3

Límite funcional y continuidad

Competencias

- Saber analizar la continuidad de funciones sencillas utilizando el lenguaje ε - δ.
- Conocer la continuidad de las funciones elementales y saber utilizarla para analizar la continuidad de funciones compuestas.
- Saber utilizar la continuidad para permutar límites y funciones.
- Adquirir cierta habilidad para resolver problemas de existencia de puntos con propiedades especiales usando el teorema de Bolzano.
- Saber usar MAXIMA para dibujar y «visualizar» el límite de una función en un punto.
- Ser capaz de conjeturar si una función es uniformemente continua a través de su gráfica.

CONTENIDOS

ANÁLISIS MATEMÁTICO I
J. M. MIRA • S. SÁNCHEZ-PEDREÑO

Las funciones constituyen el objeto primordial de estudio para el Análisis Matemático. Muchas de las leyes de la naturaleza y, en particular, de la Física pueden ser formuladas mediante una relación de dependencia de una variable respecto de otra u otras. Las funciones de una variable, que son las estudiadas en este curso, constituyen las relaciones de dependencia funcional más sencilla. Cambios de valor en la variable independiente pueden a su vez producir cambios en el valor de la función e interesa el estudio de las funciones «regulares». La regularidad puede tener diferentes niveles de exigencia; en este capítulo nos ocuparemos del nivel más simple, la continuidad, que corresponde con el hecho de que «pequeñas» modificaciones en el valor de la variable independiente produzcan «pequeñas» modificaciones en el valor de la variable dependiente o función.

3.1. Límite de una función en un punto

En este capítulo y en los posteriores consideraremos funciones $f : D \longrightarrow F$ definidas en un conjunto D (llamado dominio o conjunto inicial) que toman valores en un conjunto F (llamado conjunto final) entendiendo por tal una correspondencia, del tipo que sea, que permite asignar a cada elemento $x \in D$ un *único* punto $f(x) \in F$. Las más de las veces $f(x)$ vendrá dado en términos de una fórmula en x, pero eso no es imprescindible.

En sentido estricto la función es la terna (D, F, f) y un cambio en alguno de los elementos significa cambiar la función. Sin embargo no es infrecuente encontrar en los libros enunciados del tipo *sea la función* $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 1}$, lo cual representa un «abuso de lenguaje» no sólo porque D y F no han sido escritos explícitamente, sino, incluso, porque $f(x)$ no es la función, es sólo el valor de la función f en el punto x. Este abuso de lenguaje se sustenta en razones de economía de escritura y, ocasionalmente, también lo emplearemos aquí, apelando a la benevolencia y complicidad del lector y siempre sin ambigüedades insalvables; cuando eso ocurra el lector deberá tener presente las reflexiones que acabamos de hacer.

Normalmente denotaremos por $\overline{\mathbb{R}}$ la denominada «recta real ampliada», obtenida adjuntado a $\mathbb{R}$ los símbolos del infinito, es decir, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. En lo que sigue por intervalo I de extremos $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ entenderemos cualquiera de los siguientes intervalos:

$$[a, b],\ [a, b),\ (a, b],\ (a, b),\ (-\infty, +\infty),\ (-\infty, b),\ (-\infty, b],\ (a, +\infty),\ [a, +\infty).$$

Recordemos también (definición 2.1.5) que se llama bola abierta de centro $x \in \mathbb{K}$ y radio $r > 0$ al siguiente conjunto

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{K} : |y - x| < r\}.$$

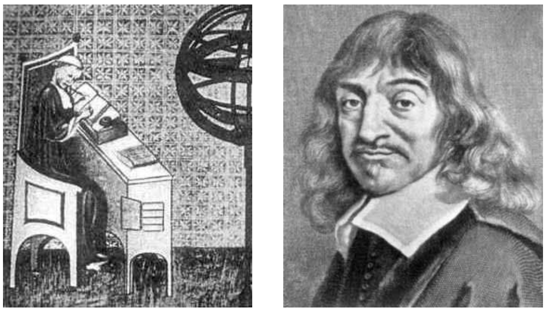


Figura 3.1: Nicolas de Oresme (Allemagne, 1323?–Lisieux, 1382), a izquierda, y René Descartes (La Haye, 1596–Estocolmo,1650)

