tridimensionales constituye un problema central. La matemática griega desarrolló un método perfectamente riguroso para dicho cálculo en casos complicados: el de figuras o cuerpos curvilíneos. los orígenes del llamado *método de exhausción* se remontan al siglo V a.d.C. con los trabajos de Hipócrates de Quíos, pero alcanza su expresión rigurosa con Eudoxo de Cnido, en el siglo IV a.d.C., siendo esta aproximación rigurosa posible en base a la teoría de las proporciones de este matemático y, muy especialmente, a la conocida hoy como propiedad arquimediana (véase la nota histórica de la página 11).

La esencia del método de exhausción (que, en español, es más habitualmente denominado «exhaución») es la siguiente: dada una figura curvilínea S, consideramos una sucesión de polígonos P_1, P_2, P_3,... inscritos en S. El punto clave consiste en mostrar que el área de la diferencia $S - P_n$, es decir el área de la región no «llenada» por el polígono P_n, puede hacerse tan pequeña como se desee eligiendo n suficientemente grande. Es en este punto en el que el Principio de Eudoxo resulta fundamental.

La exposición rigurosa de la idea anterior se completa con una *doble reducción al absurdo* característica del método que, en términos genéricos, para probar la igualdad de dos cantidades a y b, supone alternativamente $a > b$ y $a < b$, llegando en ambos casos a contradicción. La fuente principal, anterior a Arquímedes, para el *método de exhausción* es el libro XII de los *Elementos* de Euclides; en él al menos ocho de las dieciocho Proposiciones utilizan el citado método. Según los comentarios de Arquímedes se puede concluir que Euclides debe gran parte de este libro XII a Eudoxo.

La búsqueda de métodos específicos para el cálculo de áreas continuó a lo largo de la historia del cálculo como uno de sus objetivos primordiales: sólo con Leibniz y Newton esta búsqueda fue ligada al otro gran problema del cálculo, el cálculo de tangentes a curvas. Ese fue el momento en el que se considera «creado» el cálculo infinitesimal (o, si se prefiere, el cálculo diferencial e integral).

Definición 5.1.2

(1) Si P, P' son particiones de $[a, b]$ diremos que P' es más fina que P, y escribiremos $P \prec P'$, si todos los elementos de P están en P'. En otras palabras, si P es un subconjunto de P'.

(2) Denotaremos con $P \vee P'$ a la partición cuyos elementos son los puntos pertenecientes a alguna de las particiones P o P' (obviamente es una partición pues contiene al menos los puntos a, b). Se trata de la partición unión de ambas.

Proposición 5.1.3 *Sean P, P' particiones de $[a, b]$. Entonces:*

(1) $P \prec P'$ implica $s(f, P) \leq s(f, P')$.

(2) $P \prec P'$ implica $S(f, P) \geq S(f, P')$.

Demostración: El resultado es inmediato si P' tiene un punto más que P. En efecto, sea P la partición $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ y P' la partición que consiste en todos los puntos de P junto con el punto $s \in (t_{i-1}, t_i)$. Entonces se verifica:

$$m_i = \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f(t) \leq \inf_{[t_{i-1}, s]} f(t) := m_i' \quad \text{y} \quad m_i = \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f(t) \leq \inf_{[s, t_i]} f(t) := m_i''$$

Por tanto:

$$\sum_{j=1}^{n} m_j(t_j - t_{j-1}) := s(f,P) \leq s(f,P') := \sum_{j=1}^{i-1} m_j(t_j - t_{j-1}) +$$
$$+ m_i'(s - t_{i-1}) + m_i''(t_i - s) + \sum_{j=i+1}^{n} m_j(t_j - t_{j-1})$$

El caso general se obtiene reiterando. □

Corolario 5.1.4 *Si P, P' son particiones de $[a,b]$ entonces $s(f,P) \leq S(f,P')$.*

DEMOSTRACIÓN: Obviamente $P \prec P \vee P'$ y lo mismo le ocurre a P'. Podemos aplicar entonces la proposición anterior

$$s(f,P) \leq s(f,P \vee P') \leq S(f,P \vee P') \leq S(f,P')$$

y obtenemos el resultado. □

La propiedad expresada en este corolario da sentido a las definiciones que siguen.

Definición 5.1.5

(1) Se llama integral inferior (de Darboux) de f al número real

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f,P); P \in \mathscr{P}[a,b]\}.$$

(2) Se llama integral superior (de Darboux) de f al número real

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{S(f,P); P \in \mathscr{P}[a,b]\}.$$

(3) Se dice que f es integrable Riemann en $[a,b]$ y se escribe $f \in \mathscr{R}[a,b]$ si las integrales inferior y superior de f coinciden. A ese valor común se llama integral Riemann de f y se denota por

$$\int_a^b f.$$

El contenido geométrico, para funciones positivas, de la definición anterior es bastante claro y está relacionado con la asignación de áreas a cierto tipo de regiones planas, sea por exceso, sea por defecto, con el horizonte de que el valor de ambas asignaciones sea el mismo. Algo similar a lo que se haría con polígonos regulares inscritos y circunscritos a un círculo para calcular el área de éste, o, más generalmente, mediante la descomposición en figuras de área conocida para determinar la superficie de un territorio. En este caso se recurre a la aproximación mediante el área de regiones que se descomponen en rectángulos.

Observe que la integral inferior está bien definida ya que, según el corolario, el conjunto $\{s(f,P); P \in \mathscr{P}[a,b]\}$ está acotado superiormente por cualquier suma superior $S(f,P)$. En particular

$$\underline{\int_a^b} f \leq S(f,P)$$

para cualquier $P \in \mathscr{P}[a,b]$. Ahora, de forma análoga, $\{S(f,P); P \in \mathscr{P}[a,b]\}$ está acotado inferiormente por $\underline{\int_a^b} f$, de donde se obtiene que la integral superior está bien definida y, tomando ínfimos, se tiene:

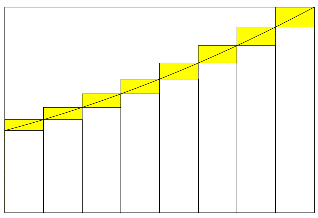
$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

5.2. Caracterización y propiedades elementales

El siguiente resultado establece una caracterización útil de la integrabilidad Riemann.

Teorema 5.2.1 *La función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable Riemann si y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathscr{P}[a,b]$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.*

DEMOSTRACIÓN:



Supongamos que $f \in \mathscr{R}[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$ existen particiones P_1 y P_2 tales que

$$S(f,P_1) - \int_a^b f < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\int_a^b f - s(f,P_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Y, por tanto, si $P = P_1 \vee P_2$, utilizando el corolario 5.1.4 se tiene

$$S(f,P) - \int_a^b f < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\int_a^b f - s(f,P) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces basta sumar estas desigualdades para obtener $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

Recíprocamente, supongamos que para cada ε existe una partición P que cumple la condición $S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$. Entonces fijado ε existe una partición P tal que

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$

Y al ser ε arbitrario se concluye que las integrales superior e inferior coinciden. □

Observe que la diferencia $S(f,P) - s(f,P)$ decrece cuando se refina la partición P, por tanto la caracterización anterior de la integrabilidad Riemann puede enunciarse, de forma equivalente, en la forma siguiente: $f \in \mathscr{R}[a,b]$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $P \in \mathscr{P}[a,b]$ tal que para cualquier otra $P' \in \mathscr{P}[a,b]$ con $P \prec P'$ se verifica $S(f,P') - s(f,P') < \varepsilon$.

