8

Series de potencias y funciones elementales

Competencias

- Saber calcular el radio de convergencia de una serie de potencias y conocer su significado.
- Saber aplicar técnicas formales manipulativas con series y el teorema de Abel para calcular sumas de series. Saber utilizar Maxima para ese fin.
- Conocer que las funciones elementales: exponencial, logaritmo, seno, coseno, arco tangente... son series de potencias. Y sacar partido de este hecho.
- Conocer la medida analítica de ángulos usando las funciones trigonométricas.
- Capacidad de entender la demostración analítica del teorema fundamental del Álgebra.

Contenidos

A lo largo de los capítulos anteriores se han utilizado las funciones elementales a través de sus propiedades. Progresivamente han ido siendo introducidas rigurosamente todas ellas, con la excepción de las funciones seno y coseno. En la última lección del curso le llega el turno a éstas.

El concepto de serie de potencias y de función expresable mediante serie de potencias es el colofón de la asignatura y una ocasión para poner en acción buena parte de los instrumentos que han ido apareciendo a lo largo del curso. Además constituye por sí mismo una noción importante que será estudiada con mayor profundidad en cursos superiores.

Para el objetivo que nos hemos marcado es innecesario realizar un estudio de las sucesiones y de las series de funciones y de la noción de convergencia uniforme, un concepto difícil para los estudiantes de primer curso en contextos generales. Nos basta con limitarnos a series de potencias. En ese caso todo es más fácil, incluso la convergencia uniforme (el criterio de Weierstrass de convergencia uniforme es todo lo que se necesita) que da soporte a los teoremas de permiten considerar los polinomios infinitos formalmente como si de polinomios finitos se tratase en cuanto a continuidad, derivabilidad e integrabilidad de la suma. Ello permite presentar las funciones elementales (seno y coseno, en particular) y la noción de longitud de arco (ángulo) desde un punto de vista analítico.

8.1. Series de potencias

En lo que sigue se considera que el cuerpo de escalares es indistintamente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ que denotaremos con $\mathbb{K}$.

Definición 8.1.1 *Una serie de potencias en torno a* $z_0 \in \mathbb{K}$ *es una expresión del tipo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

donde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión dada en* $\mathbb{K}$ *y* $z \in \mathbb{K}$.

Para cada valor de z se tiene una serie numérica en $\mathbb{K}$ que puede o no ser convergente. Para $z = z_0$ siempre lo es, y dependiendo de cual sea la sucesión $(a_n)_n$ puede que no haya otro valor diferente de z para el que la serie converja.

El análisis de la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-x_0)^n$ puede realizarse con ayuda del criterio de la raíz (proposición 7.2.8), o también del cociente, obteniéndose que si

$$\operatorname{lím\,sup} \sqrt[n]{|a_n|}|z-z_0| = |z-z_0| \operatorname{lím\,sup} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

la serie converge absolutamente. O dicho de otra manera, la serie converge absolutamente para todos los z que verifiquen

$$|z - z_0| < \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Lo cual motiva el concepto de *disco de convergencia* introducido a continuación.

Definición 8.1.2 *El valor*

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

se llama el radio de convergencia *de la serie dada, entendiendo que cuando se tenga* $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ *se toma* $R = \infty$*, mientras que si* $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ *se toma* $R = 0$*. La bola abierta con centro* z_0 *y radio* R *recibe el nombre de* disco de convergencia*.*

Para los valores z que satisfacen $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}|z - z_0| > 1$ el término general de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ no tiene límite cero (ya que para un conjunto infinito de valores de n se tiene $\sqrt[n]{|a_n|}|z - z_0| > 1$) y por tanto la serie no converge. Así pues la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge absolutamente si $|z - z_0| < R$ y no converge si $|z - z_0| > R$. Si $|z - z_0| = R$ puede suceder que la serie converja o que no converja.

Ejemplo 8.1.3 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

para $x \in \mathbb{R}$ tiene radio de convergencia 1 ya que

$$\lim_n \sqrt[n]{|(-1)^n 1/n|} = 1$$

Eso significa que la serie anterior define una función f con dominio «inicial» el intervalo $(-1, 1)$ a través de la fórmula

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}. \tag{8.1}$$

y que el dominio de f no puede contener ningún punto de $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Para conocer si los puntos frontera $x = \pm 1$ forman o no parte del dominio necesitamos saber si las series numéricas obtenidas al sustituir x por 1 y -1, respectivamente, son o no convergentes. Cuestiones éstas para las que podemos hacer uso de los conocimientos adquiridos en el capítulo anterior.

Para $x = 1$ la serie que hay que analizar es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

y el criterio de Leibniz 7.6.7 nos garantiza que converge. En cambio la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^n}{n} = -\sum^{\infty}\frac{1}{n}$$

es divergente, como vimos en el capítulo anterior. Resumiendo, el dominio de la función f es exactamente el intervalo $(-1, 1]$ y no puede ser extendido.

Tal vez se esté preguntando, pero ¿qué función es esa?, ¿cuál es su fórmula?, ¿cómo puedo conocer sus valores, dibujarla...? En este capítulo se pretende dar respuesta a cuestiones como esas, pero si lo piensa dos veces, ya puede ir dándose algunas respuestas. La «fórmula de f» es la que está escrita en la ecuación 8.1; si le parece rara una fórmula así, es por la falta de costumbre, porque la mayor parte de funciones —y desde luego aquellas a las que está habituado, como polinomios, exponenciales, logaritmos, raíces y funciones trigonométricas— son series de potencias. Calcular un valor, por ejemplo $f(1/2)$, es muy fácil puesto que es exactamente la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n n}$$

y si prefiere un número decimal, aproximado, para $f(1/2)$ puede sumar (manualmente o con una máquina) unos cuantos términos de la serie, es decir, calcular la suma S_n para el n que guste e incluso saber cual es el tamaño máximo del error cometido en dicha aproximación, ya que, de acuerdo con el teorema de Leibniz 7.6.7, si $n = 10$ el error máximo que se comete al tomar

$$S_{10} = \sum_{n=1}^{10}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n n}$$

es inferior a $1/(11 \times 2^{11}) < 5/10^5 < 0,0001$

Para z en $B(z_0, R)$ está definido el valor $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Las sumas parciales finitas son polinomios y, por tanto, funciones continuas e infinitamente derivables. Cabe preguntarse por las propiedades de la función f así definida. En lo que sigue veremos que se comportan «como si de sumas finitas se tratase». La razón de tal comportamiento tan satisfactorio proviene de que la convergencia es de un tipo especial llamado uniforme, que definiremos a continuación. Daremos la definición en un contexto más general que el de las series de potencias: las series de funciones.

Dada una sucesión de funciones $f_n : D_n \longrightarrow \mathbb{K}$, llamamos serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ a la función definida en cada punto $z \in D \subset D_n \subset \mathbb{K}$ mediante la suma de la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, que suponemos convergente en cada uno de los puntos $z \in D$. El conjunto D es el dominio de convergencia para la serie de funciones.

Una serie de potencias es el caso particular de una serie de funciones que se obtiene tomando $f_n = a_n(z - z_0)^n$. En este caso $D_n = \mathbb{K}$ y D, como hemos visto anteriormente, es un disco de $\mathbb{K}$, llamado disco de convergencia. Es costumbre, como ya hemos hecho anteriormente, representar en este caso la correspondiente serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ mediante $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Definición 8.1.4 (Convergencia uniforme) *Diremos que la serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en un conjunto A a una función f si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, cualquiera que sea $z \in A$, si $m \geq n_0$ se verifica*

$$|f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z)| < \varepsilon.$$

En el caso de las series de potencias A debe ser un subconjunto de $B(z_0, R)$. Con argumentos que ya hemos utilizado en otras ocasiones es fácil demostrar el resultado que sigue.