El concepto de función en matemáticas puede parecer hoy en día extremadamente sencillo y elemental, pero esta idea no refleja en absoluto el proceso histórico en torno a dicha noción. Un concepto incipiente de función aparece hacia la mitad del siglo XIV a través de los estudios, mitad filosóficos mitad matemáticos, de los escolásticos en torno a la llamada *latitud de las formas* o *variabilidad de las cualidades*. Entre estos estudiosos podemos destacar a Nicolas Oresme (1323?–1382) que en el estudio de los cambios de una magnitud (temperatura, velocidad, etc.) concebía una representación gráfica que aproxima la idea de la gráfica de una función:

> *Entonces, cada intensidad que pueda ser adquirida sucesivamente debería ser imaginada por una línea recta perpendicularmente erigida sobre algún punto del espacio o sujeto de la cosa intensiva.*

Más tarde René Descartes y Fermat con la introducción de la geometría analítica reafirmarían la representación de las funciones (algebraicas) mediante coordenadas. Pero fue en la segunda mitad del siglo XVIII cuando la noción de función se hizo fundamental para el análisis matemático y cuando se plantearon las principales cuestiones acerca de qué había que entender por función. Mientras que hasta entonces una función era simplemente una expresión o fórmula (en términos de una o más variables) Euler, y posteriormente, Dirichlet abrieron el concepto admitiendo funciones mucho más generales. A raíz del estudio de una cuerda sujeta por sus extremos que es desplazada y se deja vibrar libremente Euler proponía que debía admitirse como posición inicial de la cuerda una función con un pico (es decir definida de forma diferente en dos regiones adyacentes, idealización matemática de la posición inicial al tañer la cuerda). Más tarde, en 1837, Dirichlet escribiría:

> *Si ahora a cada x le corresponde una única y finita* [...] *entonces y es llamada una función de x para este intervalo* [...] *Esta definición no requiere una regla común para las diferentes partes de la curva; uno puede imaginar la curva como siendo compuesta de las componentes más heterogéneas o como siendo trazada sin ninguna ley.*

Otra terminología que resulta útil es la siguiente:

Definición 3.1.1

(1) Se dice que V es un entorno de $x \in \mathbb{K}$ si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset V$.

(2) Si A es un subconjunto de $\mathbb{K}$ diremos que x es un punto de acumulación de A si para cada $r > 0$ el conjunto $B(x, r) \cap A$ contiene al menos un punto diferente de x.

Ejemplos 3.1.2

(1) Si $A = [0, 1]$ entonces cada punto $x \in A$ es de acumulación de A.

(2) Si $A = (0, 1)$ entonces cada punto $x \in [0, 1]$ es de acumulación de A.

(3) Si $A = \{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$ entonces 0 es un punto de acumulación de A; y de hecho es el único.

(4) Si $A = \mathbb{N}$ entonces A no tiene puntos de acumulación.

Obsérvese que si x es un punto de acumulación de A, x puede o no pertenecer a A, pero en todo caso, existe una sucesión $(x_n)_n \subset A$ con $x_n \neq x$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $x = \lim_n x_n$.

¿Cómo puede construirse una tal sucesión? Pues aplicando la definición de punto de acumulación y tomando una sucesión de valores de r que converja a cero. Complete los detalles.

Definición 3.1.3 *Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$. Si c es punto de acumulación de D se dice que L es el límite de f en c, y se escribe*

$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in D$ si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Una formulación equivalente con el lenguaje de bolas es la siguiente: para cada bola $B(L, \varepsilon)$ existe una bola $B(c, \delta)$ tal que $f((B(c, \delta) \cap D) \setminus \{c\})) \subset B(L, \varepsilon)$.

