7

Series numéricas e integrales impropias

Competencias

- Saber definir los conceptos de serie e integral impropia.
- Conocer la convergencia de las series e integrales impropias armónicas y saber utilizarlas en el análisis de la convergencia para funciones positivas.
- Saber los efectos que tiene sobre la convergencia de una serie la asociación, disociación y reordenación de sus términos, dando razón y ejemplos.
- Saber utilizar los criterios de Dirichlet y Abel para analizar convergencia condicional y sumar algunas series.
- Saber usar Maxima para calcular aproximaciones a sumas de serie e integrales impropias.

Contenidos

Este capítulo está dedicado a las series numéricas y a las integrales impropias. En sentido estricto, son cuestiones diferentes. En el primer caso se trata de dar sentido a una suma infinita de números, analizando las propiedades que tales sumas tienen en relación con las propiedades de las sumas con un número finito de sumandos (asociativa, disociativa y conmutativa). En el segundo caso se trata de extender el concepto de integral de Riemann, que estaba definido únicamente para funciones acotadas en intervalos cerrados y acotados, al caso de funciones que o bien no están definidas en un intervalo acotado o bien no son acotadas, e incluso ambas cosas.

Habitualmente estas cuestiones son tratadas en los libros en capítulos diferentes porque tienen distinta naturaleza. No obstante hemos preferido hacer un tratamiento paralelo por una cuestión de economía de esfuerzos y para resaltar las similitudes formales (y no tan formales) existentes entre ellas.

El formato utilizado en este capítulo en el que con frecuencia aparecen «textos paralelos» para series numéricas e integrales impropias contribuye a facilitar una lectura comparada de los conceptos y resultados que se presentan. Las técnicas para probar los teoremas son en cambio diferentes y por ello se presentan de forma independiente y secuencial. Cuando una cuestión, como ocurre con la reordenación de series, no tiene análogo en su paralela se interrumpe temporalmente el formato de textos paralelos.

7.1. Definición y primeras propiedades

Definición 7.1.1 *Una serie numérica en $\mathbb{K}$ es un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relacionadas por la fórmula $S_n = a_1+\cdots+a_n$. Una serie de este tipo se representa abreviadamente mediante*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

A a_n se le llama término general de la serie y a S_n suma n-ésima. La serie numérica (o simplemente serie) se dice convergente si existe

$$\lim_n S_n =: S \in \mathbb{K}$$

y en este caso S recibe el nombre de suma de la serie.

Definición 7.1.2 *Sea una función $f : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que su restricción a $[a,b]$ es integrable Riemann para cada $a < b < \infty$ (una tal función se llama localmente integrable). Se dice que f es integrable en sentido impropio en $[a,\infty)$ (o que la integral impropia es convergente) si existe*

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\,dt \in \mathbb{R}.$$

Dicho límite recibe el nombre de integral impropia de f en $[a,\infty)$ y se denota con

$$\int_a^{\infty} f(t)\,dt.$$

Analizar el carácter de una serie o integral impropia significa determinar si es o no convergente. Como es fácil sospechar es más fácil determinar el carácter que calcular el valor de la suma de la serie o de la integral impropia.

Además de la integral impropia considerada en la definición anterior, existen otras situaciones en las que es natural considerar una integral impropia: cuando f está definida sobre $(-\infty, a]$ o cuando f está definida en $[a, b)$ y es no acotada.

Para contemplar todos estos casos conviene definir la noción de función localmente integrable en la forma siguiente: sea I un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que f es localmente integrable en I si es integrable Riemann en cualquier intervalo cerrado $[a, b] \subset I$.

Para definir una integral impropia en cualquier tipo de intervalo, supondremos siempre que la función es localmente integrable en dicho intervalo.

De forma análoga a la anterior, si $f : (-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente integrable, diremos que la integral $\int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt$ es convergente si existe

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\, dt =: \int_{-\infty}^a f(t)\, dt.$$

Otro tanto ocurre con $\int_a^b f(t)\, dt$ supuesto que $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente integrable, en cuyo caso definimos:

$$\int_a^b f(t)\, dt := \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\, dt$$

siempre que este límite exista. Para $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente integrable la definición es totalmente análoga.

En el caso de que $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sea localmente integrable, se dice que f es integrable en sentido impropio si f es integrable en sentido impropio en $(a, c]$ y en $[c, b)$ con integrales impropias finitas para algún $c \in (a, b)$ (en cuyo caso lo es para cualquier c en esas condiciones) y se escribe

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt.$$

En lo sucesivo los teoremas se establecerán para funciones definidas en $[a, b)$, siendo $b \leq +\infty$, pero el lector no tendrá dificultad para enunciar y demostrar los resultados correspondientes para los demás casos.

Ejemplos 7.1.3

(1) La serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

con $|r| < 1$ es una serie convergente con suma

$$\frac{1}{1-r}.$$

Si $r \geq 1$ la serie es divergente a $+\infty$. Esto es muy sencillo de comprobar recordando el cálculo de la suma de los términos de una progresión geométrica, realizado en el ejemplo 8 de la sección 2.1.3.

(2) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

no es convergente para $r \leq 1$, como es fácil comprobar calculando la sucesión $(S_n)_n$.

(3) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

es convergente ya que la sucesión $(S_n)_n$ es monótona creciente y acotada. En efecto, como consecuencia de la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > \frac{1}{n^2}$$

tenemos:

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{N}$$

(4) La integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$$

es convergente para $\alpha > 1$ y divergente para los otros valores de α ya que para cada $x > 1$ se tiene

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} = \int_1^x t^{-\alpha}\, dt = \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1)$$

Y por tanto, para $\alpha > 1$ se tiene que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1) = \frac{1}{\alpha - 1}$$

mientras que para $\alpha \leq 1$ es

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt = +\infty.$$

(5) La función considerada en el ejemplo precedente da origen sobre el intervalo $(0, 1]$ a una integral impropia cuyo carácter al variar α es diferente:

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\, dt$$

es convergente para $\alpha < 1$ y divergente para $\alpha \geq 1$, como es fácil comprobar calculando

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\, dt$$

para $0 < x < 1$ y tomando límites.

MAXIMA puede evaluar integrales impropias mediante el comando `integrate` y también es capaz de realizar sumas finitas mediante el comando `sum`. Series sabe sumar unas pocas que tiene guardadas en una suerte de «chuleta».

Como la convergencia se expresa en términos de límites y estos se caracterizan en términos de la *condición de Cauchy*, se tienen los siguientes resultados:

Proposición 7.1.4

La serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es convergente si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que se verifica*

$$|a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q| < \varepsilon,$$

siempre que los naturales p, q *cumplan* $n_0 \leq p \leq q$.

La integral impropia

$$\int_a^b f(t)\,dt,$$

donde $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *es localmente integrable y* $b \leq +\infty$*, es convergente si y sólo si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $c \in (a, b)$ *tal que si* $c \leq y < z < b$ *entonces*

$$\left| \int_y^z f(t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN: Es muy sencillo darse cuenta de que las acotaciones anteriores se obtienen aplicando la condición de Cauchy de existencia de límite a la sucesión $(S_n)_n$ y a la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, respectivamente. □

Como consecuencia de la proposición inmediatamente anterior se obtienen sendos corolarios muy útiles. En ambos casos la demostración es trivial.

Corolario 7.1.5

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge entonces existe* $\lim_n a_n$ *y vale 0.*

Si la integral impropia $\int_a^{\infty} f$ *converge y existe* $\lim_{x\to\infty} f(t)$*, entonces dicho límite vale 0.*

Llamamos la atención sobre el hecho de que el recíproco no es cierto. Así, por ejemplo, a pesar de que $\lim_n 1/n = 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ no es convergente como veremos en el corolario 7.1.9.

Corolario 7.1.6

La convergencia de una serie no se altera modificando un número finito de términos de la misma.

La integral impropia $\int_a^{\infty} f$ *converge si, y sólo si, lo hace la integral impropia* $\int_b^{\infty} f$ *para algún* $a < b \in \mathbb{R}$.

En lo sucesivo, y como consecuencia de este resultado, abreviaremos la representación de la serie con $\sum a_n$ cuando solamente estemos interesados en su carácter.

Proposición 7.1.7

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series convergentes. Entonces para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$$

es convergente y se verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Sean $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $b \leq \infty$, tales que las integrales impropias $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$ son convergentes. Entonces para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la integral impropia

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)$$

es convergente y se verifica

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

DEMOSTRACIÓN: Es una consecuencia inmediata de las definiciones de convergencia y de la conservación de sumas y productos al tomar límites. □

7.1.1. Criterio de convergencia de la integral

El paralelismo entre las series numéricas y las integrales impropias va mas allá de la simple apariencia formal, como se muestra en la proposición que establecemos a continuación. En la demostración del mismo aparece clara, en este caso, la relación entre series e integrales impropias. De hecho, como los alumnos tendrán ocasión de estudiar en otras asignaturas de la licenciatura, desde cierta perspectiva las series numéricas son sólo un tipo particular de integrales.

Si consideramos una serie $\sum_n a_n$ tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión de las sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ es, obviamente, monótona creciente. Por tanto para la convergencia de este tipo de series es suficiente verificar que la sucesión $(S_n)_n$ está acotada superiormente.

Algo análogo puede decirse de las integrales impropias. Si $f : [a, b) \longrightarrow [0, +\infty)$ es localmente integrable, la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es monótona creciente, por tanto la convergencia de la integral impropia es consecuencia de la acotación (superior) de esta función.

Estas dos sencillas observaciones son útiles en la siguiente proposición, así como en el apartado 7.2.