Ejemplos 5.2.2

(1) Como es fácil comprobar considerando las sumas superiores e inferiores, un ejemplo de una función no integrable Riemann en $[0,1]$ lo proporciona la función de Dirichlet D_1, definida como la función característica de los irracionales del intervalo $[0,1]$, es decir, $D_1(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $D_1(x) = 1$ si $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$.

(2) En cambio la segunda función de Dirichlet D_2, definida como cero en los irracionales y $D_2(x) = 1/q$ supuesto que $x = p/q$ es irreducible, es integrable Riemann y su integral es cero, como posteriormente justificaremos.

El corolario que sigue proporciona ejemplos más importantes.

Corolario 5.2.3 *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

(1) Si f es continua entonces $f \in \mathscr{R}[a,b]$.

(2) Si f es monótona entonces $f \in \mathscr{R}[a,b]$.

DEMOSTRACIÓN: Aplicaremos el teorema 5.2.1 teniendo en cuenta que:

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}).$$

- Cualquier función continua alcanza su supremo y su ínfimo sobre una intervalo cerrado y acotado, por tanto, si $[t_{i-1}, t_i]$ es uno de los intervalos definidos por una partición arbitraria, se verifica: $M_i = f(\xi_i)$ y $m_i = f(\eta_i)$, para ciertos $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

  Por otro lado, si f es continua es uniformemente continua (teorema de Heine), por lo que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $t_i - t_{i-1} < \delta$ entonces $M_i - m_i = f(\xi_i) - f(\eta_i) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ y por tanto

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon.$$

- Si f es monótona creciente y $f(a) = f(b)$ entonces es constante, por lo que es continua y, por tanto, integrable Riemann. Si f es monótona creciente y $f(a) < f(b)$ eligiendo una partición tal que

$$t_i - t_{i-1} < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)},$$

puesto que $M_i = f(t_i)$ y $m_i = f(t_{i-1})$, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1})) = \varepsilon$$

y por tanto $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

Así pues tanto las funciones continuas como las monótonas son integrables. $\square$

Sumas de Riemann: otra caracterización de la integrabilidad

Definición 5.2.4 *Sean $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ una partición de $[a,b]$. Sea $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ una colección arbitraria de puntos tales que $z_i \in [t_{i-1}, t_i]$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Se llama suma de Riemann asociada a la partición P y a los puntos $\{z_i\}_i$ a*

$$S(f, P, z_i) := \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(t_i - t_{i-1}).$$

En términos geométricos las sumas de Riemann son sumas intermedias entre las sumas superiores y las sumas inferiores, en el sentido de que

$$s(f,P) \leq S(f, P, z_i) := \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(t_i - t_{i-1}) \leq S(f,P).$$

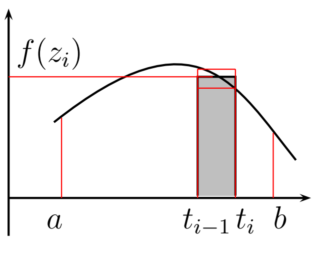


Figura 5.2: Sumas de Riemann

Teorema 5.2.5 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f *es integrable Riemann en* $[a,b]$.

(2) Existe un número real A *con la propiedad siguiente: para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $P_0 \in \mathscr{P}[a,b]$ *tal que si* $P_0 \prec P \in \mathscr{P}[a,b]$ *se cumple*

$$|A - S(f,P,z_i)| < \varepsilon,$$

para cualquier suma de Riemann correspondiente a P.

Además en ese caso $A = \int_a^b f$.

Demostración: Supongamos en primer lugar $f \in \mathscr{R}[a,b]$ y tomemos $A = \int_a^b f$. Dado $\varepsilon > 0$, sea P_0 tal que

$$S(f,P_0) - s(f,P_0) < \varepsilon.$$

Por tanto, si $P_0 \prec P$, se tiene $S(f,P) - s(f,P) \leq S(f,P_0) - s(f,P_0) < \varepsilon$. Por otro lado, para cualquier colección de puntos $z_i \in [t_{i-1}, t_i]$ se tienen las desigualdades

$$\begin{aligned} s(f,P) &\leq S(f,P,z_i) \leq S(f,P) \\ s(f,P) &\leq \quad \int_a^b f \quad \leq S(f,P) \end{aligned}$$

que implican

$$|A - S(f,P,z_i)| < \varepsilon.$$

Veamos ahora el recíproco. Supongamos que A cumple la condición fijada en el apartado (2). Dado ε tomamos P para que

$$|A - S(f,P,z_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y tomamos z_i de modo que

$$M_i - f(z_i) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

se tiene entonces:

$$S(f,P) - S(f,P,z_i) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - f(z_i))(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2}$$

y como $|A - S(f,P,z_i)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ se tiene

$$|A - S(f,P)| < \varepsilon.$$

En resumen, para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P con

$$|A - S(f,P)| < \varepsilon.$$

De forma análoga puede probarse que $|A - s(f,P)| < \varepsilon$ y en consecuencia

$$S(f,P) - s(f,P) = |S(f,P) - A + A - s(f,P)| < 2\varepsilon.$$

Esto prueba, de acuerdo con el corolario 5.2.1, que f es integrable Riemann en $[a,b]$ y, como hemos probado en la anterior implicación, $A = \int_a^b f$. □

El teorema anterior establece que, en algún sentido (que no detallaremos aquí), la integral de Riemann corresponde a un cierto concepto de límite para las sumas de Riemann cuando las particiones se ordenan mediante refinamiento.

Con ayuda de Maxima es sencillo calcular, para funciones concretas, la imagen geométrica que corresponde al valor de las sucesivas sumas inferiores, superiores y de Riemann así como el valor de la suma de las áreas de los correspondientes rectángulos. Sumas que convergen a la integral en el correspondiente intervalo, que Maxima es capaz de calcular de forma exacta, en algunos casos particulares, y de forma numérica en casos más generales.

Otra manera de presentar la integral como «límite» es a través de la norma de la partición.

Definición 5.2.6 *Si $P = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a,b]$ se llama norma de la partición a*

$$\delta := \max\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}.$$

Lema 5.2.7 *Sea P' una partición de $[a,b]$ obtenida a partir de la partición P añadiéndole k puntos y sea δ la norma de la partición P. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada con $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces*

$$|S(f,P,z_i) - S(f,P',z'_j)| < \delta(M-m)k$$

supuesto que los puntos z_i y z'_j coinciden en aquellos intervalos de P que no han sido subdivididos por la partición P'.

Demostración: Consideremos en primer lugar que $k = 1$. En tal caso todos los sumandos, salvo uno, de la suma de Riemann $S(f,P,z_i)$ coinciden con los correspondientes sumandos de $S(f,P',z'_j)$. Por tanto el valor de

$$|S(f,P,z_i) - S(f,P',z'_j)|$$

coincide con

$$\Big|f(z)(t-s) - \Big(f(z')(t-u) + f(z'')(u-s)\Big)\Big|$$

siendo u el nuevo elemento de P' introducido entre dos elementos sucesivos, $t < s$, de la partición P. Pero

$$\begin{gathered}|f(z)(t-s) - (f(z')(t-u) + f(z'')(u-s))| = \\ |(f(z) - f(z'))(t-u) + (f(z) - f(z''))(u-s)| \leq \\ (M-m)(t-u) + (M-m)(u-s) \leq (M-m)\delta\end{gathered}$$

Así pues, cada adición de un nuevo punto a la partición incrementa el valor de $|S(f, P, z_i) - S(f, P', z'_j|$ a lo más en $(M - m)\delta$ de donde se obtiene el resultado buscado. □

Teorema 5.2.8 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es integrable Riemann en $[a, b]$.