Proposición 8.1.5 (Criterio de Cauchy de convergencia uniforme) *Una serie de funciones es uniformemente convergente en A si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que cualquiera que sea $z \in A$ si $n_0 < p \leq q$ se verifica $|\sum_{n=p}^{q} f_n(z)| < \varepsilon$.*

Como consecuencia del criterio de Cauchy se obtiene otro criterio de convergencia uniforme que resulta muy útil.

Proposición 8.1.6 (Criterio de Weierstrass) *Sea la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Si existe una serie numérica de términos positivos $\sum b_n$ convergente tal que $|f_n(z)| \leq b_n$ para cada $z \in A$ y todo n, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en A.*

Demostración: Para cada $p \leq q$ se tiene la acotación

$$\sum_{p}^{q} |f_n(z)| \leq \sum_{p}^{q} b_n.$$

Dado $\varepsilon > 0$, por el criterio de Cauchy aplicado a la serie convergente $\sum b_n$, se tiene garantizada la existencia de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n_0 < p \leq q$ entonces $\sum_p^q b_n < \varepsilon$ y por tanto también se verifica que $\sum_p^q |f_n(z)| < \varepsilon$ si $n_0 < p \leq q$ para todo $z \in A$. Es decir la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ cumple la condición de Cauchy uniforme 8.1.5 y, en consecuencia, es uniformemente convergente. □

Una consecuencia inmediata del criterio de Weierstrass es

Corolario 8.1.7 *La serie de potencias $\sum a_n(z-z_0)^n$, con radio de convergencia R converge absoluta y uniformemente en la bola cerrada $B[z_0, r]$ para cada r que verifica $r < R$.*

En lo sucesivo, y por comodidad, consideraremos que $z_0 = 0$, si bien todos los resultados son ciertos sustituyendo en ellos z por $z - z_0$, pues en última instancia se trata únicamente de hacer una translación que lleva z_0 a 0.

El interés de la convergencia uniforme está ligado a que la función límite conserve ciertas propiedades de las funciones. Es decir, a tratar de conseguir que si las funciones que intervienen en la suma son continuas, o derivables, o integrables, la función suma obtenida sea también, respectivamente, o continua, o derivable o integrable. La proposición siguiente se ocupa del aspecto de la continuidad.

Proposición 8.1.8 *Sea una serie de funciones $\sum f_n$ que converge uniformemente a una función f en un conjunto A. Si las f_n son continuas en A, entonces también f es continua en A..*

Demostración: Veamos que f es continua en $y \in A$. Dado $\varepsilon > 0$, por la convergencia uniforme, existe n_0 tal que si $m \geq n_0$ se cumple

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{para todo } z \in A.$$

Tomamos $m = n_0$. Entonces la función $\sum_{n=0}^{m} f_n(z)$ es continua en y (al ser una suma finita de continuas), por lo que existe $\delta > 0$ tal que se cumple

$$\left| \sum_{n=0}^{m} f_n(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(y) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{siempre que } |z - y| < \delta.$$

Pero entonces, sumando y restando las expresiones $\sum_{n=0}^{m} f_n(z)$ y $\sum_{n=0}^{m} f_n(y)$ se tiene, como consecuencia de la desigualdad triangular que

$$\begin{aligned} |f(z) - f(y)| \leq & \left| f(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(z) \right| \\ & + \left| \sum_{n=0}^{m} f_n(z) - \sum_{n=0}^{m} f_n(y) \right| \\ & + \left| \sum_{n=0}^{m} f_n(y) - f(y) \right| \\ & < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto f es continua en y. □

El corolario 8.1.7 garantiza la continuidad de la función suma de una serie de potencias en cada punto de la bola $B(0, R)$ debido a que dicho punto se puede incluir dentro de una bola cerrada contenida en $B(0, R)$, con lo que la convergencia es uniforme en dicha bola cerrada y siendo los polinomios funciones continuas la función $f(z) = \sum a_n z^n$ es también continua en los puntos de dicha bola cerrada. Pero si para algún punto c del borde del disco $B(0, R)$ la serie converge, no hay, en principio razones que garanticen la continuidad en dicho punto de la función f. La siguiente resultado de Abel se ocupa del tema.

Proposición 8.1.9 (Criterio de Abel) *Sea $\sum a_n z^n$ una serie de potencias y supongamos que para $z = c$ la serie es convergente. Entonces la serie de potencias converge uniformemente en el segmento $[0, c]$.*

Demostración: Es claro que los puntos del segmento $[0, c]$ se expresan como $z = tc$ con $t \in [0, 1]$, de suerte que la convergencia uniforme de la serie $\sum a_n z^n$ cuando z varía en el segmento $[0, c]$ se traduce en la convergencia uniforme de la serie

$$\sum a_k t^k c^k \quad \text{para } t \in [0, 1].$$

Y para probar esta convergencia uniforme haremos uso de la condición de Cauchy uniforme establecida en la proposición 8.1.5.

Como la serie $\sum a_k c^k$ converge, aplicando la condición de Cauchy se tiene que dado ε existe n_0 tal que si $n > n_0$ es

$$\Big| \sum_{k=n}^{n+p} a_k c^k \Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $p \in \mathbb{N}$ y por tanto la serie $\sum_{k=n}^{\infty} a_k c^k$ converge siendo además

$$\Big| \sum_{k=n}^{\infty} a_k c^k \Big| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Si ponemos $R_n := \sum_{k=n}^{\infty} a_k c^k$ podemos escribir la fórmula

$$a_n c^n = R_n - R_{n+1} \quad \text{para todo } n$$

y como consecuencia para cada $n > n_0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\Big| \sum_{k=n}^{n+p} a_k t^k c^k \Big| &= |(R_n - R_{n+1})t^n + \cdots + (R_{n+p} - R_{n+p+1})t^{n+p}| \\
&= |R_n t^n + R_{n+1}(t^{n+1} - t^n) + \ldots \\
&+ R_{n+p}(t^{n+p} - t^{n+p-1}) - R_{n+p+1} t^{n+p}| \\
&\le \varepsilon(t^n + t^n - t^{n+p}) + \varepsilon t^{n+p} = 2\varepsilon t^n \le 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Esta estimación prueba que se cumple el criterio de Cauchy de convergencia uniforme de la proposición 8.1.5. □

A continuación vamos a ver que la función $f(z) = \sum a_n z^n$, en su disco de convergencia, es derivable e integrable y que la derivada o la integral se realiza formalmente como si de una suma finita se tratase.

Teorema 8.1.10 *Sea la serie de potencias $\sum a_n z^n$ y definimos la función f mediante $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ para $z \in B(0, R)$ siendo R el radio de convergencia de la serie. Entonces:*

(1) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ obtenida derivando formalmente la anterior tiene radio de convergencia R.

(2) Si escribimos $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$, para $z \in B(0,R)$, se verifica que g es precisamente la derivada de f.

Demostración: Como $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$ el lector puede comprobar que se verifica

$$\limsup_n \sqrt[n-1]{n|a_n|} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

y por tanto el radio de convergencia de la serie $\sum na_n z^{n-1}$ es también R. Esto prueba la primera parte.

Para la segunda parte, basta probar que fijado $z \in B(0,R)$ se tiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} = 0.$$

Supongamos $R_1 < R$ tal que $|z| < R_1$ y tomemos h tal que $|z+h| < R_1$. Para cada $m > 1$ se tiene entonces la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}\right| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}\right| \\
&\leq \left|\sum_{n=0}^{m} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - \sum_{n=1}^{m} na_n z^{n-1}\right| + \\
&\quad + \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h}\right| + \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} na_n z^{n-1}\right|
\end{aligned}$$

A continuación vamos a verificar, para finalizar la prueba, que es posible elegir m y $0 < \delta$ para que si $|h| < \delta$ cada uno de los tres últimos sumandos de la última acotación sea menor que $\varepsilon/3$.

En primer lugar, como la serie $\sum n|a_n|R_1^{n-1}$ es convergente existe $m \in \mathbb{N}$ de modo que $\sum_{n=m+1}^{\infty} na_n R_1^{n-1} < \varepsilon/3$ y, en particular,

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty} na_n z^{n-1}\right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} n|a_n|R_1^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De modo que, para una elección adecuada de m, el tercer sumando está acotado por $\varepsilon/3$.