Proposición 7.1.8 (Criterio de la integral) *Sea $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ monótona decreciente y sea $a_n = f(n)$. Entonces la serie $\sum a_n$ converge si, y solo si, converge la integral impropia $\int_a^{\infty} f$*

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer por sencillez en el razonamiento y sin pérdida de generalidad que $a = 1$.

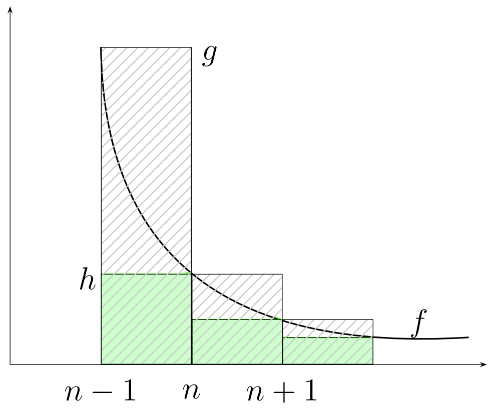

Figura 7.1: El criterio de la integral

Consideremos las funciones constantes a trozos g y h definidas (véase la figura 7.1) por las fórmulas

$$g(x) := f(n) \text{ para } x \in [n, n+1)$$

$$h(x) := f(n) \text{ para } x \in (n-1, n]$$

Es evidente que se tienen las relaciones

$$h(x) \le f(x) \le g(x)$$

Por tanto

$$\int_1^x \le \int_1^x g \le \int_1^\infty g = \sum_{n=1}^\infty a_n$$

y la convergencia de la integral es consecuencia de la de la serie.

Recíprocamente como

$$\sum_{n=2}^N a_n = \int_1^N h \le \int_1^N f \le \int_1^\infty f$$

la convergencia de $\int_1^\infty f$ implica la convergencia de $\sum_{n=2}^\infty a_n$ y por tanto (aplicando el corolario 7.1.6) la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ también es convergente. □

El criterio de la integral reduce el estudio de la convergencia de una serie (con condiciones de monotonía y positividad) al estudio de la convergencia de una integral impropia y viceversa. Obviamente es útil si la resolución del nuevo problema es más sencilla que la del inicialmente planteado. Esa es la situación para la serie armónica $\sum 1/n^q$ cuya convergencia se obtiene fácilmente con el criterio de la integral y del apartado (4) del ejemplo 7.1.3

Corolario 7.1.9 *La serie armónica*

$$\sum \frac{1}{n^q}$$

es convergente si $q > 1$ y divergente si $q \leq 1$.

> Cuando una serie es convergente es posible obtener valores aproximados de la suma utilizando un número finito de términos. MAXIMA puede ayudar a realizar esas sumas finitas mediante el comando
> `sum(`*Función, Variable, ValorInicial, ValorFinal*`),numer;`
> `suma(1/n^3, n, 1, 1000),numer;` es un ejemplo del uso del comando. Desde luego esa forma de proceder no permite controlar la bondad de la aproximación, que habrá de realizarse por otros procedimientos.

Cuando en una serie convergente su valor aproximado se calcula a través de una suma finita, la estimación del error cometido resulta en general difícil. Pero si la convergencia puede ser obtenida aplicando el criterio de la integral y la integral impropia que aparece puede calcularse de forma directa, entonces es posible tener un control satisfactorio sobre el error cometido.

Ejemplo 7.1.10 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente y para cada entero $r \geq 2$

$$\sum_{n=r}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_r^{\infty} g(x)\,dx \leq \int_r^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

siendo g la función constante a trozos (escalonada) definida por $g(x) = 1/n^2$ si $x \in [n, n+1)$. De suerte que una cota de error para la suma finita

$$\sum_{n=1}^{r-1} \frac{1}{n^2}$$

está dada por

$$\int_r^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \frac{1}{r-1}$$

lo cual permite obtener aproximaciones del valor de la suma con la precisión deseada. Haciendo uso de MAXIMA pueden sumarse los primeros 100000 términos para obtener una aproximación del valor de la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx \sum_{n=1}^{100000} \frac{1}{n^2} = \text{[según Máxima] } 1.644924066898226$$

con una cota de error inferior a 10^{-5}. Calculado por un procedimiento indirecto se sabe que el valor exacto de la suma de la serie viene dado por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx \text{[según Máxima] } 1.644934066848226.$$

7.2. Series con término general no negativo e integrales impropias con integrando no negativo

A lo largo de esta sección nos ocuparemos del estudio de series $\sum a_n$ tales que $a_n \geq 0$ o de integrales impropias con integrando no negativo. En este caso el carácter únicamente puede ser o convergente, con suma e integral finitas, o divergente, con suma e integral infinitas.

En realidad los resultados de esta sección pueden ser también aplicados a las series e integrales impropias con signo constantemente negativo, ya que éstas pueden reducirse a aquéllas cambiando el signo. Pero no son aplicables, por contra, a situaciones en las que el signo no permanece constante.

7.2.1. Criterios de convergencia por comparación

A pesar de su simplicidad el criterio de mayoración proporciona una herramienta útil para el estudio de la convergencia de series e integrales con término general o integrando positivos.

En todo lo que sigue es esencial recordar el carácter monótono de las sumas parciales e integrales consideradas, ya comentado al inicio del apartado anterior.

Proposición 7.2.1 (Criterio de mayoración)

Sean $\sum a_n, \sum b_n$ series de términos no negativos. Si existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y una constante $M > 0$ tales que $a_n \leq M b_n$ para todo $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$, entonces la convergencia de $\sum b_n$ implica la convergencia de $\sum a_n$.

Sean $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ con $b \leq \infty$ y supongamos que existen $c \in [a, b)$ y una constante $M > 0$ tales que $f(t) \leq M g(t)$ para todo $t \in [c, b)$. Entonces la convergencia de $\int_a^b g$ implica la convergencia de $\int_a^b f$.

Demostración: Como consecuencia de la hipótesis de mayoración se tiene

$$\sum_{n=n_0}^{m} a_n \leq M \sum_{n=n_0}^{m} b_n$$

para todo $m > n_0$. Pero como la serie $\sum b_n$ es convergente con suma B, las sumas parciales de $\sum a_n$ forman una sucesión monótona creciente y acotada superiormente por MB, por tanto dicha sucesión es convergente.

Para el caso de la integración el razonamiento es similar y se deja al cuidado del lector. $\square$

Corolario 7.2.2

Sean $\sum a_n, \sum b_n$ *series de términos estrictamente positivos y supongamos que existe* $l := \lim \dfrac{a_n}{b_n}$

(1) Si $0 < l < \infty$ *entonces las dos series tienen el mismo carácter.*

(2) Si $l = 0$ *entonces la convergencia de* $\sum b_n$ *implica la convergencia de* $\sum a_n$.

(3) Si $l = \infty$ *entonces la convergencia de* $\sum a_n$ *implica la convergencia de* $\sum b_n$.

Sean $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $f(x), g(x) > 0$ *y* $b \leq \infty$. *Supongamos que existe* $l := \lim_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(1) Si $0 < l < \infty$ *entonces las integrales impropias* $\int_a^b f$ *y* $\int_a^b g$ *tienen el mismo carácter.*

(2) Si $l = 0$ *entonces la convergencia de* $\int_a^b g$ *implica la convergencia de* $\int_a^b f$.

(3) Si $l = \infty$ *entonces la convergencia de* $\int_a^b f$ *implica la convergencia de* $\int_a^b g$.

Demostración: Es una consecuencia directa de la proposición 7.2.1 y del concepto de límite. A modo de ejemplo probaremos la validez de la última de las afirmaciones.

$$\infty = \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \text{existe } c \in (a, b) \text{ con } 1 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \text{ si } c < x < b$$

y siendo $\int_a^b f$ convergente se obtiene del criterio de mayoración que también es convergente la integral impropia $\int_a^b g$. $\square$

Observe que la mayor parte de los anteriores criterios de convergencia sirven también como «criterios de divergencia». La idea es siempre la misma: reduciendo la convergencia a la acotación, en el caso de términos no negativos o funciones no negativas, se observa que si la mayor de la series (o integrales) está acotada (luego converge) la menor también lo está, mientras que si la menor no está acotada, tampoco lo estará la mayor. El corolario 7.2.2 simplemente muestra que la desigualdad que sirve de hipótesis en el criterio de mayoración, puede ser obtenida mediante el cálculo de un límite, algo a menudo más fácil dadas todas las técnicas de cálculo de límites conocidas.

Ejemplos 7.2.3

(1) Análisis del carácter de las siguientes series

$$\text{(a) } \sum \frac{1}{3 - \cos \frac{1}{n}} \qquad \text{(b) } \sum \frac{\sqrt{n+1}\log n}{(n^2+4)\sqrt[3]{\log n + 2}}$$

$$\text{(c) } \sum \left(e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}\right) \qquad \text{(d) } \sum \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$$

En el caso de la primera serie, se tiene que

$$\lim_n \frac{1}{3-\cos\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

y por tanto la serie no es convergente, siendo su suma $+\infty$.