(2) Existe un número real A con la propiedad siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada partición P de norma menor que δ se cumple

$$|A - S(f, P, z_i)| < \varepsilon,$$

para cualquier suma de Riemann correspondiente a P.

Además en ese caso $A = \int_a^b f$.

Demostración: Es claro que si se cumple el segundo apartado del teorema 5.2.8 entonces también se cumple el segundo apartado del teorema 5.2.5 y por tanto f es integrable.

Recíprocamente, si f es integrable, entonces, aplicando de nuevo el teorema 5.2.5, dado $\varepsilon > 0$ existe una partición P_0 tal que para toda partición P' más fina que P_0 se tiene

$$|A - S(f, P', z_i)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.1}$$

para cualquier elección de z_i. Sea k el número de puntos de la partición P_0 y sean m, M tales que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Elijamos $\delta > 0$ de modo que $\delta(M - m)k < \varepsilon/2$. Sea P una partición de norma menor que δ y sea $P' = P \vee P_0$. Entonces aplicando el lema precedente se tiene que

$$|S(f, P, z_i) - S(f, P', z'_j)| \leq \delta(M - m)k < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.2}$$

(eligiendo los puntos z'_j como iguales a los z_j para los que se sitúan en los intervalos de P que no han sido subdivididos por los puntos de P_0).

Las fórmulas (5.1) y (5.2) junto con la desigualdad triangular nos permite concluir que

$$|A - S(f, P, z_i)| \leq |A - S(f, P', z_i)| + |S(f, P', z'_j) - S(f, P, z_i)| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y el teorema está demostrado. □

Linealidad, positividad y aditividad respecto de intervalos

Proposición 5.2.9 *$\mathscr{R}[a,b]$ es un espacio vectorial y el operador $\int_a^b$ es lineal.*

DEMOSTRACIÓN: Es conocido (y sencillo de probar) que el conjunto de las aplicaciones acotadas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial. En consecuencia, para probar que $\mathscr{R}[a,b]$ es un espacio vectorial basta verificar que si $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces $f+g \in \mathscr{R}[a,b]$ y $kf \in \mathscr{R}[a,b]$.

De acuerdo con el teorema 5.2.5, dado ε existe P_0 tal que para $P_0 \prec P$ se cumplen

$$\Big|\int_a^b f - S(f,P,z_i)\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \Big|\int_a^b g - S(g,P,z_i)\Big| < \frac{\varepsilon}{2},$$

con lo que utilizando la desigualdad triangular tenemos

$$\Big|\int_a^b f + \int_a^b g - S(f+g,P,z_i)\Big| = \Big|\int_a^b f - S(f,P,z_i) + \int_a^b g - S(g,P,z_i)\Big| < \varepsilon.$$

Aplicando de nuevo el teorema 5.2.5 se concluye que $f+g \in \mathscr{R}[a,b]$ y que

$$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Para la función kf se procede análogamente: por la integrabilidad de f fijado $\varepsilon > 0$ existe P_0 tal que para $P_0 \prec P$ se cumple

$$\Big|\int_a^b f - S(f,P,z_i)\Big| < \frac{\varepsilon}{1+|k|}$$

pero entonces

$$\Big|k\int_a^b f - S(kf,P,z_i)\Big| = |k|\Big|\int_a^b f - S(f,P,z_i)\Big| < |k|\frac{\varepsilon}{1+|k|} < \varepsilon.$$

Así pues, $kf \in \mathscr{R}[a,b]$ y

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f.$$

En resumen, $\mathscr{R}[a,b]$ es un espacio vectorial y $\int_a^b$ es una aplicación lineal en dicho espacio. □

Proposición 5.2.10 *Sean $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$.*

(1) Si $f(x) \le g(x)$, para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f \le \int_a^b g$.

(2) Si $m \le f(x) \le M$, para todo $x \in [a,b]$, entonces $m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$.

Demostración: Obviamente $s(f,P) \leq s(g,P)$ para cualquier partición, de donde se sigue de forma inmediata el primer apartado. El segundo es consecuencia directa del primero. □

Dada una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se definen las funciones parte positiva de f y parte negativa de f mediante: $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$. Es decir:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Observe que se verifican las dos igualdades importantes siguientes:

$$f = f^+ - f^- \quad \text{y} \quad |f| = f^+ + f^-$$

que son fáciles de verificar distinguiendo en cada caso, según el signo de $f(x)$.

Proposición 5.2.11 *Si $f \in \mathscr{R}[a,b]$ entonces f^+, f^-, $|f| \in \mathscr{R}[a,b]$ y se verifica*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Demostración: Denotemos con M_i', m_i' el supremo y el ínfimo, respectivamente, de f^+ en $[t_{i-1}, t_i]$. Entonces se tiene:

$$M_i' - m_i' \leq M_i - m_i$$

En efecto, si f no cambia de signo en $[t_{i-1}, t_i]$ la desigualdad es evidente (pues, o bien $f^+ = f$ o bien $f^+ = 0$), y si f cambia de signo basta tener en cuenta que $M_i^+ = M_i$, $m_i' = 0$ y $m_i < 0$.

Como consecuencia de ello tenemos

$$S(f^+, P) - s(f^+, P) \leq S(f,P) - s(f,P)$$

y, como f es integrable Riemann podemos aplicar la caracterización de integrabilidad del teorema 5.2.1 y concluir que $f^+ \in \mathscr{R}[a,b]$.

Utilizando la linealidad de la integral se obtiene entonces que $f^- = f^+ - f$ y $|f| = f^+ + f^-$ son integrables Riemann en $[a,b]$.

La acotación

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

que se afirma en el enunciado de la proposición es consecuencia de que $-|f| \leq f \leq |f|$ y del apartado (1) de la proposición 5.2.10. □

Una consecuencia de los resultados anteriores es que si $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$ entonces

$$\left| \int_a^b f \right| \leq M(b-a) \tag{5.3}$$

Proposición 5.2.12 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada y sea $c \in [a, b]$.*

(1) $f \in \mathscr{R}[a, b]$ implica $f \in \mathscr{R}[a, c]$ y $f \in \mathscr{R}[c, b]$ siendo además

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

(2) $f \in \mathscr{R}[a, c]$ y $f \in \mathscr{R}[c, b]$ implica $f \in \mathscr{R}[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN: Para la primera parte vamos a demostrar algo más general: que dado un intervalo arbitrario $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, si $f \in \mathscr{R}[a, b]$ entonces $f \in \mathscr{R}[\alpha, \beta]$. En particular tomando $[\alpha, \beta] = [a, c]$ y $[\alpha, \beta] = [c, b]$ obtendremos el resultado deseado.

Para ello consideremos, para cada $\varepsilon > 0$, una partición $P \in \mathscr{P}[a, b]$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$. No hay inconveniente en suponer que α y β son puntos de P, pues, en caso contrario, podemos refinar P añadiéndole dichos puntos, y la desigualdad anterior sigue siendo cierta.