Esta cota sirve también para el segundo sumando sin más que observar que, por la ecuación ciclotómica, se tiene

$$\left|\frac{(z+h)^n - z^n}{h}\right| = \left|(z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \cdots + z^{n-1}\right| \leq nR_1^{n-1}.$$

En cuanto al primer término, fijado m, basta observar que

$$\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = nz^{n-1}$$

y que el límite de la suma es la suma de los límites, para deducir que existe $\delta > 0$ de modo que dicho término está acotado por $\varepsilon/3$ si $|h| < \delta$. $\square$

Corolario 8.1.11 *Sea la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ cuyo radio de convergencia es R, entonces f es una función infinitamente derivable en el disco de convergencia y $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ para $n \geq 0$.*

Demostración: Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, haciendo $z = 0$ es claro que $a_0 = f(0)$. Por otra parte sabemos que $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ y por tanto $f'(0) = 1!a_1$. Por inducción es fácil probar que $f^{(n}(0) = n!a_n$. En consecuencia, los coeficientes de la serie de potencias están unívocamente determinados por la función f y sus derivadas en el origen; en particular la representación de una función en serie de potencias, caso de existir, es única. $\square$

También en relación con el cálculo de primitivas las series de potencias se comportan formalmente como los polinomios.

Proposición 8.1.12 *Sea la serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y sea R su radio de convergencia. Entonces la función F definida por la serie de potencias siguiente $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$ tiene de radio de convergencia R y es una primitiva de f; las demás primitivas de f se obtienen sumando una constante a F.*

Demostración: Es sencillo probar que $\limsup \sqrt[n+1]{\frac{1}{n+1}|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Basta ya aplicar el teorema 8.1.10 para obtener el resultado. $\square$

El teorema 8.1.10 y la proposición 8.1.12 junto con el criterio de Abel 8.1.9 constituyen instrumentos útiles para obtener la suma de ciertas series de potencias, como tendremos ocasión de ver en los ejemplos y ejercicios. La idea es sencilla, utilizando la derivación o integración término a término, se trata de obtener a partir de la serie de potencias dada alguna serie de potencias que sepamos sumar de forma explícita, para a partir de ella recorriendo en sentido inverso las manipulaciones realizadas sobre la serie original tratar de calcular su suma. En tales procesos es necesario reducirse al interior del disco o intervalo de convergencia; pero en el caso de los intervalos si la serie converge en alguno de los extremos del mismo, aplicando 8.1.9 y 8.1.8 se obtiene la continuidad, en dicho extremo, de la función que la serie define lo cual con frecuencia permite extender la fórmula obtenida para la suma en el interior también a los puntos frontera (a modo de ejemplo, véase el ejercicio 1).

Hasta ahora hemos estado considerando las propiedades de funciones que son definidas a través de una serie de potencias. Pero es natural preguntarse por la cuestión inversa: ¿cualquier función puede ser escrita como una serie de potencias? Evidentemente para que una función pueda ser representada como una serie de potencias es condición necesaria que la función sea infinitamente derivable, por lo que una formulación más precisa de la cuestión anterior es ¿cualquier función infinitamente derivable puede ser expresada como una serie de potencias?

Planteada con esa generalidad la pregunta tiene una respuesta negativa como vamos a ver. Sin embargo muchas de las funciones «habituales» sí pueden ser expresadas como una serie de potencias. Pero antes seguir adelante observemos que, por el corolario 8.1.11, la serie que, eventualmente, representase a una función infinitamente derivable f sería

$$f(x) \backsim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

para desarrollos en torno a 0 (cambiar por $f^{(n)}(x_0)$ y $(x - x_0)^n$ para desarrollos en torno al punto x_0), donde el signo $\backsim$ debe entenderse en el sentido de que es posible generar formalmente la serie a partir de f. Lo interesante es poder sustituir el signo $\backsim$ por el signo $=$. Ello comporta dos cuestiones: 1) que la serie converja 2) que el valor de la suma en cada punto x coincida con $f(x)$.

Veamos algunos ejemplos para entender mejor estas cuestiones.

Ejemplos 8.1.13

(1) La función $f(x) = e^x$ está definida en $\mathbb{R}$ y es infinitamente derivable siendo, de hecho, $f'(x) = e^x$. Por tanto

$$e^x \backsim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} x^n$ tiene radio de convergencia infinito, lo que significa que define una función, llamemósla g, cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$. La primera de las cuestiones antes planteadas tiene una respuesta satisfactoria: la serie converge. La respuesta a la segunda cuestión de si $e^x = g(x)$ depende de que para x fijo (pero arbitrario) se cumpla que

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k = e^x \Leftrightarrow \lim_n (e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k) = 0.$$

Pero por la fórmula de Taylor sabemos que

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} x^n$$

donde θ está entre 0 y x. Y escrito de ese modo es claro que

$$\lim_n \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^n = 0$$

y por tanto que $e^x = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) La función $f(x) = \log(1+x)$ tiene por dominio el intervalo $(-1, \infty)$. Además $f'(x) = 1/(1+x) = (1+x)^{-1}$ de donde resulta inmediato obtener (utilizando inducción) que $f(x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ y por ende

$$\log(1+x) \backsim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

El radio de convergencia de la serie es en este caso 1 y por tanto la serie sólo converge en $(-1, 1]$ (la convergencia en el punto 1 se sigue del teorema de Leibniz) definiendo en ese intervalo una función g continua. En este caso lo más que podemos esperar es que

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

para $x \in (-1, 1]$, lo cual, como en el ejemplo anterior, ocurre si y sólo si el resto n-ésimo $R_n(x)$ de la fórmula de Taylor de la función $\log(1+x)$ tiende a cero para cada $x \in (-1, 1)$. Pero eso es inmediato a partir de las siguientes estimaciones válidas para $x > 0$.

$$|R_n(x)| = |(-1)^{n-1} \frac{1}{n(1+\theta)^n} x^n| \leq \frac{1}{n}|x|^n < \frac{1}{n}.$$

(3) Por último consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se trata de una función par, no negativa y continua definida en todo $\mathbb{R}$ que sólo se anula en el origen. Es fácil comprobar que la primera derivada en $x \neq 0$ puede escribirse en la forma

$$f'(x) = e^{-1/x^2} 2x^{-3} = e^{-1/x^2} P_3(1/x)$$

siendo P_3 un polinomio de grado 3 y utilizando la regla de L'Hospital se obtiene

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2} P_3(1/x)}{1} = 0.$$

Por inducción es sencillo probar que la derivada n-ésima viene dada por

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} P_{3n}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En este caso

$$f(x) \backsim \sum_{n=0}^{\infty} 0\, x^n$$

siendo la serie de la derecha convergente para todo $x \in \mathbb{R}$, pero sin embargo la igualdad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 0\, x^n$$

únicamente es cierta para $x = 0$ a pesar de que el dominio de f es, como en el caso de la función que la serie define, todo $\mathbb{R}$.

MAXIMA puede realizar el desarrollo en serie de potencias de algunas funciones utilizando el comando `powerseries`. Pero conviene cotejar los resultados obtenidos con los correspondientes desarrollos limitados de Taylor.

8.2. Funciones elementales

Esta sección está destinada a probar que las funciones usuales del análisis: exponenciales, trigonométricas, hiperbólicas... son ejemplos de series de potencias.

8.2.1. Exponencial compleja y funciones trigonométricas

La función exponencial real e^x fue definida en la sección 2.5 y en el primero de los ejemplos 8.1.13 se probó que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Esto da pie a definir la función exponencial compleja mediante la fórmula siguiente

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n. \tag{8.2}$$

Es sencillo comprobar que el radio de convergencia de la serie anterior es infinito, y por tanto la serie converge absolutamente en $\mathbb{C}$. Siendo, además $(e^z)' = e^z$ como se puede comprobar derivando término a término.