De acuerdo con el corolario 7.2.2, para el caso de series de términos positivos, es el «tamaño» del término general el que determina el carácter de la serie. Para la serie (b) dicho tamaño es

$$\frac{n^{1/2}\log n}{n^2(\log n)^{1/3}} = \frac{(\log n)^{2/3}}{n^{3/2}}$$

puesto que, obviamente,

$$\lim_n \frac{\frac{\sqrt{n+1}\log n}{(n^2+4)\sqrt[3]{\log n+2}}}{\frac{n^{1/2}\log n}{n^2(\log n)^{1/3}}} = 1.$$

Así pues el carácter de la serie (b) es el mismo que el de la serie

$$\sum \frac{(\log n)^{2/3}}{n^{3/2}} = \sum \frac{(\log n)^{2/3}}{n^{1,5}}.$$

De haberse tratado de la serie

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}, \quad \text{con } \alpha > 1$$

la serie sería convergente según sabemos. Aunque no es esa nuestra situación (debido a la existencia de $(\log n)^{2/3}$) podemos reducirnos astutamente a ella utilizando que

$$\lim_n \frac{(\log n)^\beta}{n^\gamma} = 0 \text{ cualquiera que sea } \gamma > 0.$$

En particular, existe n_0 tal que

$$\frac{(\log n)^{2/3}}{n^{0,1}} < 1 \quad \text{si } n \geq n_0$$

y por tanto

$$\sum_{n=n_0}^{N} \frac{(\log n)^{2/3}}{n^{1,5}} = \sum_{n=n_0}^{N} \frac{(\log n)^{2/3}}{n^{0,1}} \frac{1}{n^{1,4}} \leq \sum_{n=n_0}^{N} \frac{1}{n^{1,4}} < \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{1,4}}$$

lo cual garantiza la convergencia de la serie (b), puesto que nos da una cota superior para la sucesión de sumas parciales

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(\log n)^{2/3}}{n^{1,5}}$$

Utilizando el desarrollo de Taylor sabemos que

$$e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n} \approx \frac{1}{2!n^2}, \text{ o sea que } \lim_n \frac{e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{2!n^2}} = 1.$$

Por tanto el carácter de la serie (c) coincide con el de la serie

$$\frac{1}{2}\sum \frac{1}{n^2}$$

que es convergente.

Procedimientos similares podrían ser utilizados para estudiar el carácter de la serie (d), pero procederemos de otra forma. La serie $\sum 1/n$ es divergente; en cambio la serie $\sum 1/e^{n^2}$ es convergente puesto que la geométrica $\sum 1/e^n$ lo es y los términos de aquélla son menores. En consecuencia la serie (d) es divergente, puesto que si fuera convergente llegaríamos a que la serie $\sum 1/n$ también sería convergente (lo cual es falso) al ser suma de dos convergentes ya que

$$\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right) + \frac{1}{e^{n^2}}$$

(2) Análisis del carácter de la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{t^k - 1}{\log t}\, dt$$

según los valores del número real k.

Comencemos observando que el integrando es una función continua en $(0, 1)$ y, por tanto, localmente integrable. Estudiemos el comportamiento en los extremos del intervalo. En principio ambos extremos se nos presentan como problemáticos y por ello dividimos el intervalo $(0, 1)$ en los subintervalos $(0, 1/2]$ y $[1/2, 1)$ a fin estudiar las dos integrales impropias «simples» que se generan.

Para estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_{1/2}^1 \frac{t^k - 1}{\log t}\, dt$$

observamos que $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^k - 1}{\log t} = k$ (usar L'Hôspital) y por tanto el integrando admite prolongación continua en el punto 1, tratándose por consiguiente de una integral convergente, al ser la integral de una función continua en un intervalo cerrado y acotado.

Pasamos ahora al estudio de la integral impropia

$$\int_0^{1/2} \frac{t^k - 1}{\log t}\, dt.$$

La dificultad está en el 0, pues el $\log t$ tiende a $-\infty$ en dicho punto. Si pudiéramos prolongar el integrando de forma continua, como hemos hecho en el punto 1, la integral sería convergente. Eso es posible cuando $k \geq 0$, puesto que en tal caso

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^k - 1}{\log t} = 0$$

Únicamente nos queda analizar el caso $k < 0$. A tal fin, haciendo $k = -s$ se tiene

$$\int_0^{1/2} \frac{t^k - 1}{\log t}\, dt = \int_0^{1/2} \frac{t^{-s} - 1}{\log t}\, dt = \int_0^{1/2} \frac{1 - t^s}{t^s \log t}\, dt$$

La convergencia de esta integral es equivalente a la convergencia de

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{t^s \log t}.$$

Si se hubiera tratado de

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{t^p}$$

entonces la integral sería convergente para $0 < p < 1$ y divergente cuando $1 \leq p$, según vimos en el apartado (5) de los ejemplos 7.1.3. Este modelo va a permitir concluir el análisis de la convergencia.

Si $s = 1$ se tiene

$$\int \frac{1}{t \log t} = \log|\log t| + K$$

y por tanto la integral impropia diverge.

Si $s > 1$, al ser $t^s \leq t$, se tiene $-\dfrac{1}{t^s \log t} \geq -\dfrac{1}{t \log t}$ y por tanto la integral impropia es también divergente.

Si $s < 1$ hacemos la comparación del integrando con $1/t^p$ para $0 < s < p < 1$ y como

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{t^s \log t}}{\frac{1}{t^p}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^p}{t^s \log t} = \lim_{t\to 0} t^{p-s} \frac{1}{\log t} = 0$$

podemos aplicar el corolario 7.2.1 para concluir que en este caso la integral impropia converge.

Resumiendo la integral propuesta converge para $-1 < k$ y diverge en los demás casos.

En los ejemplos anteriores hemos estado aplicando criterios de comparación, pero tales criterios requieren que las sucesiones y funciones a las que se aplican sean positivas. ¿Se ha asegurado el lector de que se cumplen tales condiciones? Otra forma de abordar el estudio de la convergencia de

$$\int_0^1 \frac{t^k - 1}{\log t}\, dt$$

es realizar un cambio de variable del tipo $\log t = -x$ que la transforma en una integral impropia sobre el intervalo $(0, +\infty)$. Utilice este cambio de variable y discuta el carácter de la integral impropia que se genera.

Corolario 7.2.4 (Criterio de condensación) *Sea la serie $\sum a_n$ de términos no negativos, con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monótona decreciente. Son equivalentes:*

(1) $\sum a_n$ converge,

(2) $\sum 2^n a_{2^n}$ converge.

Demostración: Las siguientes desigualdades se obtienen aplicando tres ideas:

- la sucesión $(a_n)_n$ es decreciente;
- añadir los términos que convenga;
- agrupar los términos de forma astuta.

$$\begin{aligned}
2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} =&2(a_2 + 2a_4 + \ldots 2^{n-1}a_{2^n})\\
\leq&2(a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}))\\
=&2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2^n})\\
=&2(a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + a_{2^n})\\
\leq&2(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n})
\end{aligned}$$

A partir de estas desigualdades el resultado es consecuencia inmediata del criterio de mayoración. □

Trate de aplicar el criterio de condensación para caracterizar la convergencia de la serie armónica $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, es decir, trate de dar una demostración diferente del corolario 7.1.9.

En el criterio de comparación (o en el corolario 7.2.2) la idea es sustituir la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por una sucesión equivalente $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para la que se conozca el carácter de la serie $\sum b_n$ y otro tanto ocurre con la sustitución de f por una función g para la que sea conocida la convergencia de la correspondiente integral impropia.

Así, en cierto sentido, la convergencia depende de «recursos externos» a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Los criterios de la raíz y del cociente que veremos a continuación son criterios de convergencia que dependen directamente de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pero antes haremos un inciso para definir una generalización de la noción de límite que resulta de utilidad en éste y otros contextos.

Inciso: límites superior e inferior

Para sucesiones acotadas el teorema de Bolzano-Weierstrass garantiza que existen subsucesiones convergentes a determinados puntos que llamaremos *puntos de aglomeración* de la sucesión. El mayor de dichos puntos de aglomeración recibe el nombre de *límite superior* de la sucesión. Análogamente, el menor de los puntos de aglomeración recibe el nombre de *límite inferior* de la sucesión. Evidentemente una sucesión tiene límite si y sólo si tiene un único punto de aglomeración, es decir, si los límites superior e inferior coinciden.

Estas consideraciones pueden ser aplicadas a sucesiones no acotadas superiormente, en cuyo caso existirá una subsucesión con límite $+\infty$ y diremos que el límite superior de tal sucesión es $+\infty$. Otro tanto puede hacerse para sucesiones no acotadas inferiormente para las que se define el límite inferior como $-\infty$ ya que existe una subsucesión con dicho límite.

Ejemplo 7.2.5 La sucesión $a_n = (-1)^{n+1}$ tiene límite inferior -1 y límite superior +1. Y la sucesión cuyos primeros términos son 1, 2, 3, 1+1/1, 2+1/2, 3+1/3, 1+1/4, 2+1/5, 3+1/6,... tiene límite inferior 1 y límite superior 3.

Otra definición que se utiliza para estas nociones es la siguiente.

Definición 7.2.6 *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales.*

(1)

$$\limsup a_n := \inf\{\sup\{a_k; k \geq n\}; n \in \mathbb{N}\}$$

(2)

$$\liminf a_n := \sup\{\inf\{a_k; k \geq n\}; n \in \mathbb{N}\}$$

Es inmediato que dicha definición coincide con la indicada más arriba, en el caso del límite superior para sucesiones no acotadas superiormente y en el caso del límite inferior para sucesiones no acotadas inferiormente.

Para sucesiones acotadas las fórmulas anteriores también se corresponden con las nociones que hemos introducido anteriormente. Ello es consecuencia de la siguiente

Proposición 7.2.7 *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales.*

(1) Sea $\alpha = \operatorname{lím\,inf} a_n := \sup\{\operatorname{ínf}\{a_k; k \geq n\}; n \in \mathbb{N}\}$. Entonces α es el único número real que cumple la siguiente propiedad: «Para cada ε el cardinal del conjunto $\{n \in \mathbb{N}; \alpha-\varepsilon > a_n\}$ es finito y el cardinal del conjunto $\{n \in \mathbb{N}; \alpha+\varepsilon > a_n\}$ es infinito».

