Introducción a los números reales

Grado en Matemáticas
Curso 2009-2010

Índice

Conjuntos numéricos

- Los nombres de los conjuntos numéricos

Conjuntos numéricos

- Los nombres de los conjuntos numéricos
  - **Naturales** representados con $\mathbb{N}$
    0,1,2,3,4,. . .

Conjuntos numéricos

- Los nombres de los conjuntos numéricos
  - **Naturales** representados con $\mathbb{N}$
    0,1,2,3,4,. . .
  - **Enteros** representados con $\mathbb{Z}$
    0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4. . .

Conjuntos numéricos

- Los nombres de los conjuntos numéricos
  - **Naturales** representados con $\mathbb{N}$
    0,1,2,3,4,. . .
  - **Enteros** representados con $\mathbb{Z}$
    0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4. . .
  - **Racionales** representados con $\mathbb{Q}$
    los cocientes p/q donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$.

Conjuntos numéricos

- Los nombres de los conjuntos numéricos
  - **Naturales** representados con $\mathbb{N}$
    0,1,2,3,4,. . .
  - **Enteros** representados con $\mathbb{Z}$
    0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4. . .
  - **Racionales** representados con $\mathbb{Q}$
    los cocientes p/q donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$.
  - **Reales** representados con $\mathbb{R}$
    son los más complicados y hay varias formas de definirlos
    se corresponden con los «decimales infinitos»
    1,065123123123..., 3,141592653589793...,
    -1,414213562373095

Conjuntos numéricos

- Los nombres de los conjuntos numéricos
  - **Naturales** representados con $\mathbb{N}$
    0,1,2,3,4,...
  - **Enteros** representados con $\mathbb{Z}$
    0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4...
  - **Racionales** representados con $\mathbb{Q}$
    los cocientes p/q donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$.
  - **Reales** representados con $\mathbb{R}$
    son los más complicados y hay varias formas de definirlos
    se corresponden con los «decimales infinitos»
    1,065123123123..., 3,141592653589793...,
    -1,414213562373095
  - **Complejos** representados con $\mathbb{C}$
    son de la forma $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y la i es un símbolo

Conjuntos numéricos

- Los nombres de los conjuntos numéricos
  - **Naturales** representados con $\mathbb{N}$
    0,1,2,3,4,...
  - **Enteros** representados con $\mathbb{Z}$
    0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4...
  - **Racionales** representados con $\mathbb{Q}$
    los cocientes p/q donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$.
  - **Reales** representados con $\mathbb{R}$
    son los más complicados y hay varias formas de definirlos
    se corresponden con los «decimales infinitos»
    1,065123123123..., 3,141592653589793...,
    -1,414213562373095
  - **Complejos** representados con $\mathbb{C}$
    son de la forma $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ y la i es un símbolo
  - En la lista anterior cada conjunto incluye a los que le preceden (eventualmente, mediante identificaciones adecuadas de los elementos)

Las cuatro operaciones

- En cada conjuntos pueden realizarse las cuatro operaciones: sumar, restar, multiplicar y dividir. Son operaciones binarias: a partir de una pareja de elementos del conjunto generan un nuevo elemento en el conjunto.

Las cuatro operaciones

- En cada conjuntos pueden realizarse las cuatro operaciones: sumar, restar, multiplicar y dividir. Son operaciones binarias: a partir de una pareja de elementos del conjunto generan un nuevo elemento en el conjunto.
- No todas pueden realizarse para cualquier pareja de elementos

Las cuatro operaciones

- En cada conjuntos pueden realizarse las cuatro operaciones: sumar, restar, multiplicar y dividir. Son operaciones binarias: a partir de una pareja de elementos del conjunto generan un nuevo elemento en el conjunto.
- No todas pueden realizarse para cualquier pareja de elementos

- La **suma** siempre es posible.

Las cuatro operaciones

- En cada conjuntos pueden realizarse las cuatro operaciones: sumar, restar, multiplicar y dividir. Son operaciones binarias: a partir de una pareja de elementos del conjunto generan un nuevo elemento en el conjunto.
- No todas pueden realizarse para cualquier pareja de elementos

- La **suma** siempre es posible.
- En $\mathbb{N}$ la **resta** no puede hacerse para todas las parejas. En $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ siempre es posible.