Por otro lado se verifica

$$e^z e^w = e^{z+w} \quad \text{para cada } z, w \in \mathbb{C}$$

En efecto, cualquier producto de las correspondientes series es absolutamente convergente (proposición 7.5.2), en particular lo es el producto de Cauchy que proporciona

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = e^{z+w}. \tag{8.3}$$

Esta igualdad es clave para definir de forma analítica rigurosa las funciones trigonométricas y obtener las fórmulas de la trigonometría que el alumno conoce y que han sido utilizadas a lo largo del curso sin demostrar. Aunque hayamos empleado las funciones seno y coseno y las fórmulas de la trigonometría con anterioridad, lo hemos hecho sólo en los ejemplos y para ilustrar el significado de los teoremas: quédese tranquilo el lector porque no se produce ningún círculo vicioso, ninguna inconsistencia lógica con lo que ahora vamos a hacer. Sin embargo es saludable llamar la atención sobre el hecho de que todo lo relacionado con senos y cosenos a lo largo del curso, siendo cierto, tenía los pies de barro y no estaba bien fundamentado. Así, por ejemplo, la «demostración» de que la función seno tenía a la función coseno como su derivada se realizó utilizando un dibujo y apelando a la intuición.

(1) Como $e^0 = 1$ (utilizar la ecuación 8.2), si $x \in \mathbb{R}$ se tiene $e^x e^{-x} = 1$ como consecuencia de la ecuación 8.3, con lo que la función exponencial e^x no se anula, siendo, de hecho positiva, ya que para $x \geq 0$ lo es. En consecuencia su derivada es positiva y la función es estrictamente creciente, siendo $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ (estos resultados ya fueron probados en capítulos anteriores de forma diferente).

(2) Si $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, como consecuencia de la ecuación 8.3, se tiene

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} \tag{8.4}$$

(3) Como la aplicación $\tau : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $\tau(z) = \overline{z}$ es continua (¿por qué?), para cada $y \in \mathbb{R}$ tenemos

$$e^{-iy} = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-iy)^n}{n!} = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{(\overline{iy})^n}{n!} = \overline{e^{iy}}$$

y por tanto $|e^{iy}|^2 = e^{iy}\overline{e^{iy}} = 1$. Por otra parte, utilizando la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!}$ podemos escribir

$$\begin{aligned} e^{iy} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Se definen entonces las funciones seno y coseno por las fórmulas

$$\operatorname{sen} x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{8.5}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, puesto que el radio de convergencia de las series es infinito. En particular supuesto que $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ se obtiene la fórmula

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \tag{8.6}$$

y como $|e^{iy}|^2 = 1$ se tiene

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{8.7}$$

De la ecuación anterior se obtiene, en particular que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$.

A partir de las series de potencias que las definen y del teorema 8.1.10, sobre derivación término a término, se obtienen las derivadas de dichas funciones y que sen es una función impar, mientras que cos es una función par.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}' x &= \cos x & \qquad \cos' x &= -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen}(-x) &= -\operatorname{sen} x & \qquad \cos(-x) &= \cos x \end{aligned} \tag{8.8}$$

(4) De la fórmula $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ se deducen las siguientes

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ \operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \end{aligned} \tag{8.9}$$

Utilizando las ecuaciones 8.7 y 8.9 pueden obtenerse todas las fórmulas de la trigonometría.

8.2.2. Medida de ángulos

Para acabar este apartado vamos a definir π y la medida de ángulos, entroncando de ese modo con la significación geométrica conocida por el alumno de las nociones de seno y coseno.

Proposición 8.2.1 *El conjunto* $\{x > 0 : \cos x = 0\}$ *es no vacío, de hecho existe un primer elemento en dicho conjunto que se denota con* $\frac{\pi}{2}$. *Además las funciones* sen *y* cos *son* 2π *periódicas.*

Demostración: Como $\cos 0 = 1$ (usar la fórmula 8.5), por continuidad existe un número real $a > 0$ tal que $\cos x > 0$ en $[0, a]$. Si cos no se anulara en ningún punto de $[0, +\infty)$, la función sen sería estrictamente creciente en $[0, \infty)$ ya que cos es la derivada de la función seno. En particular, por el crecimiento estricto, debe ser $\operatorname{sen} a > 0$ pero entonces se llegaría (teniendo en cuenta que $|\cos x| \leq 1$) a que

$$(t-a)\operatorname{sen} a = \int_a^t \operatorname{sen} a \, dx \leq \int_a^t \operatorname{sen} x \, dx = \cos a - \cos t \leq 2, \quad \forall t > a$$

lo cual es absurdo.

Así pues el conjunto $A := \{x > 0 : \cos x = 0\}$ es no vacío y acotado inferiormente, pero su ínfimo, que denotamos con $\pi/2$, es un mínimo. En efecto, por la definición de ínfimo existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en A tal que $\lim_n x_n = \pi/2$ pero al ser cos una función continua $\cos(\pi/2) = \lim_n \cos x_n = 0$.

En consecuencia, como la función sen es estrictamente creciente en $[0, \pi/2]$ y $\operatorname{sen} 0 = 0$, se tiene que $\operatorname{sen}(\pi/2) > 0$ y por tanto usando (8.7) se tiene $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$.

Para probar la periodicidad observemos que

$$e^{it} = e^{i(t-\pi/2)} e^{i\frac{1}{2}\pi} = e^{i(t-\pi/2)} i$$

ya que

$$e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2) = 0 + i = i$$

y por tanto, para todo $t \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\cos t = -\operatorname{sen}(t - \pi/2), \qquad \operatorname{sen} t = \cos(t - \pi/2) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{8.10}$$

Utilizando las ecuaciones (8.10) y reiterando tenemos

$$\cos t = -\operatorname{sen}(t - \pi/2) = -\cos(t - \pi) = \cos(t - 2\pi).$$

Procediendo de forma análoga se comprueba que $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t - 2\pi)$. Obteniendo así la 2π periodicidad de las funciones sen y cos. □

Proposición 8.2.2 *La función $\psi : [0, 2\pi) \longrightarrow S$ definida por $\psi(t) = e^{it}$ es una biyección de $[0, 2\pi)$ sobre la circunferencia unidad S.*

Demostración: En primer lugar consideramos el intervalo $[0, \pi/2]$. Puesto que $\cos x > 0$ si $x \in [0, \pi/2)$ la función $\operatorname{sen} x$ es estrictamente creciente en $[0, \pi/2)$ y como $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$ la función es estrictamente creciente en $[0, \pi/2]$. En consecuencia la función cos es estrictamente decreciente debido a que $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. Estas propiedades permiten demostrar fácilmente que ψ es una biyección de $[0, \pi/2]$ sobre el primer cuadrante de la circunferencia unidad.

En efecto, para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que $\psi(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t \in S$ ya que $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. Es claro que $\psi(0) = (1, 0) = 1 + 0i$ y $\psi(\pi/2) = (0, 1) = 0 + i$. Cada punto (x, y) del primer cuadrante de S determina, mediante proyección, un único x que cumple $0 \leq x \leq 1$. En $[0, \pi/2)$ el coseno es positivo, luego el seno es estrictamente creciente, consiguientemente $\operatorname{sen} x > 0$ en $(0, \pi/2]$ lo cual conlleva que cos es estrictamente decreciente en $[0, \pi/2]$ (razonar con las derivadas). Así pues la función cos establece una biyección estrictamente decreciente entre $[0, \pi/2]$ y $[0, 1]$; o dicho de otra manera, a cada (x, y) en el primer cuadrante de S le corresponde un único $t \in [0, \pi/2]$ de modo que $\cos t = x$. Y puesto que $\operatorname{sen} t \geq 0$, $y \geq 0$ se tiene $\operatorname{sen} t = +\sqrt{1 - \cos^2 t} = +\sqrt{1 - x^2} = y$, es decir $\psi(t) = (x, y)$.