(2) Sea $\beta = \operatorname{lím\,sup} a_n := \operatorname{ínf}\{\sup\{a_k; k \geq n\}; n \in \mathbb{N}\}$. Entonces β es el único número real que cumple la siguiente propiedad: «Para cada ε el cardinal del conjunto $\{n \in \mathbb{N}; \beta-\varepsilon < a_n\}$ es infinito y el cardinal del conjunto $\{n \in \mathbb{N}; \beta+\varepsilon < a_n\}$ es finito».

Proposición 7.2.8 (Criterio de la raíz) *Sea $\sum a_n$ una serie de términos no negativos y sea $\beta = \operatorname{lím\,sup} \sqrt[n]{a_n}$.*

(1) Si $\beta < 1$ entonces la serie converge.

(2) Si $\beta > 1$ entonces la serie diverge.

Demostración: Si $\beta < 1$ elegimos r tal que $\beta < r < 1$. Aplicando la proposición 7.2.7 sabemos que a la derecha de r sólo existe un número finito de términos de la sucesión $(\sqrt[n]{a_n})_n$; por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{a_n} \leq r$, es decir, $a_n \leq r^n$ para $n \geq n_0$. La convergencia de la serie geométrica $\sum r^n$ y el criterio de comparación garantizan la convergencia de $\sum a_n$

Si $\beta > 1$, aplicando de nuevo la proposición 7.2.7, sabemos que existe un conjunto infinito de valores de $n \in \mathbb{N}$ para los que $a_n \geq 1$ y en consecuencia no es posible que $\operatorname{lím} a_n = 0$, condición ésta necesaria para la convergencia de la serie. □

Para $\beta = 1$ nada puede afirmarse en general al existir sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para las que la serie $\sum a_n$ es convergente y otras para las que la serie es divergente (ver los ejemplos 7.2.11).

Ejemplos 7.2.9

(1) La serie

$$\sum \frac{1}{(\log n)^n}$$

es convergente puesto que en este caso existe

$$\operatorname{lím}_n \sqrt[n]{\frac{1}{(\log n)^n}} = \operatorname{lím}_n \frac{1}{\log n} = 0 < 1$$

y por tanto el límite superior es 0.

(2) Para la serie

$$\sum \sqrt{n(n+1)2^{-n}}$$

tenemos

$$\lim_n \sqrt[n]{\sqrt{n(n+1)2^{-n}}} = \lim_n \sqrt[2n]{\frac{n^2(1+1/n)}{2^n}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{n}\ \sqrt[2n]{1+1/n}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

luego la serie converge.

Proposición 7.2.10 (Criterio del cociente) *Sea $\sum a_n$ de términos no negativos y sea*

$$\alpha = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \beta = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

(1) Si $\beta < 1$ entonces la serie converge.

(2) Si $\alpha > 1$ entonces la serie diverge.

DEMOSTRACIÓN: Se utilizan aquí ideas similares a las utilizadas en la demostración del criterio de la raíz. Si $\beta < r < 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < r$ para $n \geq n_0$. Así que

$$\begin{aligned} \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} &< r \\ \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} &< r \\ &\dots \\ \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}} &< r \end{aligned}$$

de donde multiplicando obtenemos

$$\frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0}} < r^k \quad k \in \mathbb{N}$$

que puede escribirse como $a_{n_0+k} < a_{n_0} r^k$. La convergencia de la serie geométrica $\sum r^k$ y el criterio de comparación garantizan la convergencia de la serie $\sum a_{n_0+k}$ y por tanto de la serie $\sum a_n$.

Si $\alpha > 1$ entonces, aplicando la proposición 7.2.7, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ para todo $n \geq n_0$; por tanto, no puede ser $\lim a_n = 0$, luego la serie es divergente (recordemos que las series de términos positivos sólo pueden ser convergentes o divergentes).

Al igual que ocurre con el criterio de la raíz nada puede afirmarse con carácter general cuando $\alpha = 1$. □

Puede demostrarse que si existe lím $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ también existe lím $\sqrt[n]{a_n}$ y valen lo mismo. Aunque el segundo límite puede existir sin que exista el primero, (véase, por ejemplo, el libro de Ortega [1] pág. 269), por ello el criterio de la raíz es algo más potente que el del cociente porque el primero puede resolver situaciones para las que el segundo no proporciona solución.

Ejemplos 7.2.11

(1) Consideremos las series $\sum \frac{1}{n}$ y $\sum \frac{1}{n^2}$. Para ambas se cumple que

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 = \lim_n \sqrt[n]{a_n}.$$

Pero la primera diverge y la segunda converge, así que nada se puede asegurar respecto a la convergencia si únicamente sabemos que los límites en cuestión valen 1.

(2) Para estudiar el carácter de la serie $\sum \frac{x^n}{n!}$ con $x \geq 0$ podemos aplicar el criterio del cociente

$$\lim_n \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_n \frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!} = \lim_n \frac{x}{n+1} = 0$$

y obtenemos la convergencia de la serie para cualquier $x \geq 0$.

(3) En el caso de la serie $\sum \frac{x^n}{n^p}$ con $0 \leq x$ aplicando el criterio del cociente tenemos

$$\lim_n \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^p}}{\frac{x^n}{n^p}} = \lim_n x\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = x.$$

Así que si $0 \leq x < 1$ la serie converge y si $x > 1$ diverge cualquiera que sea el valor de p.

Para $x = 1$ el criterio del cociente no permite determinar el carácter. Pero para $x = 1$ la serie se convierte en $\sum \frac{1}{n^p}$ que, como sabemos, converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

(4) A la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuyos primeros términos obedecen a la siguiente regla: 2^{-2}, 2^{-1}, 2^{-4}, 2^{-3}, 2^{-6}, 2^{-5},... se le puede aplicar el criterio de la raíz para determinar su convergencia, pero en cambio el criterio del cociente no permite deducir la convergencia.

7.3. La propiedad asociativa en series

Las series son una especie de sumas «infinitas». Es natural plantearse si propiedades de las sumas finitas de números, como la asociatividad, disociatividad y conmutatividad, son ciertas para las series. En esta sección y en la siguiente nos ocuparemos de esas cuestiones.

Definición 7.3.1 *Sean* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *series de números reales. Se dice que* $\sum b_n$ *se ha obtenido de* $\sum a_n$ *introduciendo paréntesis si existe una sucesión* $n_1 < n_2 < \dots$ *de naturales tales que* $b_1 = a_1 + \dots a_{n_1}, b_2 = a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}$ *y en general* $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}$ *para* $k > 1$*. También se expresa diciendo que* $\sum a_n$ *se ha obtenido de* $\sum b_n$ *suprimiendo paréntesis.*

Proposición 7.3.2 *Sean* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *series de números reales tales que* $\sum b_n$ *se ha obtenido de* $\sum a_n$ *introduciendo paréntesis.*

(1) Si $\sum a_n$ *converge entonces* $\sum b_n$ *converge y ambas series tienen la misma suma.*

(2) Si $\sum b_n$ *converge,* $\lim a_n = 0$ *y la diferencia* $n_{k+1} - n_k$ *(longitud de los paréntesis) se mantiene acotada por* l *para todo* $k \in \mathbb{N}$*, entonces* $\sum a_n$ *converge y ambas series tienen la misma suma.*

Demostración: Para demostrar el primero de los apartados, que corresponde a una propiedad asociativa, basta observar que si ponemos

$$B_m := b_1 + b_2 + \cdots + b_m \quad A_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

entonces $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por lo que es convergente siendo $\lim_m B_m = \lim_n A_n$.

La propiedad disociativa, que corresponde al segundo de los apartados, no funciona en general. Un ejemplo es la serie

$$(1-1) + (1-1) + \dots$$

que con paréntesis es converte con suma 0, mientras que si se quitan no lo es.

Sin embargo, veamos que sí se pueden quitar los paréntesis cuando se dan las circunstancias que se contemplan en el apartado segundo de la proposición. En efecto, cada $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ tras introducir los paréntesis oportunos corresponde a

$$A_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_m + a_{n_m+1} + a_{n_m+2} + \cdots + a_n = B_m + a_{n_m+1} + a_{n_m+2} + \cdots + a_n.$$

Tomando límites en la fórmula anterior cuando n (y por tanto m) tiende a infinito, teniendo en consideración que el número de a_j que hay en el segundo miembro está acotado por $l \in \mathbb{N}$ y que $\lim_j a_j = 0$, se obtiene que

$$\lim_n A_n = \lim_m B_m + \lim_m (a_{n_m+1} + a_{n_m+2} + \cdots + a_n) = \lim_m B_m,$$

lo cual prueba el resultado buscado. $\square$

Ejemplo 7.3.3 Vamos a aplicar los resultados anteriores para analizar la convergencia de la serie

$$\sum a_n = 1 - \log\frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \log\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \log\frac{4}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n} + \ldots.$$

Comencemos introduciendo paréntesis para asociar los términos de dos en dos. La serie que se obtiene es

$$\sum b_n = \sum \left(\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

A diferencia de la serie original, que tenía términos positivos y negativos, todos los términos de la nueva serie son positivos, ya que por la fórmula de Taylor se verifica que

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2!(1+\theta)^2}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{2!(1+\theta)^2}\frac{1}{n^2} < 0.$$

Podemos entonces aplicarle los criterios de convergencia para series de términos positivos. En particular, por el corolario 7.2.2, sabemos que el carácter está determinado por el tamaño del integrando, es decir

$$\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{2!n^2}$$

y por tanto la serie $\sum b_n$ es convergente ya que $\sum 1/n^2$ lo es.

