
Índice general

1. Números reales y complejos	1
1.1. Definición axiomática de \mathbb{R}	3
1.2. Otras propiedades de los números (\mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} y \mathbb{R})	7
1.2.1. Valor absoluto	15
1.2.2. Raíces n -ésimas	17
1.2.3. Sobre la unicidad y existencia de \mathbb{R}	17
1.2.4. Representación geométrica de los números reales.	20
1.3. El cuerpo de los números complejos	22
1.3.1. Representación geométrica de los complejos	24
1.4. Ejercicios	28
2. Sucesiones numéricas	41
2.1. Convergencia	42
2.2. Sucesiones monótonas acotadas	54
2.3. Teorema de Bolzano-Weierstrass	58
2.4. Sucesiones de Cauchy: completitud	62
2.5. Funciones elementales I: exponencial y logaritmo reales	65
2.5.1. Exponentes enteros	65
2.5.2. Exponentes racionales	66
2.5.3. Exponentes reales	66
2.5.4. La función logaritmo	67
2.6. Límites infinitos	70
2.7. Algunas sucesiones notables. Jerarquía de sucesiones divergentes	72
2.8. Representación decimal de los números reales	75
2.9. Ejercicios	80
3. Límite funcional y continuidad	91
3.1. Límite de una función en un punto	92
3.1.1. Límites laterales	100
3.2. Funciones continuas	102

3.3.	Funciones reales continuas en un intervalo	107
3.3.1.	Teoremas de Weierstrass y Bolzano	107
3.3.2.	Continuidad y monotonía. Función inversa	112
3.4.	Continuidad uniforme	114
3.5.	Ejercicios	119
4.	Cálculo diferencial	127
4.1.	Funciones derivables	128
4.2.	Extremos de funciones derivables. Teoremas del valor medio	138
4.3.	Fórmula de Taylor	152
4.3.1.	Desarrollos limitados	152
4.3.2.	Fórmula de Taylor con resto	163
4.4.	Funciones convexas	172
4.4.1.	Convexidad local	176
4.5.	Ejercicios	181
5.	Cálculo integral	195
5.1.	La integral de Riemann	197
5.2.	Caracterización y propiedades elementales	200
5.3.	Teorema fundamental del cálculo	212
5.4.	Aplicaciones de la integral	216
5.4.1.	Determinación de áreas planas en cartesianas	216
5.4.2.	Determinación de volúmenes de revolución	218
5.5.	Ejercicios	220
6.	Cálculo de primitivas	229
6.1.	Cambio de variable e integración por partes	233
6.2.	Funciones racionales	235
6.2.1.	Caso de raíces simples	237
6.2.2.	Caso de raíces múltiples	244
6.3.	Funciones racionales en seno y coseno	247
6.4.	Funciones racionales de e^x	251
6.5.	Funciones racionales en \sinh y \cosh	252
6.6.	Algunos tipos de funciones irracionales	252
6.6.1.	Irracionales de tipo lineal	253
6.6.2.	Irracionales binomias	254
6.6.3.	Irracionales cuadráticos	255
6.7.	Ejercicios	259
7.	Series numéricas e integrales impropias	263
7.1.	Definición y primeras propiedades	264
7.1.1.	Criterio de convergencia de la integral	268
7.2.	Término general o integrando positivos	271

7.2.1. Criterios de convergencia por comparación	271
7.3. La propiedad asociativa en series	280
7.4. Convergencia absoluta y condicional. Teorema de Riemann	283
7.5. Productos de series	285
7.6. Criterios de convergencia de Dirichlet y Abel	288
7.7. Ejercicios	297
8. Series de potencias y funciones elementales	303
8.1. Series de potencias	304
8.2. Funciones elementales	314
8.2.1. Exponencial compleja y funciones trigonométricas	314
8.2.2. Medida de ángulos	316
8.2.3. Representación geométrica de complejos	319
8.3. Teorema Fundamental del Álgebra	320
8.4. Ejercicios	323

Índice de figuras

1.1. Bernard Bolzano (1781–1848)	7
1.2. Arquímedes de Siracusa (287–212 a.d.C.)	11
1.3. Richard Dedekind (1831–1916)	20
2.1. Georg Cantor (1845 – 1918)	59
3.1. Nicolas de Oresme (1323?–1382) y René Descartes (1596–1650) . . .	93
3.2. Relación entre el seno, el arco y la tangente	97
3.3. Jean d’Alembert (1717–1783) y Augustin Cauchy (1789–1857) . . .	100
3.4. Discontinuidad evitable (izquierda) y de primera especie	106
3.5. Imagen sobre el significado de la continuidad	108
3.6. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)	109
3.7. Bernard Bolzano (1815–1897)	110
3.8. Una función no uniformemente continua	114
3.9. Heinrich Eduard Heine (1821–1881)	116
3.10. Significado gráfico de la no continuidad uniforme	117
3.11. Producto de dos funciones uniformemente continuas	118
4.1. La recta tangente	133
4.2. Gráfica de la función $f(x) = x^x$ en $[0, 1]$	138
4.3. Función estrictamente creciente con derivada nula	141
4.4. Crecimiento puntual	141
4.5. Significado geométrico del teorema de Lagrange	143
4.6. Lagrange (1736–1813), izquierda, y Cauchy (1789–1857)	143
4.7. Función no nula, infinitamente derivable con derivadas nulas en 0 .	163
4.8. Brook Taylor (1685 – 1731)	168
4.9. La función seno y sus primeros polinomios de Taylor para $x_0 = 0$. .	169
4.10. Una función que no es convexa, ni cóncava, ni tiene inflexión	177
5.1. Sumas superiores e inferiores	197
5.2. Sumas de Riemann	202

5.3.	Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)	210
5.4.	Henri Léon Lebesgue (1875–1941)	211
5.5.	Volumen de revolución	218
6.1.	Sir Isaac Newton (1643–1727)	232
6.2.	Ostrogradski y Hermite	246
7.1.	El criterio de la integral	269
7.2.	Nicolas de Oresme (1323?–1382) y René Descartes (1596–1650) . . .	291
8.1.	Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)	321