Utilizando las fórmulas (8.10) puede demostrarse, de forma similar, que ψ genera una biyección entre $[\pi/2, \pi]$ y el segundo cuadrante de la circunferencia, entre $[\pi, 3\pi/2]$ y el tercer cuadrante y entre $[3\pi/2, 2\pi]$ y el cuarto cuadrante, lo cual establece el resultado buscado. □

Precisar el concepto de ángulo excede el objetivo que perseguimos aquí, sin embargo en una primera aproximación podríamos pensarlo como la porción del plano delimitada por dos semirrectas con origen común; en realidad son dos las regiones así definidas pero, en la práctica, suele estar claro a cual de ellas nos estamos refiriendo. Medir un ángulo, como medir cualquier magnitud, es ponerlo en relación con algo que pueda ser elegido como unidad de medida. La unidad puede, en principio, ser elegida de forma arbitraria y en el caso de los ángulos una posible unidad «natural» por su sentido geométrico es el ángulo recto. Esta es una unidad demasiado grande y por ello suele subdividirse para conseguir unidades más pequeñas: las divisiones en 90 (grados sexagesimales) o 100 partes (grados centesimales) son usuales.

La proposición que acabamos de establecer corresponde a la *medida de ángulos* desde el punto de vista que interesa en Análisis Matemático: los ángulos se miden con la misma unidad utilizada para medir longitudes en la recta, lo cual requiere poder enrollar una parte de la recta (concretamente el intervalo $[0, 2\pi)$, como acabamos de ver) sobre la circunferencia de radio 1. Esto resulta idóneo para nuestros propósitos, por cuanto que los ángulos se identifican con sectores circulares del circulo unidad y la unidad de medida elegida está adaptada a los desarrollos analíticos. Revisando la demostración de la proposición 8.2.2 con este espíritu es posible descubrir en ella la presencia intangible del ángulo recto.

Introducido así, el número π está definido de forma precisa e inequívoca, pero... ¿cual es su valor, al menos aproximado? O dicho de otra manera, ¿cómo puede construirse una representación decimal finita para π. En el ejercicio 3 se mostrará que a pesar de su definición abstracta es posible dar respuesta a esa pregunta. Pero antes de eso vamos a obtener analíticamente algunas razones trigonométricas importantes y bien conocidas. Las primeras de ellas, que ya han aparecido, son

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 0 &= 0 \qquad \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \cos 0 &= 1 \qquad \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned} \tag{8.11}$$

Para $t \in [0, \pi/2]$ según hemos visto se cumple que $\operatorname{sen} t \geq 0$ y $\cos t \geq 0$. En particular, haciendo uso de las fórmulas 8.7 y 8.9, para $\pi/4$ obtenemos,

$$1 = \operatorname{sen} \pi/2 = \operatorname{sen} 2(\pi/4) = 2 \operatorname{sen} \pi/4 \cos \pi/4 = 2 \operatorname{sen} \pi/4 \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \pi/4}$$

y resolviendo la ecuación de segundo grado en $\operatorname{sen} \pi/4$, que tiene una única sólución positiva, encontramos las siguientes fórmulas

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{+\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4} \qquad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = 1. \tag{8.12}$$

Más fórmulas igualmente útiles y conocidas son

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t & \cos(\frac{\pi}{2} - t) = \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{+\sqrt{3}} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \end{array} \tag{8.13}$$

Las de la primera línea se obtienen sin más que utilizar las fórmulas 8.9 teniendo en cuenta que la función coseno es par y la seno impar. Para demostar las que aparecen en la segunda línea se utilizan las de la primera junto con 8.9 y 8.7. En efecto, $\cos \pi/6 = \operatorname{sen} \pi/3 = \operatorname{sen} 2\pi/6 = 2 \operatorname{sen} \pi/6 \cos \pi/6$ y simplificando $1 = 2 \operatorname{sen} \pi/6$ o sea $\operatorname{sen} \pi/6 = 1/2 = \cos \pi/3$. De donde $\cos \pi/6 = +\sqrt{1 - (1/2)^2} = 1/\sqrt{3} = \operatorname{sen} \pi/3$.

8.2.3. Representación geométrica de complejos

En el capítulo 1 sección 1.3.1 apelamos a los conocimientos que el alumno ha adquirido en la enseñanza media sobre las nociones de seno, coseno y ángulo desde una perspectiva geométrico-intuitiva para establecer una representación geométrica de los números complejos. La biyección que la proposición 8.2.2 establece y la definición analítica de las funciones seno y coseno permite asentar dichos conocimientos sobre bases más sólidas.

En efecto, para cada $z = a + bi \neq 0$ el complejo $z/|z|$ está situado en la circunferencia unidad S de $\mathbb{R}^2$ y por tanto, de acuerdo con la proposición 8.2.2 y la notación allí utilizada, existe un único $t \in [0, 2\pi)$, llamado *argumento principal* de z, tal que

$$\psi(t) = e^{it} = z/|z| = \cos t + i \operatorname{sen} t,$$

que puede escribirse como

$$z = |z|(\cos t + i \operatorname{sen} t) = |z|e^{it}. \tag{8.14}$$

Esta fórmula (salvo la parte final) es la misma que aparece en la sección 1.3.1. Debido a la 2π periodicidad de la función e^{it}, $t \in \mathbb{R}$, la fórmula anterior es cierta no sólo para $t \in [0, 2\pi)$ sino también para cada s de la forma $s = t + 2n\pi$ siendo $n \in \mathbb{Z}$ arbitrario; cada uno de tales valores s recibe el nombre de argumentos de z.

La identificación biyectiva entre $\mathbb{C}$ y el espacio vectorial real euclídeo de dimensión dos $\mathbb{R}^2$ $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(a + bi) = (a, b)$ da un sentido geométrico a la suma de complejos y al valor absoluto. El producto y el cociente de complejos también admite una interpretación geométrica sencilla utilizando la fórmula 8.14: el producto de dos complejos es un complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los correspondientes argumentos; lo mismo ocurre con el inverso de un complejo no nulo que pasa a poder visualizarse como un complejo que tiene por módulo el inverso del módulo y por argumento el opuesto del argumento del complejo dado, es decir,

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{it_1}|z_2|e^{it_2} = |z_1||z_2|e^{i(t_1+t_2)}; \qquad \frac{1}{z_1} = z_1^{-1} = |z_1|^{-1}e^{-it_1}$$

En particular se tiene

$$z^n = |z|^n e^{int} = |z|^n(\cos nt + i \operatorname{sen} nt) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}.$$

De nuevo la fórmula 8.14 permite dar una respuesta sencilla a la cuestión de existencia de raíces n-ésimas de complejos ya que $\sqrt[n]{z}$ representa al complejo, o complejos, w que verifiquen $w^n = z$, lo cual lleva a que $|w|^n = |z|$ y $n\alpha = \omega$ siendo α y ω argumentos de w y z, respectivamente. Llamando Ω al argumento principal de z se tiene que $\omega = \Omega + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$ y entonces existen n valores posibles para w que son

$$w = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\Omega+2k\pi}{n}} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Lo que acabamos de hacer puede ser formulado diciendo que fijado z el polinomio en w dado por $w^n - z = 0$ tiene n soluciones. Este resultado realmente es cierto para cualquier polinomio, como vamos a establecer en la próxima sección.

8.3. Teorema Fundamental del Álgebra

Uno de los resultados más célebres de las Matemáticas es el Teorema Fundamental del Álgebra que establece que cualquier polinomio en $\mathbb{C}$ de grado n tiene exactamente n raíces reales o complejas (iguales o diferentes) y por tanto, si z_1, z_2,... z_n son dichas raíces, se puede escribir en la forma

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_n)\ldots(z - z_n)$$

La parte más difícil es probar que tiene al menos una raíz, porque e, se tendría, reiterando, que

$$P_n(z) = (z - z_1)P_{n-1} = (z - z_1)(z - z_2)P_{n-2} = \cdots = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)a_n$$

Figura 8.1: Johann Carl Friedrich Gauss (Brunswick, 1777 – Göttingen 1855). Llamado el principe de los matemáticos, Gauss trabajó en diferentes campos de la física y las matemáticas: análisis, geometría diferencial, teoría de números, geodesia, magnetismo, optica y astronomía. Su trabajo ha tenido una enorme influencia en diferentes áreas. Biografía en MacTutor

siendo P_k un polinomio de grado k.