Las cuatro operaciones

- En cada conjuntos pueden realizarse las cuatro operaciones: sumar, restar, multiplicar y dividir. Son operaciones binarias: a partir de una pareja de elementos del conjunto generan un nuevo elemento en el conjunto.
- No todas pueden realizarse para cualquier pareja de elementos

- La **suma** siempre es posible.
- En $\mathbb{N}$ la **resta** no puede hacerse para todas las parejas. En $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ siempre es posible.
- La resta es la «operación inversa» de la suma: $a + x = b$.

Las cuatro operaciones

- En cada conjuntos pueden realizarse las cuatro operaciones: sumar, restar, multiplicar y dividir. Son operaciones binarias: a partir de una pareja de elementos del conjunto generan un nuevo elemento en el conjunto.
- No todas pueden realizarse para cualquier pareja de elementos

- La **suma** siempre es posible.
- En $\mathbb{N}$ la **resta** no puede hacerse para todas las parejas. En $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ siempre es posible.
- La resta es la «operación inversa» de la suma: $a + x = b$.

- El **producto** siempre es posible.

Las cuatro operaciones

- En cada conjuntos pueden realizarse las cuatro operaciones: sumar, restar, multiplicar y dividir. Son operaciones binarias: a partir de una pareja de elementos del conjunto generan un nuevo elemento en el conjunto.
- No todas pueden realizarse para cualquier pareja de elementos

- La **suma** siempre es posible.
- En $\mathbb{N}$ la **resta** no puede hacerse para todas las parejas. En $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ siempre es posible.
- La resta es la «operación inversa» de la suma: $a + x = b$.

- El **producto** siempre es posible.
- En $\mathbb{Z}$ el **cociente** puede hacerse ciertas parejas. En $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ siempre es posible.

Las cuatro operaciones

- En cada conjuntos pueden realizarse las cuatro operaciones: sumar, restar, multiplicar y dividir. Son operaciones binarias: a partir de una pareja de elementos del conjunto generan un nuevo elemento en el conjunto.
- No todas pueden realizarse para cualquier pareja de elementos

- La **suma** siempre es posible.
- En $\mathbb{N}$ la **resta** no puede hacerse para todas las parejas. En $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ siempre es posible.
- La resta es la «operación inversa» de la suma: $a + x = b$.

- El **producto** siempre es posible.
- En $\mathbb{Z}$ el **cociente** puede hacerse ciertas parejas. En $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ siempre es posible.
- Cociente es la «operación inversa» del producto: $ax = b$.

Propiedades de suma y producto

Conmutativa	$a+b=b+a, \qquad a\times b=b\times a$
Asociativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$, $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$
Distributiva	$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$
Neutros	suma: el 0 pues $a+0=a$, producto: el 1 pues $a\times 1=a$
Simétricos	suma: simétrico de a es $-a$ pues $a+(-a)=0$, producto: simétrico de $a\neq 0$ es $1/a$ pues $a\times(1/a)=1$

En adelante escribiremos ab en lugar de $a\times b$.

- En $\mathbb{C}$ se opera formalmente como en $\mathbb{R}$ y polinomios arbitrarios en el símbolo i con el convenio de que $i^2=-1$

La matemática es una ciencia deductiva

- En las ciencias inductivas el corpus de la teoría se construye a partir de la sistematización de fenómenos aislados, buscando leyes que expliquen los fenómenos que se analizan y que permitan hacer predicciones sobre esos mismos fenómenos. Sus conclusiones pueden variar con el tiempo.

La matemática es una ciencia deductiva

- En las ciencias inductivas el corpus de la teoría se construye a partir de la sistematización de fenómenos aislados, buscando leyes que expliquen los fenómenos que se analizan y que permitan hacer predicciones sobre esos mismos fenómenos. Sus conclusiones pueden variar con el tiempo.
- Las matemáticas son deductivas: parten de unos axiomas precisos y construyen sobre ellos, respetando ciertas leyes o reglas de juego, conocimiento intemporal. El punto de partida puede inspirarse en la realidad física o mental, pero a partir de ahí inicia el vuelo libremente, despojándose de lo accesorio, creando nuevos conocimientos a través de los «teoremas».