Simbólicamente la anterior definición de límite la escribiríamos en la forma:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \ \Big(0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon\Big)$$

También puede caracterizarse la existencia del límite de una función en un punto en términos de sucesiones.

Proposición 3.1.4 *Sean $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ y c un punto de acumulación de D. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $L = \lim_{x \to c} f(x)$.

(2) Para cada sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ tal que $\lim_n x_n = c$ y $x_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica $L = \lim_n f(x_n)$.

Demostración: La implicación 1)⇒2) resulta muy sencilla ayudándose de un esquema. La implicación 2)⇒1) se realiza fácilmente por reducción al absurdo. □

Deliberadamente la demostración anterior no está escrita con detalle; pero las ideas están ahí. Apoyándose en esas ideas, o en otras que se le ocurran, escriba la demostración con precisión.
Otra cuestión. Supongamos que para una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ tal que $\lim_n x_n = c$ y $x_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verificara que $L = \lim_n f(x_n)$. ¿Necesariamente habría de ser $L = \lim_{x\to c} f(x)$?

Conviene advertir que, sobre todo en libros antiguos, a veces se dice que f tiene límite L en c si los valores de $f(x)$ están «tan cerca como se desee» de L con tal de que x esté «suficientemente cerca» de c. Aunque se trata de un lenguaje informal e impreciso, esa formulación expresa la idea de la definición 3.1.3.

De la unicidad del límite de una sucesión, junto con la proposición 3.1.4, se deduce fácilmente el siguiente resultado.

Proposición 3.1.5 *Si existe el límite de una función en un punto, entonces es único.*

Al igual que ocurre con las sucesiones, también es posible dar aquí una condición de Cauchy para la existencia de límite de una función en un punto.

Proposición 3.1.6 (Condición de Cauchy) *Sean $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ y c un punto de acumulación de D. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) Existe $\lim_{x\to c} f(x) := L \in \mathbb{K}$

(2) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in B(c,\delta) \setminus \{c\}$ se verifica que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Demostración: Supongamos en primer lugar que existe $\lim_{x\to c} f(x)$ y vale $L \in \mathbb{K}$. De acuerdo con la definición 3.1.3, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-c| < \delta$ (es decir, $x \in B(c,\delta) \setminus \{c\}$) se cumple $|L - f(x)| < \varepsilon/2$. Análogamente, si $y \in B(c,\delta) \setminus \{c\}$ se tiene $|L - f(y)| < \varepsilon/2$ y en consecuencia

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - L + L - f(y)| \leq |f(x) - L| + |L - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Veamos el recíproco. Para probar que (2) implica (1) haremos uso de la proposición 3.1.4. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos un $\delta > 0$ en las condiciones de lo afirmado en (2). Para cualquier sucesión $(x_n)_n$ con $\lim_n x_n = c$ y $x_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que existe n_0 de modo que

$$x_n, x_m \in B(c,\delta) \setminus \{c\}, \quad \text{para } n, m > n_0$$

pero entonces

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon, \quad \text{para } n, m > n_0,$$

es decir, $(f(x_n))_n$ es una sucesión de Cauchy y por tanto convergente, por lo que existe $L := \lim_n f(x_n)$. Sólo falta probar que L no depende de la sucesión $(x_n)_n$. Pero eso es sencillo, pues si para otra sucesión $(x'_n)_n$ con $\lim_n x'_n = c$ y $x'_n \neq c$ fuera $L' := \lim_n f(x'_n)$ se tendría

$$|L - L'| = |\lim_n f(x_n) - \lim_n f(x'_n)| \leq \varepsilon$$

para cualquier valor de ε, ya que, al ser $\lim_n x_n = c = \lim_n x'_n$ se cumple que $|x_n - x'_n| < \delta$ para $n > n'_0$ y cierto n'_0. □

Ejemplos 3.1.7

(1) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ tiene por límite c en el punto c. En efecto, si $(x_n)_n$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ con límite c es claro que $(f(x_n))_n$ también tiene límite c (pues $f(x_n) = x_n$ para cada n) y aplicando la proposición 3.1.4 se obtiene el resultado.