Mirando las cosas al revés, resulta que la serie $\sum a_n$ se obtiene a partir de la serie convergente $\sum b_n$ quitando paréntesis cuya longitud es 2; y como claramente $\lim_n a_n = 0$, podemos aplicar la proposición inmediatamente anterior para concluir que $\sum a_n$ es convergente y tiene la misma suma que $\sum b_n$. Para calcular la suma de $\sum b_n$ observemos que denotando con B_n su suma n-ésima es

$$B_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n = H_n - \log n$$

de donde $\lim_n B_n = \gamma$ (véase el ejercicio 15 del capítulo 2 o la sección 7.7 en este mismo capítulo).

Observación 7.3.4 Para series de términos positivos la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de las sumas parciales es monótona creciente y por tanto la serie converge si, y sólo si, las sumas n-ésimas están acotadas superiormente (en otro caso converge a $+\infty$). Es obvio entonces que para las series de términos positivos son ciertas, sin ninguna restricción, las propiedades asociativa y disociativa.

7.4. Convergencia absoluta y condicional. Teorema de Riemann

La propiedad conmutativa también es cierta para las series de términos no negativos, pero el concepto requiere ser precisado.

Definición 7.4.1 *Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series. Diremos que la serie $\sum b_n$ es una reordenación de la serie $\sum a_n$ si existe una biyección $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $b_n = a_{\phi(n)}$*

Proposición 7.4.2 *Sea $\sum a_n$ una serie convergente de términos positivos, entonces cualquier reordenada suya converge y ambas tienen la misma suma.*

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia inmediata de que para series de términos positivos la convergencia equivale a la acotación superior de las sumas parciales. □

Como ya señalamos en otro lugar, si el término general de la serie es negativo, sacando factor común -1, la convergencia de la serie se reduce a una de términos positivos. En el caso de que haya términos de ambos tipos el análisis no es tan simple. Una tentación natural es prescindir de los signos y estudiar la convergencia de la nueva serie de términos positivos así obtenida y analizar si existe alguna relación con la convergencia de la serie inicial. Eso conduce al concepto de convergencia absoluta que también puede formularse para integrales impropias.

Definición 7.4.3

La serie $\sum a_n$ con $a_n \in \mathbb{R}$ se dice absolutamente convergente si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

La integral impropia $\int_a^b f$, donde $b \leq \infty$, se dice absolutamente convergente si la integral impropia $\int_a^b |f|$ es convergente.

Proposición 7.4.4

Si la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente entonces es convergente.

Si la integral impropia $\int_a^b f$ es absolutamente convergente entonces también es convergente.

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar los correspondientes criterios de Cauchy para la convergencia. □

Una consecuencia inmediata de este resultado es que si una serie es absolutamente convergente cualquier reordenada suya también es convergente, pero ¿todas las reordenaciones tienen la misma suma?. La respuesta a esta cuestión es afirmativa como vamos a ver. Introducimos para ello los conceptos de «serie de términos positivos» y «serie de términos negativos» asociada a la serie $\sum a_n$.

Definición 7.4.5 *Dada la serie $\sum a_n$ se llama:*

(1) Serie de términos positivos asociada a esta serie, a la serie $\sum a'_n$ donde $a'_n = a_n$ si $a_n \geq 0$ y $a'_n = 0$ si $a_n < 0$.

(2) Serie de términos negativos asociada a esta serie, a la serie $\sum a''_n$ siendo $a''_n = -a_n$ si $a_n \leq 0$ y $a''_n = 0$ si $a_n > 0$.

Proposición 7.4.6 *Sea la serie $\sum a_n$ y sean $\sum a'_n$ y $\sum a''_n$ sus series de términos positivos y negativos.*

(1) La serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente si y sólo las series $\sum a'_n$ y $\sum a''_n$ son convergentes.

(2) Si la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente y llamamos A' y A'' a las sumas de dichas de $\sum a'_n$ y $\sum a''_n$, respectivamente, se verifica que la suma de la serie $\sum a_n$ (y de todas sus reordenadas) es $A' - A''$.

Demostración: Con las notaciones anteriores las se cumplen las dos igualdades siguientes.

$$(a'_1 + \cdots + a'_n) + (a''_1 + \cdots + a''_n) = |a_1| + \cdots + |a_n|$$

$$(a'_1 + \cdots + a'_n) - (a''_1 + \cdots + a''_n) = a_1 + \cdots + a_n$$

Utilizando la primera de ellas y tomando límites es inmediato que si $\sum a'_n$ y $\sum a''_n$ convergen también converge $\sum |a_n|$. Por otra parte es evidente utilizando el criterio de mayoración que si $\sum |a_n|$ converge también convergen $\sum a'_n$ y $\sum a''_n$.

De la segunda igualdad, tomando límites, se obtiene inmediatamente que la suma de la serie $\sum a_n$ es $A' - A''$. Si hacemos una reordenación de $\sum a_n$ obtenemos una serie $\sum b_n$ con sus correspondientes $\sum b'_n$ y $\sum b''_n$ siendo la suma de la serie reordenada $B' - B''$ (la notación es autoexplicativa). Pero, evidentemente, $B' = A'$ y $B'' = A''$ por tratarse de reordenaciones en series de términos positivos. □

Así pues, además de las series convergentes de términos positivos, las series absolutamente convergentes también verifican la propiedad conmutativa. De hecho son las únicas que verifican esta propiedad, que llamaremos convergencia incondicional.

Definición 7.4.7 *Una serie $\sum a_n$ se dice incondicionalmente convergente cuando todas sus reordenadas son convergentes y tienen la misma suma.*

Teorema 7.4.8 *Una serie $\sum a_n$ es incondicionalmente convergente si, y sólo si, es absolutamente convergente.*

Demostración: Si la serie es incondicionalmente convergente entonces afirmamos que la serie de términos positivos asociada $\sum a'_n$ y la serie de términos negativos asociada $\sum a''_n$ tienen el mismo carácter. En efecto, si una fuera divergente y la otra convergente, es inmediato que la serie $\sum a_n$ sería divergente a $+\infty$ o a $-\infty$.

Ahora, si las dos series $\sum a'_n, \sum a''_n$ convergen también converge $\sum |a_n|$. Para concluir la prueba basta con demostrar que si $\sum a'_n = \sum a''_n = +\infty$ entonces la serie $\sum a_n$ no sería incondicionalmente convergente y ello es consecuencia del siguiente teorema de Riemann de más amplio alcance. □

Teorema 7.4.9 (Teorema de Riemann de reordenación de series)
Sean $\sum a'_n$ y $\sum a''_n$ dos series divergentes de términos no negativos tales que

$$\text{lím}\, a'_n = \text{lím}\, a''_n = 0.$$

Entonces para cada $a \in \widetilde{\mathbb{R}}$ se pueden elegir sucesiones $(k_j)_j, (l_j)_j$ de enteros positivos con

$$k_1 < k_2 < k_3 < \dots, \qquad l_1 < l_2 < l_3 < \dots$$

y tales que la serie

$$a'_1 + \cdots + a'_{k_1} - a''_1 - \cdots - a''_{l_1} + a'_{k_1+1} + \cdots + a'_{k_2} - a''_{l_1+1} - \cdots - a''_{l_2} + \dots$$

tiene por suma a.

Demostración: Consideremos que $a \in \mathbb{R}$.

Sea $k_1 \geq 1$ el menor entero tal que $a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_{k_1} > a$ y sea $l_1 \geq 1$ el menor entero tal que $a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_{k_1} - a''_1 - a''_2 - \cdots - a''_{l_1} < a$. Sea ahora $k_2 > k_1$ tal que $a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_{k_1} - a''_1 - a''_2 - \cdots - a''_{l_1} + a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2} > a$ y así sucesivamente.

Afirmamos que la serie así obtenida tiene por suma a. En efecto dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ se verifican $a'_n < \varepsilon$ y $a''_n < \varepsilon$. Tomando j_0 tal que $k_{j_0} > n_0, l_{j_0} > n_0$ las sumas parciales S_n están comprendidas entre $a - \varepsilon$ y $a + \varepsilon$ siempre que

$$n > k_1 + l_1 + \cdots + k_{j_0} + l_{j_0} + m.$$

Cuando $a = +\infty$ el proceso es análogo: en primer lugar se tiene un k_1 tal que $a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_{k_1} > 1$. Luego $k_2 > k_1$ para tener $a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_{k_1} - a''_1 - a''_2 - \cdots - a''_{l_1} + a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2} < 1$. Y se inicia de nuevo el proceso de forma recurrente cambiando el valor 1, por 2, 3, etc. □

7.5. Productos de series

Definición 7.5.1 *Dadas las series $\sum_{n\geq 1} a_n, \sum_{n \geq 1} b_n$ se llama producto de ambas series a la serie $\sum c_k$ siendo $c_k = a_{n_k} b_{m_k}$ y $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ una biyección donde $\phi(k) = (n_k, m_k)$.*

En la definición anterior para cada ϕ se obtiene una serie producto diferente. La idea de un producto de series es una forma de concebir la suma de todos los posibles productos de la forma $p_{ij} := a_i b_j$. Como los p_{ij} pueden ser vistos como una matriz infinita, se trata de numerar todos los elementos de dicha matriz (recuerde que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable) y construir una serie a partir de esta forma de numerar. Hay dos formas interesantes: por menores principales y por diagonales.

La ordenación por menores principales viene esquematizada en el siguiente diagrama:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Corresponde a la ordenación siguiente:

$$\begin{array}{l} c_1 = p_{11} := a_1 b_1 \\ c_2 = p_{12} := a_1 b_2 \quad c_3 = p_{22} := a_2 b_2 \quad c_4 = p_{21} := a_2 b_1 \\ c_5 = p_{13} \quad c_6 := p_{23} \quad c_7 = p_{33} \ldots \end{array}$$

La ordenación por diagonales de la matriz (no principales) corresponde a la ordenación

$$\begin{array}{l} c_1 = p_{11} := a_1 b_1 \\ c_2 = p_{12} := a_1 b_2 \quad c_3 = p_{21} := a_2 b_1 \\ c_4 = p_{13} \quad c_5 = p_{22} \quad c_6 := p_{31} \ldots \end{array}$$

En cualquier caso es claro que cualquier producto de dos series es una reordenación de otro producto, por lo que si, por ejemplo, tenemos la convergencia absoluta de un producto automáticamente tenemos la de cualquier otro.