La matemática es una ciencia deductiva

- En las ciencias inductivas el corpus de la teoría se construye a partir de la sistematización de fenómenos aislados, buscando leyes que expliquen los fenómenos que se analizan y que permitan hacer predicciones sobre esos mismos fenómenos. Sus conclusiones pueden variar con el tiempo.
- Las matemáticas son deductivas: parten de unos axiomas precisos y construyen sobre ellos, respetando ciertas leyes o reglas de juego, conocimiento intemporal. El punto de partida puede inspirarse en la realidad física o mental, pero a partir de ahí inicia el vuelo libremente, despojándose de lo accesorio, creando nuevos conocimientos a través de los «teoremas».
- Los axiomas de partida pueden ser diferentes. Y consecuentemente diferentes pueden ser también los teoremas de ellos deducidos. Pero incluso se puede tomar como axioma lo que en otras construcciones es un teorema.

La matemática es una ciencia deductiva

- El conocimiento no se basa en la experiencia, que puede ser engañosa.

- Se basa en los «teoremas» que crean conocimiento seguro, no discutible.

La matemática es una ciencia deductiva

- El conocimiento no se basa en la experiencia, que puede ser engañosa.
  - Los números de la forma $n^2 - n + 17$ al variar $n \in \mathbb{N}$ son primos.
- Se basa en los «teoremas» que crean conocimiento seguro, no discutible.

La matemática es una ciencia deductiva

- El conocimiento no se basa en la experiencia, que puede ser engañosa.
  - Los números de la forma $n^2 - n + 17$ al variar $n \in \mathbb{N}$ son primos.
  - Si n es primo entonces $2^n - 1$ también es primo
- Se basa en los «teoremas» que crean conocimiento seguro, no discutible.

La matemática es una ciencia deductiva

- El conocimiento no se basa en la experiencia, que puede ser engañosa.
    - Los números de la forma $n^2 - n + 17$ al variar $n \in \mathbb{N}$ son primos.
    - Si n es primo entonces $2^n - 1$ también es primo
- Se basa en los «teoremas» que crean conocimiento seguro, no discutible.
    - Si n es par entonces n^2 también es par

La matemática es una ciencia deductiva

- El conocimiento no se basa en la experiencia, que puede ser engañosa.
  - Los números de la forma $n^2 - n + 17$ al variar $n \in \mathbb{N}$ son primos.
  - Si n es primo entonces $2^n - 1$ también es primo
- Se basa en los «teoremas» que crean conocimiento seguro, no discutible.
  - Si n es par entonces n^2 también es par
  - Si n es compuesto entonces $2^n - 1$ también es compuesto

La matemática es una ciencia deductiva

- El conocimiento no se basa en la experiencia, que puede ser engañosa.
  - Los números de la forma $n^2 - n + 17$ al variar $n \in \mathbb{N}$ son primos.
  - Si n es primo entonces $2^n - 1$ también es primo
  - Todo número par es suma de dos primos
- Se basa en los «teoremas» que crean conocimiento seguro, no discutible.
  - Si n es par entonces n^2 también es par
  - Si n es compuesto entonces $2^n - 1$ también es compuesto

Teoremas y demostraciones

- El conocimiento se desarrolla con los teoremas.

Teoremas y demostraciones

- El conocimiento se desarrolla con los teoremas.
- Los teoremas se basan en las «verdades» aceptadas en los axiomas o en teoremas anteriormente demostrados a partir de los axiomas. Es la cadena del conocimiento matemático.

Teoremas y demostraciones

- El conocimiento se desarrolla con los teoremas.
- Los teoremas se basan en las «verdades» aceptadas en los axiomas o en teoremas anteriormente demostrados a partir de los axiomas. Es la cadena del conocimiento matemático.

En un teorema hay tres elementos

Hipótesis Es un enunciado que se asume como cierto

Teoremas y demostraciones

- El conocimiento se desarrolla con los teoremas.
- Los teoremas se basan en las «verdades» aceptadas en los axiomas o en teoremas anteriormente demostrados a partir de los axiomas. Es la cadena del conocimiento matemático.

En un teorema hay tres elementos

Hipótesis Es un enunciado que se asume como cierto

Tesis Es un enunciado cuya certeza se desconoce, pero se sospecha como cierto

Teoremas y demostraciones

- El conocimiento se desarrolla con los teoremas.
- Los teoremas se basan en las «verdades» aceptadas en los axiomas o en teoremas anteriormente demostrados a partir de los axiomas. Es la cadena del conocimiento matemático.