(2) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ tiene por límite c^3 en el punto c. En efecto, si $(x_n)_n$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ con límite c entonces, aplicando las reglas de cálculo del límite de un producto de sucesiones, se tiene que $(x_n^3)_n$ es una sucesión con límite c^3 y, de nuevo, el resultado se obtiene de la proposición 3.1.4. Evidentemente el exponente 3 no tiene nada de particular y el mismo resultado, con idéntica demostración se aplica a cualquier entero $k > 0$.

(3) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[4]{x}$ tiene por límite $\sqrt[4]{c}$ en el punto c y algo análogo ocurre con cualquier raíz k-ésima. La técnica de demostración utiliza la ecuación ciclotómica e ideas que ya han sido utilizadas en los ejemplos 2.1.3. Dejamos al cuidado del lector los detalles de la prueba.

(4) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$ tiene por límite $\operatorname{sen} c$ en el punto c.

La demostración ahora no es tan simple. De hecho una demostración rigurosa exigiría tener definida de forma precisa la función seno, cuestión ésta que no abordaremos hasta el capítulo 8. A pesar de ello es posible dar una «justificación» basada en nuestra intuición y en el conocimiento adquirido en la enseñanza secundaria sobre la interpretación geométrica que tienen la funciones trigonométricas, seno, coseno y tangente y en las relaciones trigonométricas entre ellas. La clave para la «justificación» se apoya en la figura 3.2. Resulta intuitivamente claro en dicha figura que

$$\operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x \quad \text{para } x \in [0, \pi/2] \tag{3.1}$$

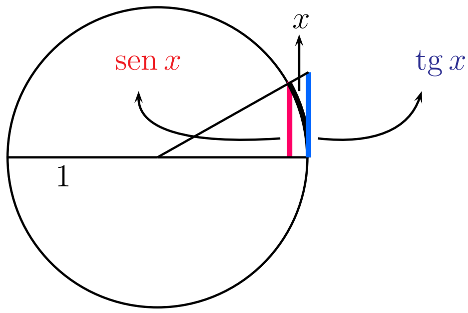


Figura 3.2: Relación entre el seno, el arco y la tangente

Pero entonces se tiene

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c| &= 2\left|\operatorname{sen}\frac{x-c}{2}\cos\frac{x+c}{2}\right| \\ &\leq 2\left|\frac{x-c}{2}\right| = |x-c| \end{aligned}$$

debido a que $|\cos\alpha| \leq 1$ para cualquier α. A partir de esta desigualdad es claro que para cada $\varepsilon > 0$ dado, tomando $\delta = \varepsilon$ se concluye que si $|x-c| < \delta$ entonces $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} c| < \varepsilon$.

Otra consecuencia interesante de la relación (3.1) es que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \tag{3.2}$$

ya que dividiendo por $\operatorname{sen} x$ (para $x \in (0,\pi)$) en (3.1) se tiene

$$1 \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

y aplicando el teorema del sandwich podemos tomar límites para obtener

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$$

que es una fórmula equivalente a (3.2).

(5) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ tiene por límite e^c en el punto c. Esto se obtiene fácilmente utilizando la proposición 3.1.4 juntamente con la proposición 2.5.4 (apartado 6).

(6) La función $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log x$ tiene por límite $\log c$ en el punto $c \in (0,\infty)$. Esto se obtiene fácilmente utilizando la proposición 3.1.4 juntamente con la proposición 2.5.7 (apartado 5). Sin embargo no existe $\lim_{x\to 0}\log x$.

La función $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) = \cos x$, la función $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_2(x) = a^x$ y la función $f_3 : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_3(x) = \log_a x$ con $a > 0$, en ambos casos, cumplen que

$$\lim_{x \to c} f_k(x) = f_k(c) \quad \text{para } k = 1, 2, 3.$$

Justifique esta afirmación, indicando en su caso, los teoremas o propiedades utilizados (en el caso de la función coseno puede hacer uso de las relaciones que conozca de la enseñanza secundaria).