Si ahora en la suma $S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$ tomamos sólo los términos correspondientes a subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ contenidos en $[\alpha, \beta]$, obtendremos una cantidad menor, y, así, tenemos una partición $P' \in \mathscr{P}[\alpha, \beta]$ tal que $S(f, P') - s(f, P') < \varepsilon$, por lo que $f \in \mathscr{R}[\alpha, \beta]$.

Para la segunda parte, dado $\varepsilon > 0$, existen $P_1 \in \mathscr{P}[a, c]$ y $P_2 \in \mathscr{P}[c, b]$ tales que:

$$S(f, P_1) - s(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad S(f, P_2) - s(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si tomamos $P = P_1 \vee P_2$ entonces $P \in \mathscr{P}[a, b]$ y tenemos:

$$S(f, P) - s(f, P) = (S(f, P_1) - s(f, P_1)) + (S(f, P_2) - s(f, P_2)) < \varepsilon$$

por tanto f es integrable Riemann en $[a, b]$.

Para probar la igualdad $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ consideremos, con la notación anterior, las desigualdades:

$$s(f, P) = s(f, P_1) + s(f, P_2) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq S(f, P_1) + S(f, P_2) = S(f, P)$$

Puesto que también se verifica

$$s(f, P) \leq \int_a^b f \leq S(f, P)$$

tenemos:

$$\left| \int_a^b f - \int_a^c f - \int_c^d f \right| \leq S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon.$$

La desigualdad anterior es cierta para todo $\varepsilon > 0$, por lo que se tiene la igualdad buscada. □

Definición 5.2.13 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.*

(1) Si $a = b$ se conviene que

$$\int_a^a f = 0.$$

(2) Si $f \in \mathscr{R}[a, b]$ pondremos

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Con esa definición para a, b, c arbitrarios, con las hipótesis de integrabilidad adecuadas, se verifica

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

El lector puede convencerse de ello utilizando la definición anterior y considerando los diferentes casos que pueden presentarse en las posiciones relativas de a, b y c (es decir, $a \leq c \leq b$, $a \leq b \leq c$, etc.)

Proposición 5.2.14 *Si $f \in \mathscr{R}[a, b]$ y $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ coincide con f salvo en un número finito de puntos, entonces $g \in \mathscr{R}[a, b]$ y*

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos, inicialmente, que f y g difieran en un único punto $c \in [a, b]$, o dicho de otra manera que g se obtiene a partir de f modificando el valor de f es un único punto. Consideremos la función $h := g - f$. La función h es nula en todos los puntos menos en c. Supongamos que $h(c) > 0$. Es obvio entonces que $s(h, P) = 0$ para cualquier partición P de $[a, b]$, con lo que la integral inferior de h es cero. Además, para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de modo que $0 < S(h, P) < \varepsilon$. En efecto, basta tomar una partición P tal que el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ que contenga al punto c verifique $t_i - t_{i-1} < \varepsilon/h(c)$ pues, en tal caso $S(h, P) = h(c)(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$. Entonces la integral superior de h es cero. Así que h es integrable y su integral es cero. Pero como $g = f + h$, aplicando la proposición 5.2.9 se obtiene que

$$g \in \mathscr{R}[a, b] \quad \text{y} \quad \int_a^b g = \int_a^b f + \int_a^b h = \int_a^b f.$$

El resultado está probado cuando f y g difieren en un único punto. En el caso en que difieran en n puntos basta reiterar el proceso anterior n veces, modificando cada vez el valor de f en un único punto. $\square$

Figura 5.3: Georg Friedrich Bernhard Riemann (Hanover, 1826 – Selasca, 1866). Biografía en MacTutor.

Caracterización de Lebesgue de la integrabilidad Riemann

Definición 5.2.15 *Un conjunto A de números reales se dice que tiene medida cero si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión numerable $(I_n)_n$ de intervalos cerrados y acotados tales que $A \subset \bigcup I_n$ y $\sum L(I_n) < \varepsilon$, donde $L(I_n)$ denota la longitud del intervalo I_n.*

De acuerdo con esa definición, claramente cualquier conjunto finito tiene medida cero. Pero también tiene medida cero cualquier conjunto numerable de puntos.

En efecto, denotemos con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ los puntos de dicho conjunto A. Dado $\varepsilon > 0$ tomemos un intervalo cerrado I_1 de longitud $\varepsilon/2$ que contenga a x_1, un intervalo I_2 de longitud $\varepsilon/2^2$ que contenga a x_2, y, en general, un intervalo I_n de longitud $\varepsilon/2^n$ que contenga a x_n. De ese modo $A \subset \bigcup I_n$ y

$$\sum L(I_n) = \varepsilon\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\Big) = \varepsilon\frac{1/2}{1 - 1/2} = \varepsilon$$

utilizando la suma de una progresión geométrica de razón $1/2$. Observe que, en particular el conjunto de los racionales del intervalo $[0, 1]$ tiene medida cero y, por tanto, el conjunto de los irracionales de dicho intervalo tiene medida 1, puesto que $[0, 1]$ es la unión disjunta de dichos conjuntos.

Enunciaremos sin demostración el siguiente teorema de caracterización de la integrabilidad Riemann.

Teorema 5.2.16 (Teorema de Lebesgue) *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y sea $D(f)$ el subconjunto de $[a, b]$ formado por los puntos en los que f no es continua. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $f \in \mathscr{R}[a, b]$.

(2) $D(f)$ *tiene medida cero.*

Figura 5.4: Henri Léon Lebesgue (Beauvais, 1875 – Paris, 1941). Biografía en MacTutor.

Ejemplos 5.2.17

(1) La función D_1 de Dirichlet definida en los ejemplos 3.2.7 no es integrable porque es discontinua en todo punto. Pero la función D_2 sí es integrable porque su conjunto de puntos de discontinuidad es $[0,1]\cap\mathbb{Q}$, como ya vimos allí.

(2) Si f es integrable en $[a,b]$ y g coincide con f salvo en un conjunto numerable de puntos, entonces también g es integrable y la integral de ambas funciones coincide. En particular la función D_2 de Dirichlet tiene integral nula.

Corolario 5.2.18 *Si $f,g\in\mathscr{R}[a,b]$ entonces $fg\in\mathscr{R}[a,b]$.*

Demostración: Comencemos considerando el caso particular en que g coincida con f. Se trata pues de probar la integrabilidad de f^2 sabiendo que f es integrable. Pero como es claro que $D(f^2)\subset D(f)$ podemos aplicar el teorema de Lebesgue para obtener que f^2 es integrable.

Pasemos ahora al caso general y observemos que se tiene la siguiente identidad

$$fg=\frac{1}{4}((f+g)^2-(f-g)^2).$$

Puesto que $\mathscr{R}[a,b]$ es un espacio vectorial, basta ver que $(f+g)^2$ y $(f-g)^2$ son integrables para concluir que fg lo es. Pero eso es fácil puesto que $(f+g)$ y $(f-g)$ son integrables y aplicando el caso particular antes considerado, también $(f+g)^2$ y $(f-g)^2$ son integrables. $\square$

En el libro de J.M. Ortega [1], pg. 152, puede encontrar una demostración del corolario 5.2.18 que no requiere el teorema de Lebesgue. Esta otra demostración se basa en la propiedad, demostrada en la citada referencia, de que si f es integrable y g es continua, entonces $g\circ f$ es integrable. La lectura de estos resultados constituye un buen ejercicio tanto de carácter matemático propiamente dicho, como de manejo de bibliografía: queda invitado a realizar tal ejercicio.