Proposición 7.5.2 *Si las series $\sum_{n\geq 1} a_n, \sum_{n\geq 1} b_n$ son absolutamente convergentes con sumas A, B entonces cualquier producto es convergente y tiene por suma AB.*

Demostración: Sean

$$\alpha := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{y} \quad \beta := \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

Utilizando la ordenación de los menores principales es claro que las sumas parciales verifican

$$\sum_{1}^{n^2} |c_k| = \sum_{1\leq j,k\leq n} |a_j||b_k| = \sum_{1\leq j\leq n} |a_j| \sum_{1\leq k\leq n} |b_k| \leq \alpha\beta.$$

Por tanto cualquier producto es absolutamente convergente y por ende incondicionalmente convergente.

Para calcular la suma tomamos un orden de menores principales y tomamos la subsucesión de las sumas parciales correspondientes a menores principales completos,

$$\sum_{k=1}^{n^2} c_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

obteniendo que la suma de la serie es AB. □

Si en la ordenación por diagonales procedemos a sumar asociando términos, es decir, introducimos paréntesis en una forma adecuada, obtenemos un producto especial, denominado *producto de Cauchy*. Denominamos producto de Cauchy de las series $\sum_{n\geq 1} a_n$ y $\sum_{n\geq 1} b_n$ a la serie $\sum_{n\geq 1} d_n$ donde

$$d_n := \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$$

Naturalmente, si las dos series que se multiplican son de términos no negativos y el producto de Cauchy converge, entonces converge el producto asociado a la ordenación por diagonales y, por tanto, también converge cualquier otro producto.

Si las dos series son absolutamente convergentes cualquier producto es convergente, según el teorema anterior, y, por tanto, según la proposición 7.3.2, el producto de Cauchy de las series $\sum|a_n|$ y $\sum|b_n|$ también converge. Puesto que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k||b_{n+1-k}|$$

se obtiene la convergencia absoluta del producto de Cauchy.

Sin embargo puede ocurrir que el producto de Cauchy converja sin que lo hagan los productos ordinarios. En particular existe una versión específica y más general del resultado anterior para el producto de Cauchy, que enunciamos a continuación sin demostración.

Teorema 7.5.3 (Mertens) *El producto de Cauchy de una serie convergente por una absolutamente convergente es convergente y tiene por suma el producto de las sumas.*

El teorema de Mertens no puede mejorarse como pone de relieve el ejemplo que sigue.

Ejemplo 7.5.4 El cuadrado de la serie convergente $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ según el producto de Cauchy no es convergente porque el término general no tiende a cero.

7.6. Criterios para convergencia no absoluta: teoremas de Dirichlet y Abel

Para estudiar el carácter de una serie o una integral impropia lo primero es considerar la serie o integral de sus valores absolutos y tratar de probar la convergencia utilizando las técnicas de la sección 7.2, ya que si converge absolutamente entonces converge. En esta sección vamos a establecer nuevos criterios para estudiar el carácter en aquellos casos en que no haya convergencia absoluta.

Comenzaremos con dos resultados previos de carácter técnico para esta sección: la fórmula de Abel de sumación parcial (o sumación por partes) y el segundo teorema de la media del cálculo integral.

Fórmula de Abel de sumación parcial

Proposición 7.6.1 (Fórmula de Abel de sumación) *Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en $\mathbb{R}$ y $A_n := \sum_{k=m}^{n} a_k$ para m fijo, entonces para $p > m$ se tiene*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p$$

Demostración: Los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{q} a_n b_n &= \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1}) b_n \\ &= \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n + A_q b_q - \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_{n+1} - A_{p-1} b_p \\ &= \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p\end{aligned}$$

prueban la fórmula. □

Segundo teorema de la media del cálculo integral

Proposición 7.6.2 (Segundo teorema de la media)
Sean $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables Riemann. Entonces:

(1) Si $g \geq 0$ y decreciente, existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx$$

(2) Si $g \geq 0$ y creciente, existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

(3) Si g es monótona, existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx$$

Los dos primeros se conocen con el nombre de teorema de Lagrange del valor medio para el cálculo integral. El último como teorema de Weierstrass del valor medio para el cálculo integral. En realidad los tres son equivalentes.

Demostración:

(1) Comenzaremos probando que si $F(x) := \int_a^x f(t)\,dx$ y $m = F(\alpha), M = F(\beta)$ son respectivamente el mínimo y el máximo de esta función continua se verifica que

$$mg(a) \leq \int_a^b f(t)g(t)\,da \leq Mg(a) \qquad (*)$$

Supondremos inicialmente que g sea una función escalonada decreciente que denotamos con h. Es decir una función que toma el valor v_k en el intervalo $(x_{k-1}, x_k]$ para $k = 2, \dots n$ y v_1 en el intervalo $[x_0 = a, x_1]$ donde los x_k constituyen una partición de $[a,b]$ y que $h(a) = g(a)$

$$\int_a^b h(t)f(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} h(t)f(t)\,dt = \sum_{k=1}^n v_k(F_k - F_{k-1})$$

siendo

$$F_k = \int_a^{x_k} f(t)\,dt$$

Pero

$$\sum_{k=1}^n v_k(F_k - F_{k-1}) = \sum_{k=1}^n v_kF_k - \sum_{k=1}^n v_kF_{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} F_k(v_k - v_{k+1}) + v_nF_n$$

Como $v_k - v_{k+1} \geq 0$ y $m \leq F_k \leq M$ para todo k se obtiene que

$$m\Big(\sum_{k=1}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) + v_n\Big) \leq \int_a^b f(t)h(t)\,dt \leq M\Big(\sum_{k=1}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) + v_n\Big)$$

y efectuando operaciones

$$mh(a) \leq \int_a^b f(t)h(t)\,dt \leq Mh(a)$$

Así, la afirmación $(*)$ está probada. Y suponiendo que $g(a) > 0$, lo cual no es restrictivo, se tiene

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{g(a)} \leq M$$

y por el teorema de Bolzano existe ξ de modo que

$$F(\xi) = \int_a^\xi f(t))\,dt = \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{g(a)}$$

De este resultado se obtiene la primera parte para el caso en que g sea una función decreciente mediante paso al límite.

En efecto, como g es monótona decreciente dividimos el intervalo imagen de g en n partes iguales de longitud $\frac{g(a)-g(b)}{n}$ mediante los puntos $y_0 = g(a), y_1, \dots y_n = g(b)$ y construimos la siguiente función escalonada:

$$h_n(t) = y_{k-1} \text{ si } t \in \{x : y_{k-1} \geq g(x) > y_k\} \qquad k = 1, 2, \dots n-1$$

$$h_n(t) = y_{n-1} \text{ si } t \in \{x : y_{n-1} \geq g(x) \geq y_n\}$$

De este modo se tiene que $0 \leq g(t) - h_n(t) \leq \frac{g(a)-g(b)}{n}$ para todo $t \in [a, b]$ y por tanto,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t)g(t)\,dt - \int_a^b f(t)h_n(t)\,dt \right| &\leq \int_a^b |g(t) - h_n(t)||f(t)|\,dt \\ &\leq \frac{g(a)-g(b)}{n} \int_a^b |f(t)|\,dt \end{aligned}$$

es decir,

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \lim_n \int_a^b f(t)h_n(t)\,dt$$

pero como se verifica que

$$mh_n(a) \leq \int_a^b f(t)h_n(t)\,dt \leq Mh_n(a)$$

al ser $h_n(a) = g(a)$, tomando límites en esta desigualdad cuando $n \to \infty$ se obtiene la fórmula (*).

La primera parte del teorema está probada.

(2) se deduce de 1 razonando con la función $\tilde{g}(t) = g(b) - g(t)$ y suponiendo, sin perder generalidad, que $g(a) = 0$.

(3) En el caso de que g sea creciente se razona con $\tilde{g}(t) = g(b) - g(t)$ que es decreciente y se aplica la primera parte. En el caso de que g sea decreciente se razona con $\tilde{g}(t) = g(a) - g(t)$ que es creciente y se aplica la segunda parte. □

La prueba del segundo teorema de la media no es sencilla. Pero cuando $f \geq 0$ puede hacerse otra que es mucho más fácil. Basta con definir

$$H(x) := g(a) \int_a^x f(t)\,dt + g(b) \int_x^b f(t)\,dt$$

y aplicar la propiedad de los valores intermedios a la función H, teniendo en cuenta la monotonía de la función g.
Escriba los detalles y convénzase de que, realmente, la demostración en este caso es mucho más fácil.

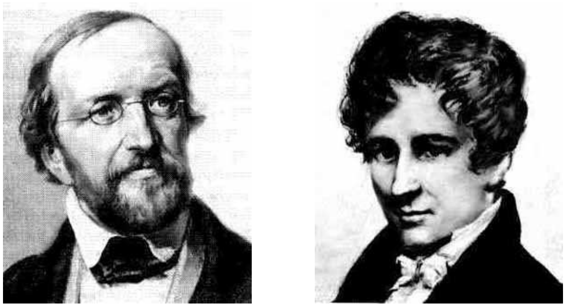

Figura 7.2: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Düren, 1805 – Göttingen, 1859), a izquierda, y Niels Henrik Abel (Noruega, 1802 – Noruega, 1829). Dirichlet probó que en una progresión aritmética cuyo primer término es coprimo con la diferencia hay infinitos números primos. Abel probó la imposibilidad de resolver algebraicamente la ecuación de quinto grado.