En un teorema hay tres elementos

Hipótesis Es un enunciado que se asume como cierto

Tesis Es un enunciado cuya certeza se desconoce, pero se sospecha como cierto

Demostración Es el proceso que permite obtener la certeza de la tesis a partir de la certeza de la hipótesis. Para realizarlo se hace uso de los axiomas o de otros teoremas anteriormente establecidos.

Métodos de demostración

Directo. $H \Rightarrow T$. **Ejemplo:** Si n es par entonces n^2 es par.

Métodos de demostración

Directo. $H \Rightarrow T$. **Ejemplo:** Si n es par entonces n^2 es par.

Recíproco. El de $H \Rightarrow T$ es $T \Rightarrow H$. **Recíproco del ejemplo precedente:** Si n^2 es par entonces n es par.

Métodos de demostración

Directo. $H \Rightarrow T$. **Ejemplo:** Si n es par entonces n^2 es par.

Recíproco. El de $H \Rightarrow T$ es $T \Rightarrow H$. **Recíproco del ejemplo precedente:** Si n^2 es par entonces n es par.

Contrarecíproco. $H \Rightarrow T$ es equivalente a no$T \Rightarrow$ no$H$. **Ejemplo:** Si $a \in \mathbb{R}$ es un número irracional entonces $\sqrt{a}$ también es irracional.

Métodos de demostración

Directo. $H \Rightarrow T$. **Ejemplo:** Si n es par entonces n^2 es par.

Recíproco. El de $H \Rightarrow T$ es $T \Rightarrow H$. **Recíproco del ejemplo precedente:** Si n^2 es par entonces n es par.

Contrarecíproco. $H \Rightarrow T$ es equivalente a no$T \Rightarrow$ no$H$ **Ejemplo:** Si $a \in \mathbb{R}$ es un número irracional entonces $\sqrt{a}$ también es irracional.

Reducción al absurdo. Para probar la veracidad de una proposición A, consiste en suponer no$A$ y construir una proposición C de modo que C y no$C$ son ciertas. **Ejemplo:** $\sqrt{2}$ es irracional.

El axioma de los números reales

Axioma

Existe un cuerpo totalmente ordenado y completo que recibe el nombre de cuerpo de los números reales y se denota por $\mathbb{R}$.

El axioma de los números reales

Axioma

Existe un cuerpo totalmente ordenado y completo que recibe el nombre de cuerpo de los números reales y se denota por $\mathbb{R}$.

Cuerpo: dos operaciones internas en $\mathbb{R}$ la suma y el producto:

1. Asociativa: $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x(yz) = (xy)z$
2. Conmutativa: $x + y = y + x, \quad xy = yx$
3. Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
4. $\forall x \in \mathbb{R}$ existe $x' \in \mathbb{R}$ tal que $x + x' = 0$. Notación $x' = -x$
5. Existe $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$ tal que $1x = x$
6. $\forall x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ existe $x'' \in \mathbb{R}$ tal que $xx'' = 1$.
   Notación $x'' = x^{-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
7. Distributiva $(x + y)z = xz + yz$.

El axioma de los números reales

Axioma

Existe un cuerpo totalmente ordenado y completo que recibe el nombre de cuerpo de los números reales y se denota por $\mathbb{R}$.

Totalmente ordenado significa que existe una relación binaria en $\mathbb{R}$ denotada con $\leq$ que cumple

1. Reflexiva: $x \leq x$
2. Antisimétrica: si $x \leq y$ y también $y \leq x$, entonces $x = y$
3. Transitiva: si $x \leq y$ y también $y \leq z$, entonces $x \leq z$
4. Para cada pareja $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple $x \leq y$ o bien $y \leq x$
5. Si $x \leq y$ entonces $x + z \leq y + z$ para todo $z \in \mathbb{R}$
6. Si $x \leq y$ entonces $xz \leq yz$ siempre que $0 < z$ ($0 \leq z$ y $z \neq 0$)

El axioma de los números reales

Axioma

Existe un cuerpo totalmente ordenado y completo que recibe el nombre de cuerpo de los números reales y se denota por $\mathbb{R}$.

Completo significa que todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente y no vacío tiene supremo.