5.3. Teorema fundamental del cálculo

Como consecuencia de la proposición 5.2.12 si una función f es integrable Riemann en $[a, b]$, lo es en cualquier intervalo $[a, x]$, siendo $x \in [a, b]$, lo que permite definir de forma correcta una función sobre $[a, b]$, que asigna a cada x el valor $\int_a^x f$.

Teorema 5.3.1 (Teorema fundamental del cálculo) *Sea $f \in \mathscr{R}[a, b]$. Para cada $x \in [a, b]$ se define*

$$F(x) := \int_a^x f. \tag{5.4}$$

La función F así definida recibe el nombre de integral indefinida y verifica las propiedades siguientes:

(1) F es continua en $[a, b]$.

(2) Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$.

Demostración: La fórmula

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f \right| \leq M|x - y|,$$

donde $M := \sup |f|$ en $[a, b]$, muestra que F es uniformemente continua en $[a, b]$.

Sea $p := f(c)$ y supongamos $h > 0$ (para $h < 0$ los razonamientos son análogos) tal que $c + h \in [a, b]$. Es claro que

$$\int_c^{c+h} p = ph$$

y por tanto, aplicando la proposición 5.2.10, se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - p \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f - \frac{1}{h} \int_c^{c+h} p \right| = \left| \frac{1}{h} \int_c^{c+h} (f - p) \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \sup_{t \in [c, c+h]} |f(t) - p||h| = \sup_{t \in [c, c+h]} |f(t) - p|. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Como f es continua en c, fijado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces

$$|f(t) - f(c)| = |f(t) - p| < \varepsilon$$

para todo $t \in [c, c + h]$. La acotación dada en (5.5) y esta observación garantizan que F es derivable en c y que $F'(c) = p = f(c)$. □

Obsérvese que en el teorema anterior la derivabilidad en a significa sólo derivabilidad por la derecha, es decir existencia de

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(a + h) - F(a)}{h},$$

mientras que derivabilidad en b significa sólo derivabilidad por la izquierda.

Definición 5.3.2 *Dada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que g es una primitiva de f si g es derivable y $g' = f$.*

Habitualmente la derivabilidad de una función sólo se estudia cuando el dominio de la función es un intervalo abierto (o más generalmente un conjunto abierto en sentido topológico). La definición anterior implícitamente está suponiendo derivabilidad lateral en los extremos del intervalo.

Observaciones 5.3.3

(1) Por el teorema anterior las funciones continuas tienen primitivas. La función integral indefinida definida por (5.4) es una de ellas. Las otras se obtienen sumando a ésta una constante (véase el corolario 4.2.9).

(2) La integral indefinida puede no ser una primitiva. Por ejemplo, basta tomar como $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función característica de $[\frac{1}{2}, 1]$. En este caso la integral indefinida viene dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1/2] \\ x - 1/2 & \text{si } x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

que no es una función derivable en $x = 1/2$.

(3) Hay funciones discontinuas que tienen primitiva. La derivada de la función $g(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$ está en esas condiciones.

Teorema 5.3.4 (Fórmula de Barrow) *Sea $f \in \mathscr{R}[a,b]$ y sea g una primitiva de f. Entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a). \tag{5.6}$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, de acuerdo con el teorema 5.2.5, existe una partición $P = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_n\}$ tal que

$$\left| \int_a^b f - S(f, P, z_i) \right| < \varepsilon$$

para cualquier colección $\{z_i\}$, con $z_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Pero por el teorema del valor medio 4.2.8 se tiene

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

y por tanto

$$g(b) - g(a) = g(t_n) - g(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \Big(g(t_i) - g(t_{i-1}) \Big) = \sum_{i=1}^{n} g'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = S(f, P, \xi_i).$$

Por consiguiente,

$$\left|\int_a^b f - \Big(g(b) - g(a)\Big)\right| < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, lo cual prueba la fórmula (5.6). □

Corolario 5.3.5 (Integración por partes) *Sean $f, g \in \mathscr{R}[a,b]$ y supongamos que tienen primitivas F, G respectivamente. Entonces,*

$$\int_a^b Fg = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b fG.$$

DEMOSTRACIÓN: FG es primitiva de $Fg + fG$ ya que $(FG)' = FG' + F'G = Fg + fG$. La función $Fg + fG$ es integrable pues lo son f y g, por hipótesis, y también F y G pues, siendo derivables, son continuas. Podemos aplicar entonces la fórmula de Barrow y tenemos:

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b FG = \int_a^b (Fg + fG) = \int_a^b Fg + \int_a^b fG$$

que es justo lo que se quiere probar, sólo que escrito de otra forma. □

Ejemplo 5.3.6 Para calcular

$$\int_a^b xe^x$$

observemos que $xe^x = F(x)g(x)$ donde $F(x) = x$ y $g(x) = e^x$, con lo cual $f(x) = 1$ y $G(x) = e^x$. Aplicando la fórmula de integración por partes se tiene

$$\int_a^b xe^x = be^b - ae^a - \int_a^b e^x = be^b - ae^a - (e^b - e^a).$$

Teorema 5.3.7 (Cambio de variable) *Sea $\phi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ una función derivable con derivada continua tal que $\phi(c) = a$ y $\phi(d) = b$. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces*

$$\int_a^b f = \int_c^d (f \circ \phi)\phi'. \tag{5.7}$$

DEMOSTRACIÓN: Si F es una primitiva de f en $[a,b]$ entonces $F \circ \phi$ es una primitiva de $(f \circ \phi)\phi'$ en $[c,d]$ ya que, por el teorema de la función compuesta se tiene

$$(F \circ \phi)'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t)$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= F(b) - F(a) = F(\phi(d)) - F(\phi(c)) \\ &= (F \circ \phi)(d) - (F \circ \phi)(c) = \int_c^d (f \circ \phi)\phi',\end{aligned}$$

con lo que se obtiene la fórmula buscada. En la cadena de igualdades anterior se utiliza el hecho de que ϕ' es continua para asegurar que $(f \circ \phi)\phi'$ es integrable, condición requerida para tener la igualdad de la regla de Barrow. $\square$

Este teorema sirve de motivación a la notación habitual que explicita la variable en las integrales

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b f,$$

porque escrito de esa manera, si $x = \phi(t)$ y escribimos $dx = \phi'(t)dt$, lo que resulta bastante natural, la fórmula del cambio de variable se escribe en la siguiente forma

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\phi(t))\phi'(t)dt,$$

que es más sencilla y natural para recordar que la fórmula 5.7.

Ejemplo 5.3.8 Para calcular

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

hacemos el cambio de variable $x = \operatorname{sen} t$. Observe que $\operatorname{sen} 0 = 0$ y $\operatorname{sen} \pi/6 = 1/2$, y que la imagen por la función $\operatorname{sen} t$ del intervalo $[0, \pi/6]$ es el intervalo $[0, 1/2]$. Tenemos entonces, utilizando la fórmula del cambio de variable en la integral de Riemann, que:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}\,dt = \int_0^{\pi/6} dt = \pi/6$$

donde hemos utilizado que $\cos t$ es positivo sobre el intervalo $[0, \pi/6]$.