Criterios de convergencia de Dirichlet y Abel

Teorema 7.6.3 (Criterio de Dirichlet)

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que:
(1) $|\sum_{k=1}^n a_k| < M < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
(2) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente con límite 0.
Entonces, la serie $\sum a_n b_n$ es convergente.

Sean f y g funciones definidas en $[a, b)$ tales que:
(1) $|\int_a^x f(t)\,dt| < M < \infty$ para todo $x \in [a, b)$,
(2) g es monótona decreciente con límite 0.
Entonces, la integral impropia $\int_a^b fg$ es convergente.

Demostración: Es suficiente probar, en ambos casos, que se verifica la correspondiente condición de Cauchy (proposición 7.1.4).

Para el caso de la serie utilizaremos la fórmula de sumación de Abel 7.6.1 . Así, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ se tiene $b_n < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. Si $n_0 \leq p < q$ se verifica

$$\begin{aligned}\left|\sum_p^q a_n b_n\right| &= \left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p\right| \\ &\leq M \sum_{n=p}^{q-1} (b_n - b_{n+1}) + M b_q + M b_p \\ &= M(b_p - b_q + b_q + b_p) = M 2 b_p < \varepsilon.\end{aligned}$$

Para el caso de la integral impropia usaremos el apartado tercero del segundo teorema de la media 7.6.2. Como $\lim_{t\to b} g(t) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe t_0 tal que si $t_0 \leq t$ se tiene $|g(t)| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$. Si $t_0 \leq p \leq q$ se verifica

$$\begin{aligned}\left|\int_p^q f(x)g(x)\,dx\right| &= \left|g(p)\int_p^\xi f(x)\,dx + g(q)\int_\xi^q f(x)\,dx\right| \\ &\leq |g(p)|\left|\int_p^\xi f(x)\,dx\right| + |g(q)|\left|\int_\xi^q f(x)\,dx\right| \\ &\leq |g(p)| 2M + |g(q)| 2M \\ &< \frac{\varepsilon}{4M} 2M + \frac{\varepsilon}{4M} 2M = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ya que

$$\left|\int_p^\xi f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^\xi f(x)\,dx - \int_a^p f(x)\,dx\right| \leq M + M = 2M.$$

Así pues, en ambos casos se cumple la condición de Cauchy. □

Ejemplos 7.6.4 Análisis de la convergencia de las integrales

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \qquad \int_2^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\log x}\,dx$$
$$\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx \qquad \int_0^\infty \cos x^2\,dx.$$

Comencemos probando que la integral $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ no es absolutamente convergente. Para ello, en primer lugar observemos que sólo es impropia en $+\infty$, pues la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ se extiende al 0 como función continua. Consideremos entonces la siguiente acotación inferior:

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx = \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)\pi}^{i\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i\pi}\int_{(i-1)\pi}^{i\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

Por tanto, puesto que las sumas parciales de la serie armónica divergen, también lo hace la integral.

Ahora, para probar la convergencia de $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ basta utilizar el criterio de Dirichlet, considerando $g(x) := 1/x$ que es decreciente y convergente a 0 en $+\infty$, y $f(x) := \operatorname{sen} x$ que verifica:

$$\left| \int_0^x f(t)\, dt \right| = |\cos 0 - \cos x| \leq 2$$

para todo $x \geq 0$. También puede obtenerse la convergencia, sin necesidad de utilizar el criterio de Dirichlet, mediante integración por partes.

La integral $\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\log x}$ no es absolutamente convergente, ya que $\log x \leq x$, por lo que el criterio de comparación y la no convergencia absoluta de la integral anterior garantizan la afirmación. Para obtener la convergencia, de nuevo, basta utilizar el criterio de Dirichlet en la forma evidente.

Las dos últimas se denominan integrales de Fresnel. Comencemos realizando el cambio de variable $t = x^2$, por el que las integrales entre 0 y u se transforman en:

$$I_1 := \frac{1}{2} \int_0^{u^2} \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\, dt \quad \text{y} \quad I_2 := \frac{1}{2} \int_0^{u^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$$

En primer lugar observemos que ambas son convergentes, para lo que basta utilizar el criterio de Dirichlet con $g(t) = t^{-1/2}$ y tener en cuenta que $\int_0^1 t^{-1/2} \cos t$ es convergente.

Probemos ahora que no son absolutamente convergentes. Para ello, en primer lugar, demostremos que las integrales de los valores absolutos tienen, en ambos casos, el mismo carácter. Para ello observemos que

$$\int_\pi^r \frac{|\operatorname{sen}(t)|}{\sqrt{t}}\, ds = \int_{\pi/2}^{r-\pi/2} \frac{|\operatorname{sen}(s+\pi/2)|}{(s+\pi/2)^{1/2}}\, ds = \int_{\pi/2}^{r-\pi/2} \frac{|\cos s|}{(s+\pi/2)^{1/2}}$$

y esta última integral tiene el mismo carácter que $\int_1^\infty s^{-1/2} |\cos s|$, pues se verifica

$$\lim_{s \longrightarrow +\infty} \frac{(s+\pi/2)^{1/2}}{s^{1/2}} = 1$$

Una vez establecido que las dos integrales tienen el mismo carácter, se obtiene que ambas son divergentes, ya que

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \Big(|\cos t| + |\operatorname{sen} t| \Big)$$

y basta aplicar el método de comparación.

Las funciones de Fresnel heredan su nombre del físico francés Augustin-Jean Fresnel que las utilizó en sus estudios de fenómenos de difracción en óptica (http://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_integral). Maxima conoce el valor de dichas integrales y puede dibujar la función integral indefinida de forma gráfica.

Teorema 7.6.5 (Criterio de Abel)

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que:
(1) $\sum a_n$ es convergente,
(2) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona y acotada.
Entonces, la serie $\sum a_n b_n$ es convergente.

Sean f, g funciones localmente integrables en $[a, b)$ tales que:
(1) $\int_a^b f$ es convergente,
(2) g es monótona y acotada.
Entonces, la integral impropia $\int_a^b fg$ es convergente.

Demostración: Es suficiente probar que se cumple la condición de Cauchy correspondiente (proposición 7.1.4). Para el caso de la serie utilizaremos la fórmula de sumación de Abel 7.6.1. Supongamos que $|b_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como la serie $\sum a_n$ es convergente, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n_0 \leq r$ se tiene $|\sum_{j=n_0}^{r} a_j| < \varepsilon/(4M)$. Tomando $m = n_0$ en la fórmula de Abel 7.6.1, si $n_0 < p \leq q$ se verifica

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right| &= \left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p\right| \\
&\leq \sum_{n=p}^{q-1} |A_n||b_n - b_{n+1}| + |A_q||b_q| + |A_{p-1}||b_p| \\
&< \frac{\varepsilon}{4M}\left(\sum_{n=p}^{q-1} |b_n - b_{n+1}| + |b_q| + |b_p|\right) \\
[(b_n)_n \text{ monótona}] &= \frac{\varepsilon}{4M}\left(|b_p - b_q| + |b_q| + |b_p|\right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4M}\left(|b_p| + |b_q| + |b_q| + |b_p|\right) < \varepsilon
\end{aligned}$$

Para el caso de la integral impropia usaremos el apartado tercero del segundo teorema de la media 7.6.2. Supongamos que $|g(x)| < M$ para todo $x \in [a, b)$. Como la integral impropia $\int_a^b f$ es convergente se cumple la condición de Cauchy y, por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe t_0 tal que si $t_0 < p \leq q$ se tiene $|\int_p^q f(t)\,dt| < \varepsilon/(2M)$. Así, si $t_0 < p \leq q$ se verifica

$$\begin{aligned}
\left|\int_p^q f(x)g(x)\,dx\right| &= \left|g(p)\int_p^{\xi} f(x)\,dx + g(q)\int_{\xi}^{q} f(x)\,dx\right| \\
&\leq |g(p)|\left|\int_p^{\xi} f(x)\,dx\right| + |g(q)|\left|\int_{\xi}^{q} f(x)\,dx\right| \\
&< |g(p)|\frac{\varepsilon}{2M} + |g(q)|\frac{\varepsilon}{2M} \leq (M + M)\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Resumiendo, se satisface en cada caso la condición de Cauchy. $\square$

Ejemplo 7.6.6 Convergencia de las integrales de Fresnel

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx \qquad \int_0^\infty \cos x^2\,dx.$$

Teorema 7.6.7 (Criterio de Leibniz para series alternadas) *Sea una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente con límite 0. Entonces la serie alternada $\sum(-1)^{n+1}a_n$ es convergente. Además denotando con S la suma de la serie se tienen las siguientes acotaciones:*

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}, \quad y \quad |S_n - S| < a_{n+1}.$$

DEMOSTRACIÓN: La convergencia es consecuencia del criterio de Dirichlet 7.6.3. Como $(a_n)_n$ es decreciente también lo es $(S_{2n})_n$ ya que

$$S_{2n} = S_{2n-2} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n-2};$$

pero como el límite de esta sucesión debe ser S, se tiene $S_{2n} \leq S$. Análogamente $(S_{2n+1})_n$ es monótona decreciente con límite S, por lo que $S \leq S_{2n+1}$. Así pues

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1} \quad \text{y} \quad S_{2n+2} \leq S \leq S_{2n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

y por tanto

$$|S_{2n} - S| \leq |S_{2n} - S_{2n+1}| = a_{n+1} \quad \text{y} \quad |S_{2n+1} - S| \leq |S_{2n+2} - S_{2n+1}| = a_{n+2}.$$

Estas dos estimaciones se reducen a $|S_n - S| < a_{n+1}$, que es lo que queremos. □

Ejemplos 7.6.8

(1) La serie

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

es convergente como consecuencia del criterio de Leibniz. La «velocidad de convergencia» de las sumas finitas es baja puesto que $|S - S_n| < 1/(n+1)$, lo que significa, por ejemplo, que para garantizar un error menor que $1/10000$ hay que sumar los 9999 primeros términos. El valor exacto de la suma de la serie, como veremos en la sección 7.7, es $\log 2$. De este modo podemos dar una aproximación decimal de $\log 2$, si bien nada confortable. En el ejercicio 4 mostramos otro procedimiento para obtener una aproximación decimal de $\log 2$ que requiere menos cálculos.