- A si dice que está *acotado superiormente* si existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq b, \forall a \in A$
- $\alpha \in \mathbb{R}$ se dice *supremo* de A si $a \leq \alpha, \forall a \in A$ y cualquier otro $b \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que $a \leq b, \forall a \in A$ necesariamente cumple que $\alpha \leq b$.

Teorema

En $\mathbb{R}$ se verifican las siguientes propiedades:

1. *Los elementos neutros son únicos.*
2. *Las fórmulas $a = b$ y $a - b = 0$ son equivalentes.*
   Si $b \neq 0$ también lo son $a = b$ y $a\frac{1}{b} = 1$.
3. *$c < 0$ equivale a $-c > 0$.*
4. *$a0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$.*
5. *$(-1)a = -a$ y por tanto $(-a)b = -(ab)$.*
6. *Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.*
7. *$a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$.*
8. *Si $c < 0$ entonces $a \leq b$ y $ac \geq bc$ son equivalentes.*
9. *Si $a \neq 0$ entonces $aa > 0$; en particular $1 > 0$.*
10. *$a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$. Si $b > 0$ entonces $a \geq b \Rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.*

Definición

Un subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ se dice acotado inferiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \leq a$ para todo $a \in A$. Cualquier valor M que cumpla la relación anterior se llama una cota inferior de A. Si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ que es cota inferior de A y además cumple que $M \leq \alpha$ para cualquier otra cota inferior M de A, entonces α se llama ínfimo de A y se denota en la forma $\alpha = \inf A$.

Teorema

Si en un cuerpo ordenado se verifica el axioma del supremo, entonces todo subconjunto no vacío acotado inferiormente tiene ínfimo.

Definición

Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ se llama inductivo si cumple las siguientes condiciones:

- $0 \in I$.
- *Si* $x \in I$ *entonces* $x + 1 \in I$.

Definición

$$\mathbb{N} := \bigcap \{I : \text{ donde } I \text{ es un conjunto inductivo de } \mathbb{R}\}.$$

Teorema (Método de inducción)

Cualquier subconjunto $S \subset \mathbb{N}$ que satisfaga las siguientes propiedades

1. $0 \in S$,
2. *si* $n \in S$ *entonces* $n + 1 \in S$,

verifica que $S = \mathbb{N}$.

Enteros y racionales subconjuntos de $\mathbb{R}$

Definición

El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ *y el de los números racionales* $\mathbb{Q}$ *están definidos del siguiente modo:*

1. $\mathbb{Z} := \bigcup\{n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N},\ \textit{o bien}\ -n \in \mathbb{N}\}$
2. $\mathbb{Q} := \{m \cdot \dfrac{1}{n} : m \in \mathbb{Z}\ \textit{y}\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. *El número real* $m \cdot \dfrac{1}{n}$ *se denota indistintamente como* $\dfrac{m}{n}$ *o como* m/n.

Teorema (Propiedad arquimediana)

El cuerpo $\mathbb{R}$ *tiene la propiedad arquimediana, es decir, dados* $x, y \in \mathbb{R}$, *con* $0 < y$, *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $x < ny$.

La parte entera

Teorema

Todo subconjunto no vacío A de $\mathbb{N}$ tiene primer elemento.

Corolario

Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único número entero m que verifica $m \leq x < m+1$.

Definición

Sea $x \in \mathbb{R}$, el único número entero m que verifica

$$m \leq x < m+1$$

se llama parte entera de x y se denota con $[x]$, es decir $[x] := m$.

Densidad en $\mathbb{R}$

Teorema

Si $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

Teorema

Existe un número $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $\alpha^2 = 2$. Además

$$\alpha = \sup\{0 \leq r \in \mathbb{Q} : \; r^2 < 2\}$$

Teorema

Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, entonces existe $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < z < y$.

El valor absoluto

Definición

$$|x| := \begin{cases} x \;\; si \; x \geq 0 \\ -x \;\; si \; x < 0 \end{cases}$$

Teorema

Para cada par de elementos x, y de $\mathbb{R}$ se cumplen:

1. $|x| = |-x| \geq 0 \quad y \quad |x| > 0 \; si \; x \neq 0.$ $|x| = \max\{x, -x\}$
2. $|xy| = |x||y|.$
3. $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}.$
4. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
5. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(desigualdad triangular).*
6. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

J. M. Mira; B. Cascales y S. Sánchez-Pedreño
http://ocw.um.es/ciencias/analisis-matematico-i