> La fórmula de Barrow proporciona una herramienta para calcular integrales, pero para poder aplicarla es necesario obtener una primitiva. Los métodos de cálculo de primitivas serán considerados en el capítulo 6, pero MAXIMA los conoce y podemos hacer ya calcular integrales de funciones que admiten una primitiva. El mismo comando permite calcular primitivas e integrales definidas,
>
> `integrate(`*Función*, *Variable*, *ValorInicial*, *ValorFinal*`)`
>
> con la salvedad de que en el caso de las primitivas no es necesario incluir el *ValorInicial* y el *ValorFinal*
>
> Lamentablemente son muchas las funciones para las que no se puede encontrar una primitiva explícita en términos de las funciones elementales; en tales casos es necesario acudir a la integración numérica, y en MAXIMA existen comandos con esa finalidad.

Teorema 5.3.9 (Resto integral en la fórmula de Taylor) *Si f es una función de clase $\mathscr{C}^{(n+1}([a,b])$ y $P_n(f,a)$ su polinomio de Taylor de grado n en a, entonces*

$$f(b) = P_n(f,a) + R_n(f,a) = P_n(f,a) + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Demostración: Aplicando reiteradamente la fórmula de integración por partes se tiene

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \\
&= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt = \\
&\cdots = \\
&= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \cdots - \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a) + \frac{1}{0!}\int_a^b f'(t)\,dt = \\
&= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \cdots - \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a) + f(b) - f(a) = \\
&= -P_n(f,a) + f(b)
\end{aligned}
$$

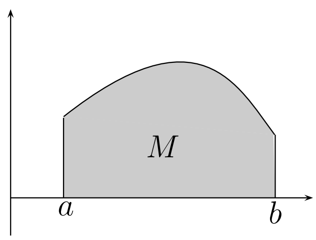
que es justamente lo que se quería demostrar. □

5.4. Aplicaciones de la integral

Siendo la integral de Riemann, en alguna forma, el límite de área de una figura formada por rectángulos, cuando éstos van decreciendo en anchura, se puede tomar $\int_a^b f$ como la definición del área de la región delimitada por la gráfica de la curva, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje de abscisas. Otras ideas semejantes permiten obtener el cálculo del volumen de ciertos cuerpos tridimensionales. Aunque el concepto de área y volumen es, a priori, independiente y más primitivo que el de integral, no entraremos en este curso en un intento de definición de estos conceptos, aparentemente intuitivos, pero en absoluto sencillos.

5.4.1. Determinación de áreas planas en cartesianas

Consideremos una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Consideremos el recinto plano, referido a ejes perpendiculares, delimitado por la gráfica de f, es decir por la curva $\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$, los segmentos de $x = a$ y $x = b$ que unen los puntos extremos de dicha gráfica con el eje horizontal y el segmento sobre dicho eje delimitado por a y b.



Definiremos entonces

$$\text{área}(M) := \int_a^b f$$

Esta definición está basada en el hecho de que cualquier suma de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos definidos por la partición y la región compuesta por dichos rectángulos se aproxima a M cuando la partición se va refinando. La visión de la integral como límite cuando la norma de la partición tiende a cero nos permite asegurar que, naturalmente en el caso de que f sea integrable, el límite obtenido es independiente de las particiones elegidas.

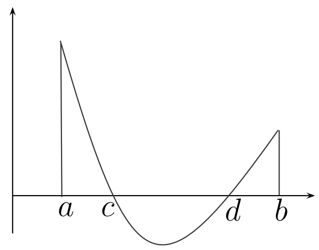
Una vez tomada el área de M de esta forma, su cálculo, que es el cálculo de $\int_a^b f(x)\,dx$, se realiza usualmente mediante la fórmula de Barrow,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

siendo F una primitiva de f, es decir una función derivable tal que $F' = f$.

Partiendo en trozos adecuados pueden calcularse áreas de recintos más complicados.

Observe además que la integral puede ser vista como un área, pero área con signo, de modo que si se trata de calcular el área entre la gráfica de una función y el eje de abscisas, cuando la función no es positiva tendremos que tomar precauciones. Por ejemplo, en el caso de la función de la figura siguiente



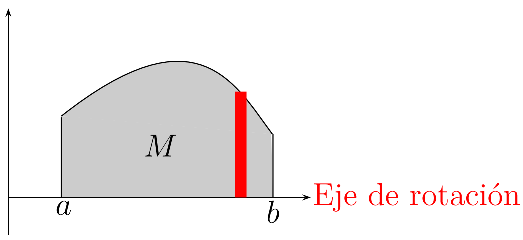
definiremos el área delimitada por la gráfica y el eje horizontal, sobre el intervalo $[a, b]$ en la forma:

$$a(M) = \int_a^c f - \int_c^d f + \int_d^b f.$$

Ejemplo 5.4.1 *Cálculo del área de la elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

La ecuación del primer cuadrante de la elipse es

$$y = f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$



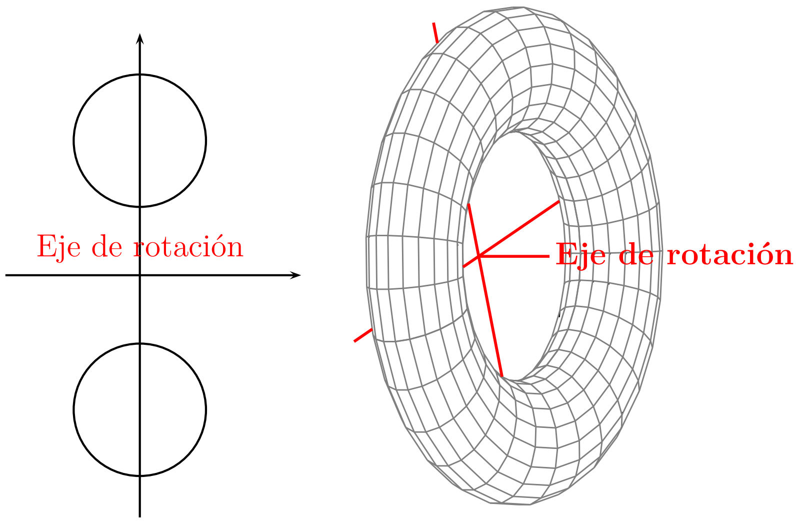


Figura 5.5: Volumen de revolución

el área es, por tanto,

$$4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = 4\int_0^{\pi/2} b\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\; a\cos t\,dt = 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt$$
$$= 2ab\int_0^{\pi/2}(\cos(2t)+1)\,dt = \pi ab$$

5.4.2. Determinación de volúmenes de revolución

Si el recinto M, como en el apartado anterior, gira un ángulo de 2π alrededor del eje de abscisas, engendra un sólido R_x, que denominamos de revolución.

Concibiendo que los rectángulos definidos por las sumas de Riemann aproximan el recinto M, y girando dichos rectángulos obtenemos una serie de cilindros que podemos considerar aproximan el sólido R_x. Si calculamos el volumen del sólido obtenido a partir de dichos rectángulos observamos que coincide con

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f(z_i)^2 (t_i - t_{i-1})$$

que no es otra cosa que una suma de Riemann correspondiente a la función $\pi f(x)^2$.

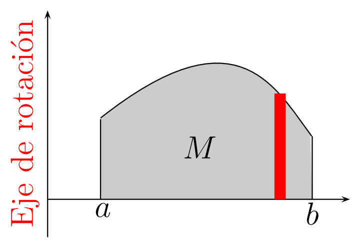
Así, podemos definir el volumen del sólido R_x como

$$v(R_x) = \pi \int_a^b f^2$$

que es el límite al que tienden las sumas de Riemann anteriores cuando tomamos particiones de norma que tiende a cero.