> A lo largo de la historia ha habido diferentes «pruebas» del Teorema Fundamental del Álgebra. Las dificultades para demostrar el resultado están relacionadas con las dificultades para comprender los complejos. Descartes decía en 1637 que es posible «imaginar» para cada ecuación de grado n, n raíces, pero tales raíces no se corresponden con ninguna cantidad real. Otros matemáticos de la talla de Leibniz, Euler, Lagrange, D'Alembert... son actores importantes en la historia del teorema. Pero es a Gauss a quien se le atribuye la primera prueba rigurosa, algo que Gauss nunca reivindicó. Hizo varias demostraciones, con técnicas diferentes, dos de ellas separadas entre sí 50 años. Más detalles en MacTutor

La demostración de que existe una raíz al menos se basa en el teorema de Weierstrass de existencia de mínimos en ciertas funciones continuas y un lema técnico que asegura que si un polinomio no se anula en un punto entonces hay valores cercanos a ese punto en los cuales el módulo del polinomio es más pequeño que el que toma en el punto. Comencemos probando el lema.

Lema 8.3.1 *Sea $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ un polinomio, y sea $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) \neq 0$. Entonces existen z_1, z_2 tales que $|f(z_1)| < |f(z_0)| < |f(z_2)|$*

Demostración: Sea $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$. Definimos

$$Q(z) := \frac{P(z+z_0)}{P(z_0)}.$$

Entonces Q es polinomio de grado n de la forma $Q(z) = 1 + b_m z^m + \cdots + b_n z^n$ siendo b_m el primer coeficiente no nulo de las potencias crecientes de z. $Q(0) = 1$ y se trata de probar que existen z_1 y z_2 tales que $|Q(z_1)| < 1$ y $|Q(z_2)| > 1$. Nos limitaremos a la primera desigualdad que es la que más nos interesa (la segunda es análoga y queda al cuidado del lector).

La idea básica es que para valores de z «pequeños» el valor de $|Q(z)|$ es esencialmente coincidente con el de $|1+b_m z^m|$ ya que $b_{m+1}z^{m+1}+\cdots+b_n z^n$ es despreciable frente a éste. Además para una elección de z en la forma $z=-\sqrt[m]{\overline{b_m}}t$ con $t>0$ se tiene que existe t_0 tal que si $0<t<t_0$ se tiene

$$|1+b_m z^m| = 1-|b_m|^2 t^m < 1$$

y por tanto se obtiene el resultado buscado.

Hecho con mayor detalle las cuentas son las que siguen. Tras hacer $z=-\sqrt[m]{\overline{b_m}}t$ nos queda algo de la forma siguiente para $0<t<t_0$ y cierto t_0 (¿quien es w?)

$$|Q(z)| = |1-|b_m|^2 t^m + w| \le 1-|b_m|^2 t^m + |w|$$

y como $|w|/t^m$ tiende a cero cuando t tiende a cero, podemos realizar una elección de $t<t_0$ de modo que $|w|/t^m < (1/2)|b_m|^2$ con lo que

$$|Q(z)| \le 1-|b_m|^2 t^m + (1/2)|b_m|^2 = 1-(1/2)|b_m|^2 t^m$$

que es justo lo que queríamos probar. □

Teorema 8.3.2 (fundamental del Álgebra) *Sea $P(z)$ un polinomio complejo no constante. Entonces existe $z_0\in\mathbb{C}$ tal que $P(z_0)=0$*

Demostración: $|P(z)|$ es una función continua en $\mathbb{C}$. Vamos a probar que dicha función alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{C}$ y que el valor de dicho mínimo es 0, lo cual demuestra el teorema.

Comencemos observando que $\lim_{|z|\to\infty}|P(z)|=\infty$. Para justificar esta afirmación observemos que si $P(z)=a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ con $a_n\neq 0$ entonces

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right| = |a_n|$$

por lo que, para todo $z\in\mathbb{C}$ con $|z|>R$ y cierto $R>0$ es

$$\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right| > \frac{|a_n|}{2}$$

y en consecuencia

$$|P(z)| = |z|^n\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right| > |z|^n\frac{|a_n|}{2}$$

De donde se sigue que $\lim_{|z|\to\infty}|P(z)|=\infty$ como queríamos probar.

Si $P(0)=0$ el teorema está probado. En otro caso, si $\alpha=|P(0)|>0$ existe (por la observación anterior) $r>0$ tal que si $|z|>r$ entonces $|P(z)|>\alpha$. Por el teorema de Weierstrass $|P|$ tiene un mínimo absoluto en el disco cerrado $B[0,r]$ y además dicho mínimo (menor o igual que α) es absoluto no sólo en el disco, sino también en $\mathbb{C}$, debido a que fuera del disco toma valores más grandes que α. Supongamos que dicho mínimo lo alcanza en un punto z_0 entonces $P(z_0)=0$ ya que si fuera $P(z_0)\neq 0$ se podría aplicar el lema para obtener una contradicción con la suposición de que z_0 es un mínimo absoluto para $|P|$. □

8.4. Ejercicios

Resueltos

8.4.1 *Calcule las sumas de las siguientes series:*

$$a)\quad x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\dots \qquad b)\quad \frac{x^3}{1\cdot 3}-\frac{x^5}{3\cdot 5}+\frac{x^7}{5\cdot 7}-\frac{x^9}{7\cdot 9}\dots$$

Solución: La primera operación a realizar es calcular el radio de convergencia de la serie para determinar el dominio de la función que define la correspondiente serie. El radio de convergencia viene dado por la fórmula

$$R=\frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

a) En el caso de la primera serie,

$$a_n=\begin{cases}1/n & \text{si } n \text{ es impar}\\ 0 & \text{si } n \text{ es par}\end{cases}$$

Observése que no existe $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$, ya que los términos pares tienen límite 0 mientras que los impares tienen límite 1. Afortunadamente la fórmula del radio de convergencia sólo requiere el límite superior, que siempre existe. Recordemos que el límite superior es el supremos de los puntos que sean límite de alguna subsucesión, y eso en este caso significa que $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}=1$. Por tanto el radio de convergencia es 1 y la serie a) define una función $f:(-1,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ que se nos pide determinar. Sabemos que f es continua y derivable en $(-1,1)$ viendo su derivada dada por la derivación término a término, es decir,

$$f'(x)=1+x^2-x^4+x^6+\cdots+(-1)^{n+1}x^{2n}+\cdots=1+g(x)$$

siendo

$$g(x):=x^2-x^4+x^6+\cdots+(-1)^{n+1}x^{2n}+\cdots=\frac{x^2}{1+x^2}$$

pues el cálculo de suma de la serie que define g es inmediato al tratarse de una serie geométrica de razón $-x^2$.

En consecuencia

$$f'(x)=2-\frac{1}{1+x^2}$$

y por tanto, mediante integración, obtenemos que

$$f(x)=2x-\operatorname{arctg}x+K,$$

siendo K una constante, cuyo valor es 0 ya que $f(0) = 0$ (sustituir en la serie correspondiente).