(7) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]$ tiene por límite $[c]$ si $c \notin \mathbb{Z}$ y no tiene límite si $c \in \mathbb{Z}$.

(8) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no tiene límite para $c = 0$. Si lo tuviera y fuera L, de acuerdo con la proposición 3.1.4, habría de tenerse $L = \lim_n f(x_n)$ para cada sucesión $(x_n)_n$ que cumpla $\lim_n x_n = 0$. Pero las sucesiones de términos generales $x'_n = 1/n\pi$ y $x''_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$ cumplen que

$$\lim_n x'_n = 0 = \lim_n x''_n$$

mientras que

$$\lim_n f(x'_n) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_n f(x''_n) = 1$$

(9) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ tiene por límite 0 para $c = 0$. En efecto, la estimación

$$|f(x) - 0| = |x \operatorname{sen}(1/x)| \leq |x|$$

garantiza que se cumple la definición 3.1.3 tomando $\delta = \varepsilon$.

Para visualizar más fácilmente el comportamiento de las funciones consideradas en los dos últimos ejemplos en relación con la existencia del límite puede utilizarse MAXIMA para dibujarlas en un entorno del punto 0.

```
plot2d( sin(1/x),[x,-0.1,0.1] );
plot2d( x*sin(1/x),[x,-0.1,0.1] );
```

Utilizando la proposición 3.1.4 y las correspondientes propiedades para los límites de sucesiones (proposición 2.1.9) puede probarse sin dificultad el siguiente enunciado.

Proposición 3.1.8 *Sean f, g funciones de $D \subset \mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$ y c un punto de acumulación de D tales que existen*

$$L_1 = \lim_{x \to c} f(x) \in \mathbb{K}, \quad y \quad L_2 = \lim_{x \to c} g(x) \in \mathbb{K}.$$

Entonces:

(1) Existe $\lim_{x\to c} f(x) + g(x)$ *y vale* $L_1 + L_2$.

(2) Existe $\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x)$ *y vale* $L_1 \cdot L_2$

(3) Si $L_2 \neq 0$ *existe* $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *y vale* $\dfrac{L_1}{L_2}$.

(4) Si además las funciones toman valores en $\mathbb{R}$ *se cumplen las dos propiedades siguientes:*

- *Si* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in D$ *se verifica que* $L_1 \leq L_2$.
- *Si* h *es otra función de* D *en* $\mathbb{R}$ *tal que* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *en* D *y además* $L_1 = L_2 = L$, *también se verifica que* $L = \lim_{x\to c} h(x)$.

Complete de forma precisa los detalles de las pruebas para cada uno de los ítems de la proposición 3.1.8 indicando de forma explícita en qué resultados se apoya para obtener las conclusiones. Si, con la notación anterior, es $f(x) < g(x)$ ¿se cumple que $L_1 < L_2$? Explíquelo.
¿Es necesario que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in D$ para tener $L_1 \leq L_2$?, ¿o basta con que la desigualdad se cumpla para ciertos x en D? En caso afirmativo, ¿puede precisar para qué valores de x es suficiente?

Hasta ahora hemos considerado que c y L son números reales o complejos, pero es posible ampliar la definición 3.1.3 para que incluir también los casos en que c o L sean $\pm\infty$. Utilizando la terminología de las bolas podemos emplear la misma definición y únicamente necesitamos identificar el sentido que atribuiremos a las «bolas» (es más adecuado hablar de entornos) de centro x, cuando x es $\pm\infty$ con el sentido que hemos asignado a los símbolos $\pm\infty$ en la sección 2.6.

Así, consideraremos como entorno de $+\infty$ a cualquier conjunto de la forma $(k, +\infty)$, y entorno de $-\infty$ es cualquier conjunto de la forma $(-\infty, k)$.

Concretemos. Por ejemplo si $f(x)$ es una función definida en un intervalo de la forma $(a, +\infty)$, decir que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que si $x \in (a, +\infty)$ y $x > k$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

O, como otro ejemplo, si $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y c es un punto de acumulación de D diremos que $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ si (en términos de entornos): para cada entorno de $+\infty$, $(k, +\infty)$, existe una bola $B(c, \delta)$ tal que $f(B(c, \delta) \cap D \setminus \{\delta\}) \subset (k, +\infty)$.