Si en lugar de rotar el recinto M alrededor del eje de abscisas lo hacemos alrededor del eje de ordenadas, obtenemos un nuevo sólido de revolución que denominamos R_y.

Si aproximamos M por rectángulos y rotamos, cada rectángulo engendra un tubo cilíndrico hueco de radio interior t_{i-1}, radio exterior t_i y altura $f(z_i)$. Así el volumen de cada uno de estos tubos es $\pi f(z_i)(t_i^2 - t_{i-1}^2)$.



Si sumamos todos estos volúmenes podemos pensar que estaremos aproximándonos, refinando la partición, al volumen de R_y. Sin embargo la suma de los volúmenes de los tubos no nos proporciona una suma de Riemann, aunque podemos verla como tal suma con las consideraciones siguientes. Pongamos

$$t_i^2 - t_{i-1}^2 = 2\frac{t_i + t_{i-1}}{2}(t_i - t_{i-1})$$

Teniendo en cuenta que $(t_i + t_{i-1})/2$ es el punto de medio del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ si elegimos z_i como dicho punto, tenemos que la suma de los volúmenes de los tubos es precisamente la suma de Riemann correspondiente a la función $\pi x f(x)$, así definiremos

$$v(R_y) = \pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

sin olvidar que esta es una forma intuitiva de ver el problema; una definición rigurosa del volumen de estos sólidos se estudiará en la asignatura de Análisis Matemático de segundo curso.

Con las ideas de esta sección y las potencialidades de Maxima es posible calcular calcular áreas de figuras planas o volúmenes de revolución.

5.5. Ejercicios

Ejercicios resueltos

5.5.1 *Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que*

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) = \int_0^1 f,$$

para cualquier elección de $z_k \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ para k y n enteros con $1 \leq k \leq n$.

Solución: Al ser f una función continua es integrable (corolario 5.2.3). Aplicando la caracterización de la integrabilidad en términos de la norma de la partición (teorema 5.2.8) *sabemos* que fijado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que para cualquier partición P de norma menor que δ y cualquier suma de Riemann correspondiente a una tal partición se verifica que

$$\Big| \int_0^1 f - S(f, \pi, z_i) \Big| < \varepsilon.$$

La fórmula que *queremos* probar significa, en otros términos, que fijado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ se cumple

$$\Big| \int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) \Big| < \varepsilon$$

pero obviamente

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Big(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\Big)$$

y esto último sumatorio es una suma de Riemann correspondiente a la partición de $[0,1]$ determinada por los puntos $0 < 1/n < 2/n < \ldots < n/n$, o sea es una suma del tipo $S(f, P, z_i)$ ante considerada, y si su norma fuera menor que δ podríamos escribir

$$\Big| \int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) \Big| < \varepsilon.$$

En nuestro caso los puntos de la partición están equidistribuidos y por tanto su norma es $1/n$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal $1/n_0 < \delta$ y en consecuencia para $n > n_0$ la norma de la correspondiente partición es inferior a δ que es justo lo que necesitamos para poder escribir

$$\Big| \int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) \Big| < \varepsilon$$

para $n > n_0$. $\square$

5.5.2 *Calcule*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$$

SOLUCIÓN: Este es un límite típico para calcularlo mediante sumas de Riemann

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{n^2-0^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} =$$
$$\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-(0/n)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(1/n)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(2/n)^2}} + \dots \frac{1}{\sqrt{1-((n-1)/n)^2}}\Big) =$$
$$S(f,P,z_i)$$

para la partición de $[0,1]$ dada por

$$P = \{0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\}$$

siendo

$$z_1 = 0, z_2 = \frac{1}{n}, \dots z_n = \frac{n-1}{n}$$

y

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Con lo cual

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$
$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}} \cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t}\,dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$$

Y calculamos así el límite con técnicas de integración. □

5.5.3 *Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continua. Sea $F:\mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$$

(1) Calcule $\lim_{x\to 0} F(x)$. Definiendo $F(0) = \lim_{x\to 0} F(x)$ pruebe que la función así definida en $\mathbb{R}$ es continua.

(2) Pruebe que F es derivable $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y calcule su derivada.

SOLUCIÓN: La función F está bien definida para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ porque al ser f continua $\int_{-x}^{x} f$ está bien definido. Además la función

$$G(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \int_{-x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = -\int_{0}^{-x} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

es derivable como consecuencia del teorema fundamental del cálculo y el teorema de la función compuesta siendo

$$G'(x) = -f(x)(-1) + f(x) = 2f(x)$$

Para calcular $\lim_{x\to 0} F(x)$ utilizaremos la regla de L'Hospital y obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \lim_{x\to 0} \frac{G(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{G'(x)}{2} = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

puesto que f es continua. Salvo para $x = 0$ la función F es un cociente de dos funciones derivables y por tanto continuas, así que F es continua en $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y como $F(0)$ ha sido definida mediante $F(0) = \lim_{x\to 0} F(x)$, también es continua en el origen.

F es derivable en $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ por ser un cociente de funciones derivables siendo

$$F'(x) = \frac{G'(x)2x - 2G(x)}{4x^4} = \frac{4xf(x) - 2\int_{-x}^{x} f(t)\,dt}{4x^4} = \frac{2xf(x) - \int_{-x}^{x} f(t)\,dt}{2x^4}$$

La derivabilidad de F en $x = 0$ depende de que exista $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$. □

5.5.4 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y monótona creciente. Pruebe que la función definida por*

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$$

verifica

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F(y) \text{ para todo } x, y \in [a, b]$$

¿Es cierto el resultado si f es únicamente continua?

SOLUCIÓN: Por el teorema fundamental del cálculo F es derivable siendo $F'(x) = f(x)$ y por tanto F' es creciente, pero entonces F es convexa, de acuerdo con el corolario 4.4.5. Y la fórmula que queremos demostrar es sólo un caso particular de la convexidad de F.

El lector escrupuloso se habrá percatado que en la hipótesis del corolario utilizado se pedía que el dominio de la función fuese un intervalo abierto, mientras que aquí lo hemos aplicado a un intervalo cerrado, así que, en principio, la convexidad de F sólo está garantizada en (a, b). Sin embargo podemos utilizar una astucia para solventar este inconveniente. Prolongamos f a $(a-1, b+1)$ haciendo $f(x) = f(a)$ para $x \in (a-1, a]$ y $f(x) = b$ para $x \in [b, b+1)$, con lo cual F' es creciente en $(a-1, b+1)$ siendo convexa en dicho intervalo y, en particular en $[a, b]$.

El crecimiento de f es esencial. Si, por ejemplo, tomamos $f(x) = \operatorname{sen} x$ definida en $[0, \pi]$ entonces la función F no es convexa. □

5.5.5 *Sea f una función integrable Riemann en $[a, b]$, pruebe que*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

Utilice el resultado anterior para calcular

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x} dx$$

para $n = 1, 2, 3$

Solución: Hagamos en la segunda integral el cambio de variable $t = a+b-x$ que produce $dt = -dx$. Veamos ahora las modificaciones que se producen en los extremos de integración con el cambio de variable: para $x = a$ se tiene $t = a+b-a = b$ y para $x = b$ se tiene $t = a+b-b = a$ así que

$$\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_b^a f(t)(-dt) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

Observe que la última igualdad es obvia porque ambas expresiones, con independencia de cómo denotemos la variable, representan el valor de $\int_a^b f$.