Para acabar analicemos el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo. Para $x = 1$ la convergencia de la serie está garantizada por el criterio de Leibniz. Y lo mismo ocurre para $x = -1$, pero, por otra parte, siendo la función f impar, esto también se obtiene como consecuencia de lo anterior. Así que el dominio de f es el intervalo $[-1, 1]$ siendo f continua en dicho intervalo como consecuencia del criterio de Abel 8.1.9 de convergencia en el borde. Resumiendo la serie de potencias es convergente si $x \in [-1, 1]$ y el valor de la suma es $2x - \operatorname{arctg} x$.

b) El radio de convergencia de la segunda serie es

$$\begin{aligned} R =& \frac{1}{\operatorname{lím\,sup}_n \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\operatorname{lím}_n \sqrt[2n+1]{\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}}} \\ =& \operatorname*{lím}_n \sqrt[2n+1]{(2n+1)} \cdot \operatorname*{lím}_n \sqrt[2n+1]{(2n-1)} = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Para ver que ambos límites valen 1 observemos que el primero de ellos es una subsucesión de $(\sqrt[n]{n})_n$ y sabemos que $\operatorname{lím}_n \sqrt[n]{n} = 1$; el segundo puede ser visto como una subsucesión de $(\sqrt[m]{m-2})_m$ y $\operatorname{lím}_m \sqrt[m]{m-2} = \operatorname{lím}_m \frac{m+1-2}{m-2} = 1$. La función

$$f(x) := \frac{x^3}{1 \cdot 3} - \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \frac{x^7}{5 \cdot 7} - \frac{x^9}{7 \cdot 9} \dots$$

está definida en $(-1, 1)$ y es derivable siendo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} \dots \\ &= x\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots\right) =: xg(x) \end{aligned}$$

La función g definida por

$$g(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots$$

también tiene radio de convergencia 1, como es fácil comprobar, y puede calcularse fácilmente derivando (para obtener una geométrica) e integrando sucesivamente como en el apartado anterior obteniendo que $g(x) = x/(1+x^2)$. Entonces

$$f'(x) = \frac{x^2}{1 + x^2} \Longrightarrow f(x) = x - \operatorname{arctg} x + C$$

siendo $C = 0$ porque $f(0) = 0$ (haciendo $x = 0$ en la serie que define f).

Siguiendo las pautas del apartado anterior es sencillo ver que $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$ para todo $x \in [-1, 1]$. □

MAXIMA puede ser de utilidad para realizar cálculos como los anteriores. Es sumamente conveniente cargar el paquete `simplify_sum` y hacer uso del comando del mismo nombre implementado en el paquete. También resulta de utilidad la variable booleana `simpsum`.

8.4.2 *Escriba el desarrollo de la función $f(x) = \frac{1}{2}\log^2(1+x)$ como serie de potencias de x y determine el intervalo de convergencia del desarrollo.*
Indicación: *calcule el desarrollo de f'.*

SOLUCIÓN: La derivada es $f'(x) = \dfrac{\log(1+x)}{1+x}$ siendo

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

El radio de convergencia de ambas series es 1. Así pues para cada $x \in (-1,1)$ es

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\Big)$$

debido a que ambas series son absolutamente convergentes en $[-x,x]$ y a la proposición 7.5.2.

El coeficiente de grado n de la serie producto es

$$c_n = \sum_{\substack{i+j=n\\1\le i\le n\\0\le j\le n}}(-1)^{i-1}\frac{1}{i}(-1)^j = \sum_{\substack{i+j=n\\1\le i\le n\\0\le j\le n}}(-1)^{n-1}\frac{1}{i} = (-1)^{n-1}\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{i} = (-1)^{n-1}H_n$$

Así $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}H_n x^n$ y por tanto

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{H_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Para calcular el radio de convergencia de esta serie hacemos

$$\limsup_n \sqrt[n]{\frac{H_{n-1}}{n}} = \lim_n \sqrt[n]{H_{n-1}} = \lim_n \frac{H_n}{H_{n-1}} = 1,$$

con lo que el radio de convergencia es 1. $\square$

8.4.3 *Dada la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

(1) Determine el radio de convergencia de la serie.

(2) Sea $f(x)$ el valor de la suma de la serie en los puntos en que converja. Analice justificadamente el dominio y la continuidad de f. Calcule $f(x)$.

(3) Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$

(4) Analice razonadamente la convergencia y convergencia absoluta de la serie siguiente

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}-\frac{1}{8\cdot 9\cdot 10}+\dots$$

Utilice el apartado anterior, entre otras cosas, para calcular la suma de esta serie.

Solución: El radio de convergencia de la serie viene dado por

$$\frac{1}{\operatorname{lím\,sup}_n \sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\operatorname{lím}_n \sqrt[2n-1]{1/(2n-1)}}=1$$

puesto que la sucesión anterior es una subsucesión de $\sqrt[n]{n}$ cuyo límite sabemos que es 1. Utilizando teoremas generales sabemos que la serie converge en cada punto de $(-1,1)$ y es una función continua e infinitamente derivable en ese intervalo, cuyas derivadas se calculan derivando formalmente término a término la serie propuesta. También converge en $x=1$ como consecuencia del teorema de Leibniz, porque la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$ es alternada y el valor absoluto del término general es una sucesión monótona decreciente. Para $x=-1$ se trata de

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(-1)^{2n}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n-1}$$

y con la misma argumentación anterior también es convergente. Por tanto el dominio de f es $[-1,1]$ además utilizando el teorema de Abel sobre convergencia en el borde, sabemos que f es continua no sólo en $(-1,1)$ sino en $[-1,1]$.

Para calcular f derivaremos formalmente la serie en un punto arbitrario $x\in(-1,1)$ obteniendo

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)\frac{x^{2n-2}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$$

por tratarse la última de una serie geométrica cuya suma sabemos calcular. Así pues f es una primitiva de $1/(1+x^2)$, es decir, $f(x)=\operatorname{arctg}x+C$. Para determinar C hemos de conocer el valor de f en algún punto; pero a partir de la serie que define f es inmediato que $f(0) = 0$, de modo que $C = 0$ y

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \text{ para cada } x \in (-1, 1).$$

Pero como f y arctg son ambas continuas en $[-1, 1]$ y, según acabamos de ver, coinciden en $(-1, 1)$ necesariamente coinciden también en $x = \pm 1$. En particular

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots = f(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Esta fórmula permite calcular aproximaciones decimales de π con la precisión deseada, ya que al tratarse de una serie alternada el criterio de Leibniz 7.6.7 determina que el error cometido al tomar una suma n-esima es inferior al valor absoluto del sumando inmediatamente posterior. Aunque teóricamente la cuestión de obtener valores aproximados para ese número π introducido de forma abstracta en 8.2.1 está zanjada, el cálculo de π con esta serie no es muy eficaz debido a que la convergencia es lenta.

Puesto que máxima puede hacer sumas finitas podemos obtener valores aproximados para π con bastante comodidad. Concretamente `sum ( (4*(-1)^(n+1))/(2*n-1), n,1,1000),numer;` proporciona el valor 3.14158265358972.
En cambio utilizando la serie (véase el ejercicio 11)

$$\pi = 16 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)239^{2n+1}}$$

que tiene una convergencia más rápida, el resultado para

```
sum ( (16*(-1)^n)/((2*n+1)*5^(2*n+1))
     - (4*(-1)^n)/((2*n+1)*239^(2*n+1)), n,0,4),numer;
```

es 3.141591772182178

La serie propuesta en el último apartado puede escribirse en la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k(2k+1)(2k+2)}$$

y el estudio de la convergencia absoluta de la misma equivale a estudiar la convergencia de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^3} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

que resulta ser convergente por tratarse de una armónica de orden 3.