(2) El criterio de Leibniz también es aplicable a la serie alternada

$$\sum(-1)^n\frac{1}{n}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n$$

una vez que probemos que la sucesión

$$a_n := \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

es decreciente, ya que, obviamente,

$$\lim_n \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_n \frac{1}{n} \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0$$

El hecho de que la sucesión $(a_n)_n$ del último ejemplo es decreciente no es inmediato porque, aunque $(1/n)_n$ es una sucesión decreciente, en cambio la sucesión $((1+\frac{1}{n})^n)_n$ es creciente. El lector debe convencerse por sí mismo de que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Esta desigualdad puede demostrarse transformándola en otra equivalente que sea evidente o bien formulándola en términos funcionales y haciendo uso del cálculo diferencial.

7.7. Ejercicios

Resueltos

A lo largo del capítulo han ido apareciendo varios ejemplos en los que se analizaba la convergencia de una serie numérica o de una integral impropia. En este apartado de ejercicios resueltos nos ocuparemos únicamente de la utilización de la constante de Euler en el cálculo de la suma de ciertas series numéricas.

En el ejercicio 15 del capítulo 2 establecimos que si $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ entonces $x_n = H_n - \log n$ es una sucesión monótona decreciente acotada inferiormente por 0 y por tanto convergente cuyo límite recibe el nombre de constante de Euler γ. Así que $H_n = \log n + \gamma + \varepsilon_n$ siendo $\lim \varepsilon_n = 0$. Podemos dar ahora otra demostración de este hecho. Para ello basta considerar la función escalonada g que toma el valor $\frac{1}{n}$ en el intervalo $[n, n+1)$. Evidentemente se verifica que $f(x) = \frac{1}{x} \leq g(x)$ en $[0, \infty)$ y, por tanto $\log n < \log(n+1) = \int_1^{n+1} f \leq \int_1^n g = H_n$. Por otra parte la sucesión $H_n - \log n$ es monótona decreciente ya que

$$\begin{aligned}
(H_{n+1} - \log(n+1)) - (H_n - \log n + 1) &= \frac{1}{n+1} + \log(\frac{n}{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1} + \log(1 - \frac{1}{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(1-\xi)^2}\frac{1}{n^2} \\
&= -\frac{1}{2(1-\xi)^2}\frac{1}{n^2} < 0
\end{aligned}$$

como consecuencia de la fórmula de Taylor, y al estar acotada inferiormente por 0 es convergente..

Llamemos

$$P_{2n} := \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}H_n \quad \text{y}$$

$$I_{2n+1} := 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1} = H_{2n+1} - P_{2n} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n.$$

7.7.1 *Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ y calcular el valor de la suma.*

Solución: La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ es convergente (criterio de Leibniz) y $S_{2n+1} = I_{2n+1} - P_{2n} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - \frac{1}{2}H_n = \log(2n+1) + \gamma + \varepsilon_{2n+1} - \log n - \gamma - \varepsilon_n$ de donde la suma de la serie es $\log 2$. □

7.7.2 *Estudiar la convergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n+1)(n+2)}$$

y calcular su suma en caso de ser convergente.

SOLUCIÓN: La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n+1)(n+2)}$$
es absolutamente convergente pues el término general de la misma es equivalente a $3/n^2$. Para calcular su suma utilizaremos una descomposición en fracciones simples análoga a la utilizada para el cálculo de primitivas (v. la sección 6.2.1) y obtenemos que

$$\frac{3k-1}{k(k+1)(k+2)} = -\frac{7}{2\,(k+2)} + \frac{4}{k+1} - \frac{1}{2\,k}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{k(k+1)(k+2)} &= -\frac{7}{2}(H_{n+2} - 1 - \frac{1}{2}) + 4(H_{n+1} - 1) - \frac{1}{2}H_n \\ &= -\frac{7}{2}(\log(n+2) - 1 - \frac{1}{2} + \gamma + \varepsilon_{n+2}) \\ &+ 4(\log(n+1) - 1 + \gamma + \varepsilon_{n+1}) \\ &- \frac{1}{2}(\log n + \gamma + \varepsilon_n) \end{aligned}$$

y tras realizar las correspondientes simplificaciones se obtiene fácilmente que la suma de la series es $5/4 = \lim_n S_n$. □

Ejercicios propuestos

7.1) Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^{+\infty} \frac{xda}{e^x-1} \quad \int_{-1}^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^5+1}da \quad \int_0^{+\infty}(2+\operatorname{sen} x)da \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^5 x}{1+\cos x+\cosh x}$$

$$\int_0^1 \frac{da}{\sqrt[3]{x^2(1-x)^2}} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{da}{(1-\cos x)^\alpha} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}da \quad \int_0^1 x^a \log x da$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\cosh x}\, dx \quad \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^{3/4}}\, dx \quad \int_0^1 \frac{da}{\sqrt{x(1-x)}}$$

7.2) Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias, calculando aquellas que sean convergentes:

$$\int_2^{+\infty} e^{2x}(x^2+3x)da \quad \int_1^{+\infty} \frac{xda}{1+x^4} \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}da}{\sqrt{x}} \quad \text{Nota: } \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{da}{x^2} \quad \int_0^1 \frac{da}{x^2+2x-2}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx \quad \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\, dx \quad \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$$

Compruebe con MAXIMA, cuando sea posible, los resultados obtenidos.

7.3) Determine el área de la región situada entre las curvas

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+2)(x+3)(x+4)} \text{ y } g(x) = \frac{2}{x+1}$$

para $x \geq 2$.

Compruebe con Máxima el resultado obtenido.

7.4) Estudie el carácter de convergencia de las series

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{n\sqrt{n+2}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\cos n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n!)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{10^n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5...(2n-1)}{3.6.9...(3n)}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\log(1+\frac{1}{n})} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log n)^{1'01}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(2)...\log(n+1)}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^3\log(n+1)}$$

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\log n} \qquad \sum_{n\geq 2} \log(1+\tfrac{1}{n}) \qquad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\log n)^n}$$

$$\sum_{n\geq 1} \left(\log \frac{n+1}{n}\right)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n!)} \qquad \sum_{n\geq 1}(\sqrt[n]{n}-1)^n$$

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\log n)^p}, \quad p \in \mathbb{R} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{\log n}} \qquad \sum_{n\geq 1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$\sum_{n\geq 1}(1-\cos(1/n)) \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} \qquad \sum_{n\geq 1}(1-H_n^{-1})^{nH_n}{}^*$$

7.5) Analice la convergencia de la serie $\sum_n \frac{\log n!}{n}$.

7.6) Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie convergente de términos positivos. Si $(x_n)_n$ es una sucesión numérica tal que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

pruebe que $(x_n)_n$ es una sucesión convergente.

7.7) Pruebe la convergencia y calcule las sumas de las series telescópicas siguientes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}} \ .$$

7.8) Si la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. Pruebe que también convergen las series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} \sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^{2/3}}$.

7.9) **Criterio logarítmico.** Sea la serie $\sum a_n$ con $a_n > 0$. Supongamos que existe $\lim \frac{\log(1/a_n)}{\log n} = L$. Pruebe que:

a) Si $L > 1$ la serie converge.

b) Si $L < 1$ la serie converge.

7.10) Sabiendo que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} da = \frac{\pi}{2}$, demuestre, mediante un cambio de variable, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{x} da = \frac{\pi}{4}$.

Usando integración por partes, pruebe también que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} da = \frac{\pi}{2}.$$

Compruebe que Máxima también sabe hacer estas cuentas.

7.11) Determine la convergencia y convergencia absoluta de las siguientes integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t^{3/2}}\, dt \qquad \int_0^1 \frac{1}{t} \cos \frac{1}{t}\, dt$$

7.12) Calcule el valor de la integral siguiente:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

Verifique con Máxima el resultado.

* $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

7.13) Sea k un número real. Estudie la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{t^k - 1}{\log t}\, dt$$

según los valores de k.

7.14) Estudie la convergencia o divergencia de las series siguientes. En caso de que sean convergentes estudie si la convergencia es o no incondicional.

$$\sum_1^\infty (-1)^n \Big(1 - n \operatorname{sen} \tfrac{1}{n}\Big) \qquad \sum_1^\infty \tfrac{(-1)^n}{\log(1+\frac{1}{n})}$$

$$\sum_1^\infty (-1)^n \Big(1 - \cos \tfrac{1}{n}\Big) \quad \sum_1^\infty (-1)^n \Big(\tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\log n)\Big) \quad \sum_1^\infty (-1)^n \tfrac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}$$

$$\sum_1^\infty (-1)^n \Big(e - (1 + \tfrac{1}{n})^n\Big) \qquad \sum_1^\infty (-1)^{n-1} n^{-\alpha} \qquad \sum_1^\infty (-1)^n \tfrac{n^2}{1+n^2}$$

7.15) La serie que sigue es una reordenada de la serie armónica alternada en la que aparecen alternativamente tres términos positivos seguidos de dos negativos:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots$$

Demuestre que la serie converge y que su suma es $\log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{3}{2}$.