En particular podemos aplicar la fórmula anterior y tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x} dx &= \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\operatorname{sen}^n(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x} dx \\ &= \pi \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x} dx - \int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x} dx\end{aligned}$$

y por tanto

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x} dx$$

En el caso de $n = 1$ para calcular esta última integral hacemos el cambio de variable $t = \cos x$ que es derivable y lleva el extremo 0 al 1 y el π al -1 siendo $dt = -\operatorname{sen} x dx$, de modo que

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x} dx &= \int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

El caso $n = 3$ sigue las mismas pautas y dejamos al cuidado del lector los detalles. En el caso $n = 2$ hay que prestar atención para no llegar a conclusiones erróneas. Para calcular

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}dx$$

observamos que se trata de una función par en seno y coseno, por lo que el cambio aconsejable es, como sabemos por las técnicas de cálculo de primitivas, $t = \operatorname{tg} x$, que nos conduce aparentemente a

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^0 \frac{(\operatorname{sen}^2 x)/(\cos^2 x)}{1/\cos^2 x + 1}\cos^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^0 \frac{t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}dt$$

con lo que, según esto, la integral buscada sería nula. Pero esto es imposible, porque el integrando es continuo y estrictamente positivo.

¿Dónde está el error? Está en que el cambio de variable no corresponde a una función derivable en $[0,\pi]$. Aunque sí lo es en $[0,\pi/2)$ y en $(\pi/2,\pi]$. Hagamos pues las cosas con cuidado

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}dx + \int_{\pi/2}^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}dx\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}dt + \int_{-\infty}^0 \frac{t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}dt\end{aligned}$$

Las integrales que nos han aparecido requieren un comentario, porque hasta ahora hemos utilizado únicamente funciones acotadas definidas en un intervalo cerrado y acotado. La integración sobre intervalos no acotados será objeto de estudio detallado en un capítulo posterior, pero anticipándonos a dicho estudio nos limitaremos a decir ahora que, cuando tienen sentido, se definen de manera natural como límites de intregales definidas sobre intervalos acotados. De suerte que, en concreto,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}dt &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}dt\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} x\\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = (\sqrt{2}-1)\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(hemos omitido los cálculos para obtener la primitiva). La otra integral vale lo mismo, siendo por tanto, el resultado final $(\sqrt{2}-1)\frac{\pi}{2}$. □

Ejercicios propuestos

5.1) Utilizando la definición de integral calcule $\int_0^2 f(x)\,dx$ siendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

5.2) Calcule los límites de las siguientes sumas de Riemann:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{n+j}{n^2+j^2}, \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sen} \frac{j\pi}{2n}, \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n^2} \operatorname{sen} \frac{j\alpha}{2n+1}$$

5.3) Calcule $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n}\Big((n+1)(n+2)\dots(n+n)\Big)^{1/n}$.

5.4) Haciendo uso de una integral definida adecuada calcule

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

5.5) Calcule

$$\lim_{n} \frac{n}{n^2+1} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen} \pi \cos \pi\right)$$

5.6) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{n \to \infty} 4n \left(\frac{1}{1^2+4n^2} + \frac{1}{3^2+4n^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2+4n^2} \right)$$

5.7) Sea f una función continua en $[a,b]$ tal que $\int_a^b |f(x)|dx = 0$. Pruebe que $f(x) = 0$ en todos los puntos $x \in [a,b]$.

5.8) Calcule $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^n x\,dx$ y $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x\,dx$.

5.9) Sea f una función continua en $[a,b]$, y sea $M = \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$. Pruebe que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n dx \right)^{1/n} = M.$$

Indicación: Suponga primero que $M = 1$.

5.10) Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que para todo $x \in (a, b)$ se verifica $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x g(t)\,dt$. Pruebe que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

5.11) Halle las derivadas de la función $F(x)$ en cada uno de los casos siguientes:

$$F(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{sen}^3 t\,dt \quad F(x) = \int_{\operatorname{sen} x^2}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}\,dt \quad F^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt\ .$$

5.12) Sea $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, con $\displaystyle\int_0^{x^2} (1+t)f(t)\,dt = 6x^4$. Determine f.

5.13) Sea f una función dos veces derivable en $[a, b]$ siendo f'' continua en $[a, b]$. Pruebe que se verifica la siguiente fórmula:

$$\int_a^b x f''(x)\,dx = (bf'(b) - f(b)) - (af'(a) - f(a))$$

y aplíquelo para calcular

$$\int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx.$$

Indicación: Puede hacerse integración por partes o bien observar que la función $F(x) := xf'(x) - f(x)$ es una primitiva de $x \mapsto xf''(x)$.

5.14) Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{-x^2}^{x^2} \log(2 + \operatorname{sen} t)\,dt}{x^2(x - \operatorname{sen} x)}$$

5.15) Sea $f : [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ continua. Pruebe que la función definida por

$$g(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x xf(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^x f(x)\,dx} \qquad \text{para } x \neq 0 \text{ y } g(0) = 0$$

es creciente.

5.16) Sea $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y, para cada $x \in [0, +\infty)$, sea

$$F(x) = \int_0^x xf(t)\,dt$$

a) Calcule $F'(x)$ para cada $x \in [0, +\infty)$ y demuestre que

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du$$

b) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1+\frac{1}{n}} \frac{(1+\frac{1}{n}-y)}{(1+y)^3}\,dy$

5.17) Calcule las siguientes integrales:

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\,dx \qquad \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx \qquad \int_1^2 \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$$
$$\int_0^{\pi} e^{2x} \cos x\,dx \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x \log(\operatorname{sen} x)\,dx \qquad \int_0^{a^2} \frac{x}{a^4+x^4}\,dx$$

5.18) Calcule el área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = x^3 - 12x$ y $y = x^2$.

5.19) Calcule el área de la intersección de las elipses $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$.

5.20) Calcule el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las curvas $y = 0, y = x^2 + 1$, y la tangente a esta última en el punto de abscisa $x = 1$.

5.21) Calcule el volumen del sólido engendrado al hacer girar un disco de radio r alrededor de una recta situada a una distancia a del centro del disco, donde $a > r$.

5.22) Sea f una función real de variable real continua y periódica, con periodo T. Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple $\displaystyle\int_0^T f(t)dt = \int_x^{x+T} f(t)dt$. Calcule $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$.

5.23) Sea $f(x) = \dfrac{1}{5+4\cos x}$.

a) ¿Cuál es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ en el que f admite una primitiva?

b) Determine una primitiva en dicho conjunto.

5.24) Mediante un cambio de variable establezca la igualdad

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

Como aplicación, pruebe que $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}^4(2x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4(2x)dx = \frac{3\pi^2}{16}$.

5.25) Se considera la función $f_n(x) = \dfrac{x^n(qx-p)^n}{n!}$ donde $n, q, p \in \mathbb{N}$

a) Pruebe que f_n y todas sus derivadas toman valores enteros para $x = 0$ y $x = p/q$

b) Si $I_n = \displaystyle\int_0^\pi f_n(x) \operatorname{sen} x \, dx$, Pruebe que $\lim_n I_n = 0$

c) Mediante integración por partes en la expresión de I_n (sin escribir explícitamente f_n'), Demuestre que si $\pi = p/q$ entonces I_n sería un entero no nulo. Concluir que $\boxed{\pi \text{ es irracional}}$.