Para hacer la suma realizaremos la descomposición en fracciones simples obteniendo (con unas sencillas cuentas) que

$$\frac{1}{2k(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{4k} - \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(2k+2)}.$$

Ahora podemos escribir la serie en la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k(2k+1)(2k+2)} =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\Big(\frac{1}{4k}-\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(2k+2)}\Big) =$$
$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k+1} =$$
$$\frac{1}{4}\log 2+\frac{\pi}{4}-1-\frac{1}{4}(\log 2-1)=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}$$

obteniendo así la suma buscada. □

8.4.4 *Desarrolle en serie de potencias la función* $f(x) = \log\frac{1+x}{1-x}$ *y pruebe que si* n *es un entero con* $n > 0$ *se tiene*

$$\log\frac{n+1}{n} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k+1}}$$

Utilizando dicha serie determine cuantos términos hay que tomar para obtener una aproximación del valor de $\log 2$ *con error inferior a* 10^{-3}*.*

¿Conoce otra serie para $\log 2$*? ¿Cuantos términos hay que tomar para obtener el mismo tamaño de error?*

Solución: Sabemos que si $|x| < 1$

$$\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Lo cual nos permite escribir el desarrollo de $\log(1-x) = \log(1+(-x))$ para $|x| < 1$ y, por tanto, el desarrollo de

$$\begin{aligned}\log\frac{1+x}{1-x} &= \log(1+x) - \log(1-x)\\ &= (x - x^2/2 + x^3/3 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \dots)\\ &- (-x - x^2/2 - x^3/3 + \cdots + -\frac{x^n}{n} + \dots)\\ &= 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + \cdots + 2\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots = 2\sum_{k\geq 0}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}.\end{aligned}$$

En particular la suma

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k+1}}$$

corresponde a hacer $x = \frac{1}{2n+1}$, que ciertamente cumple $|x| < 1$ siempre que $n \geq 1$. Por tanto la suma de esta serie es

$$\log \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \log \frac{n+1}{n}$$

En particular, tomando $n = 1$ se obtiene la fórmula

$$\log 2 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(3)^{2k+1}} \tag{8.15}$$

que permite calcular $\log 2$ de forma aproximada sumando un cierto número de términos. Otra fórmula para calcular $\log 2$, como ya sabemos, es

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \tag{8.16}$$

Para obtener una aproximación a $\log 2$ podemos sumar los primeros p términos en dichas series. El error que cometemos es, exactamente, $|\log 2 - S_p|$, que coincide con la suma $\sum_{n \geq p+1} a_n$. Si deseamos que el error sea menor que 10^3, podemos:

(1) Utilizar la fórmula (8.16): en cuyo caso al tratarse de una serie alternada sabemos (teorema de Leibniz) que el error cometido al sumar los primeros p términos es menor que el valor absoluto del término $p + 1$ y por consiguiente habremos de realizar ¡¡la suma de los 999 primeros términos!!

(2) Utilizar la fórmula (8.15): en cuyo caso para estimar el error cometido no nos sirve el teorema de Leibniz y tendremos que elegir p para que se tenga

$$2 \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(3)^{2k+1}} < 10^3$$

Pero la convergencia de la serie es muy rápida ahora

$$2 \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(1/3)^{2k+1}}{(2k+1)} < \frac{2}{(2p+1)} \sum_{k=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} = \frac{2}{(2p+1)} \frac{9}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^{2p+3}.$$

Definimos $R(p) := \frac{2}{(2p+1)} \frac{9}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^{2p+3}$.

Conseguir determinar un número entero positivo p tal que $R(p) < 10^{-3}$ puede hacerse fácilmente con ayuda de MAXIMA definiendo la función `R(p):=9/(4*(2*p+1)*3^(2*p+3));` y dando a p valores enteros crecientes hasta conseguir el objetivo. Pero ya `R(2)` nos proporciona $1/4860$. Así que $\log 2$ es aproximadamente `sum (2/((2*k+1)*3^(2*k+1)), k, 0, 2),numer;` cuyo valor según MAXIMA es 0.69300411522634 con error inferior a $1/1000$.

Realizadas de forma manual, la dificultad de las cuentas en uno y otro caso es muy significativa. □

Ejercicios propuestos

8.1) Determine el radio de convergencia de las series de potencias cuyo término general se señala a continuación.

$$\frac{n^a}{n!}x^n \qquad \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n \qquad \frac{k^n n!}{n^n}x^n \qquad \binom{a+n}{n}x^n$$
$$\log_a n x^n \quad h^{n^2}x^n \;\; 0<h<1 \quad \left(\frac{1.2.3....n}{3.5.7...(2n+1)}\right)^2 x^n \quad \frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n$$

MAXIMA puede serle de utilidad para abordar algunos de los ejercicios propuestos en esta sección. Trate de utilizarlo cuando sea posible..

8.2) Desarrolle en serie de potencias la función $\log(x+\sqrt{1+x^2})$, $\operatorname{arc\,tg} x$ y calcule el radio de convergencia de la serie obtenida.

Desarrolle en serie de potencias de $x-1$ la función $\frac{2x+3}{x+1}$

8.3) Estudie el dominio de convergencia y la suma de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n}}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}.$$

8.4) Estudie la convergencia y calcule las sumas de las series siguientes.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+2n+3}{n!}x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(3n^2-n+1)x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{nx^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

8.5) Determine el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$$

Sea $f(x)$ el valor de la suma de dicha serie. Demuestre que $f'(x)(1+x) = af(x)$ y determine $f(x)$.

8.6) Calcule las sumas de las siguientes series:

$$\text{a)}\quad \frac{1}{2}+\frac{x}{5}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{11}\dots \qquad \text{b)}\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^2}{3\cdot 4\cdot 5}+\dots$$

Indicación: Para el primero haga el cambio variable $x=t^3$

8.7) Sea la serie
$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}.$$

a) Determine el radio de convergencia de la serie

b) Sea $f(x)$ el valor de la suma de la serie en los puntos en que converja. Estudie el dominio de f y la continuidad. Calcule $f(x)$.

c) Deduzca la suma de la serie
$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}.$$

8.8) Es conocido que las calculadoras nos proporcionan el valor de ciertas funciones a través del cálculo interno de unos pocos términos de las series de potencias que las representan. Así, por ejemplo, podrían ofrecernos los valores de las funciones $\operatorname{arc\,tg} x$ o $\log(1+x)$ a través de sus representaciones:
$$\operatorname{arc\,tg} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\qquad \log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Sin embargo el radio de convergencia de dichas series es 1 y, por tanto, las representaciones dadas sólo tienen sentido en el intervalo $(-1,1)$ (incluyendo, quizás, alguno de los extremos). ¿Puede idear algún procedimiento por el cual sea posible evaluar aproximadamente dichas funciones en puntos que no estén en dicho intervalo?

8.9) Se considera la serie $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{3n+1}$.

a) Estudie la convergencia.

b) Pruebe que
$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{3n+1}=\int_0^1\frac{1}{1+x^3}\,dx.$$

c) Calcule el valor de la suma de la serie.

8.10) Sea la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$.

a) Discuta justificadamente la convergencia y convergencia absoluta de dicha serie.

b) Pruebe la siguiente igualdad
$$1+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}=\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx.$$

c) Calcule la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n+1}$.

8.11) El objetivo de este ejercicio es obtener la siguiente fórmula

$$\pi = 16 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} - 4 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)239^{2n+1}} \qquad (*)$$

para el cálculo aproximado del número π, que como sabemos es irracional[1].

a) Si $x = \operatorname{arctg}(1/5)$ compruebe que

$$\operatorname{tg} 2x = 5/12,\ \operatorname{tg} 4x = 120/119,\ \operatorname{tg}(4x - \frac{\pi}{4}) = 1/239$$

b) Si $y = 4x - \frac{\pi}{4}$ muestre que $0 < y < \frac{\pi}{2}$

c) Concluya que

$$\pi = 4(4x - y) = 16 \operatorname{arctg}(1/5) - 4 \operatorname{arctg}(1/239)$$

es decir, que la fórmula (*) es cierta.

d) Sean

$$S_k = 16 \sum_{n=0}^{k}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} \qquad S'_k = 4 \sum_{n=0}^{k}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)239^{2n+1}}$$

Utilice el teorema de Leibniz de acotación de error en una serie alternada para probar que

$$-\frac{3}{10^{12}} < \pi - (S_3 - S'_1) < \frac{1}{10^6}$$

y obtenga que $3,141592 < \pi < 3,141593$.

[1] Véase el ejercicio 6.5.5