Funciones continuas

José Manuel Mira

Grado en Matemáticas • 2009-2010

Índice

Objetivos

- Conocer el significado de continuidad y la continuidad de las funciones elementales y las obtenidas operando con ellas.

Objetivos

- Conocer el significado de continuidad y la continuidad de las funciones elementales y las obtenidas operando con ellas.
- Saber utilizar la continuidad para permutar límites y funciones.

Objetivos

- Conocer el significado de continuidad y la continuidad de las funciones elementales y las obtenidas operando con ellas.
- Saber utilizar la continuidad para permutar límites y funciones.
- Adquirir cierta habilidad para resolver problemas de existencia de puntos con propiedades especiales usando el teorema de Bolzano y la propiedad de los valores intermedios.

Objetivos

- Conocer el significado de continuidad y la continuidad de las funciones elementales y las obtenidas operando con ellas.
- Saber utilizar la continuidad para permutar límites y funciones.
- Adquirir cierta habilidad para resolver problemas de existencia de puntos con propiedades especiales usando el teorema de Bolzano y la propiedad de los valores intermedios.
- Conocer el teorema de Weierstrass sobre existencia de extremos absolutos.

Objetivos

- Conocer el significado de continuidad y la continuidad de las funciones elementales y las obtenidas operando con ellas.
- Saber utilizar la continuidad para permutar límites y funciones.
- Adquirir cierta habilidad para resolver problemas de existencia de puntos con propiedades especiales usando el teorema de Bolzano y la propiedad de los valores intermedios.
- Conocer el teorema de Weierstrass sobre existencia de extremos absolutos.
- Saber usar Maxima para dibujar y «visualizar» el límite de una función en un punto.

Objetivos

- Conocer el significado de continuidad y la continuidad de las funciones elementales y las obtenidas operando con ellas.
- Saber utilizar la continuidad para permutar límites y funciones.
- Adquirir cierta habilidad para resolver problemas de existencia de puntos con propiedades especiales usando el teorema de Bolzano y la propiedad de los valores intermedios.
- Conocer el teorema de Weierstrass sobre existencia de extremos absolutos.
- Saber usar Maxima para dibujar y «visualizar» el límite de una función en un punto.
- Ser capaz de conjeturar si una función es uniformemente continua a través de su gráfica.

Límite de una función en un punto

Definición

Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$. Se dice que L es el límite de f en c, y se escribe

$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in D$ si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Proposición

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $L = \lim_{x \to c} f(x)$.
2. *Para cada sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ tal que $\lim_n x_n = c$ y $x_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica $L = \lim_n f(x_n)$.*

Límite de una función en un punto

Proposición

Supongamos

$$L_1 = \lim_{x \to c} f(x) \in \mathbb{K}, \quad y \quad L_2 = \lim_{x \to c} g(x) \in \mathbb{K}.$$

Entonces:

1. *Existe* $\lim_{x\to c} f(x) + g(x)$ *y vale* $L_1 + L_2$.
2. *Existe* $\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x)$ *y vale* $L_1 \cdot L_2$
3. *Si* $L_2 \neq 0$ *existe* $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *y vale* $\dfrac{L_1}{L_2}$.

Función continua en un punto

Definición

Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ *y sea* $c \in D$. *Se dice que* f *es continua en* $c \in D$ *si para* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $|x - c| < \delta$ *entonces* $|f(x) - f(c)| < \epsilon$.

Proposición

Sean f, g *funciones de* $D \subset \mathbb{K}$ *en* $\mathbb{K}$ *continuas en un punto* $c \in D$.

1. *Las función* $f + g$ *y* fg *son continuas en* c.
2. *Si* g *no se anula en* D *entonces* f/g *es continua en* c.

Proposición

Sea $f_1 : D_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ *una función continua en* $c \in D_1$ *y sea* $f_2 : D_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ *tal que* $f_1(D_1) \subset D_2$ *continua en* $f_1(c)$. *Entonces* $f_2 \circ f_1$ *es continua en* c.

Funciones continuas en un intervalo

Definición

Una función $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ se dice que es continua en D si es continua en cada punto de D.

Teorema (Weierstrass)

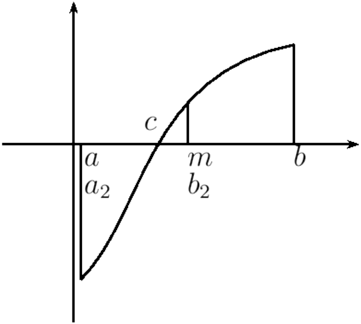
Sea $f : B \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, siendo B un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ o una bola cerrada y acotada de $\mathbb{C}$. Entonces:

1. *f es una función acotada.*
2. *Existen $c, d \in B$ tales que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$, es decir, f alcanza sus valores máximo y mínimo en su dominio.*

Funciones continuas en un intervalo

Teorema (Bolzano)

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua tal que* $f(a)f(b) < 0$*.*
Entonces existe $c \in (a, b)$ *de modo que* $f(c) = 0$*.*



Funciones continuas en un intervalo

Teorema (Bolzano)

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua tal que* $f(a)f(b) < 0$. *Entonces existe* $c \in (a, b)$ *de modo que* $f(c) = 0$.

Corolario (Propiedad de los valores intermedios)

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua y* z *está comprendido entre* $f(a)$ *y* $f(b)$, *entonces existe* $c \in [a, b]$ *tal que* $f(c) = z$.

Funciones continuas en un intervalo

Teorema (Bolzano)

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua tal que* $f(a)f(b) < 0$*. Entonces existe* $c \in (a, b)$ *de modo que* $f(c) = 0$*.*

Corolario (Propiedad de los valores intermedios)

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua y* z *está comprendido entre* $f(a)$ *y* $f(b)$*, entonces existe* $c \in [a, b]$ *tal que* $f(c) = z$*.*

Teorema (Función inversa)

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua donde* I *es un intervalo de* $\mathbb{R}$*. Entonces*

1. $f(I)$ *es un intervalo.*
2. f *es inyectiva si y sólo si es estrictamente monótona.*
3. *Si* f *es estrictamente monótona, también lo es su inversa* f^{-1}

Funciones continuas en un intervalo

Definición

Se dice que la función $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ es uniformemente continua (en D) si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $x, y \in D$ arbitrarios, si se verifica $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

La función $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

1. $f(x) = x$ es uniformemente continua.
   También lo son $f(x) = x^2$ y $f(x) = x \cos 1/x$
2. $f(x) = 1/x$ no es uniformemente continua.
   Tampoco lo es $f(x) = \cos 1/x$

Teorema (Heine)

Toda función continua definida en una bola cerrada y acotada $B[a, r]$ y con valores en $\mathbb{K}$ es uniformemente continua.

J. M. Mira; B. Cascales y S. Sánchez-Pedreño
http://ocw.um.es/ciencias/analisis-matematico-i