El lector debe preocuparse de escribir con detalle las otras posibilidades (véase el ejercicio 2).

Figura 3.3: Jean Le Rond d'Alembert (París, 1717 – París, 1783) y Augustin Cauchy (París, 1789 – Sceaux, 1857)

La noción de límite es esencial al cálculo diferencial e integral: una derivada, una integral, un suma de una serie, ... todos son ejemplos de límites. Se trata de un concepto complejo, una concepción mental bastante elaborada y no es, pues, de extrañar que costara más de 2 000 años conseguir formalizarla correctamente. Sin entrar a distinguir los conceptos de límite de una sucesión y una función en un punto, íntimamente relacionados por otra parte, podemos ligar el nombre del matemático Jean d'Alembert como uno de los que más se aproximó a la noción tal y como la conocemos hoy:

> *Se dice que una magnitud es el límite de otra magnitud, cuando la segunda se puede acercar de la primera más cerca que una magnitud dada, tan pequeña como se pueda suponer, sin que sin embargo, la magnitud que se acerca, pueda nunca sobrepasar la magnitud a la que se acerca; de forma que la diferencia de tal cantidad en su límite es absolutamente inasignable.*

Naturalmente es preciso citar a Augustin Cauchy. Su lenguaje es difícil de entender porque recurre a la noción de cantidad variable y a la de infinitésimo:

> *Cuando los valores numéricos sucesivos de una misma variable decrecen indefinidamente, de manera a descender por debajo de todo número dado, esta variable llega a ser lo que se llama un infinitamente pequeño o una cantidad infinitamente pequeña. Una variable de esta especie tiene a cero como límite.*

Fue finalmente Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) quien estableció el concepto de límite en su actual versión ε-δ. A él se debe en gran parte el último proceso de introducción del rigor y el formalismo actuales en el análisis matemático y también la extensión de estas ideas sobre el nuevo análisis, que realizó a través de unos famosos cursos en la Universidad de Berlín.

3.1.1. Límites laterales

En ocasiones interesa considerar límites de una función en un punto a través de un subconjunto de su dominio, lo que no es otra cosa que considerar la restricción de la función a ese subconjunto del dominio. De forma precisa, si $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ es una función con dominio D y S es un subconjunto de D llamamos *restricción* de f a S a la función $g : S \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por la fórmula $g(x) := f(x)$ para cada $x \in S$.

Especial interés tienen en $\mathbb{R}$ los límites laterales que a continuación se definen.

Definición 3.1.9 *Sea $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea c un punto de acumulación de D.*

(1) Se llama límite por la derecha de f en c y se denota con $f(c^+) = \lim_{x\to c^+} f(x)$ al límite de la función

$$g : D \cap (c, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

en c, supuesto que c sea un punto de acumulación del dominio de g, siendo g la restricción de f a $D \cap (c, +\infty)$.

(2) Se llama límite por la izquierda de f en c y se denota con $f(c^-) = \lim_{x\to c^-} f(x)$ al límite de la función

$$g : D \cap (-\infty, c) \longrightarrow \mathbb{R}$$

en c, supuesto que c sea un punto de acumulación del dominio de g, siendo g la restricción de f a $D \cap (-\infty, c)$.

Así pues, en términos de ε-δ, las definiciones anteriores se escriben en la forma siguiente:

- $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in D$, si $0 < x - c < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.
- $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in D$, si $0 < c - x < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

De la definición es evidente que si existe el límite de una función en un punto, entonces en ese punto existen los dos límites laterales y coinciden. Pero también, recíprocamente, si en un punto existen los dos límites laterales y coinciden, entonces existe el límite de la función en dicho punto (que, claro está, coincide con los límites laterales).

Ejemplos 3.1.10

(1) La función parte entera, $f(x) = [x]$ tiene límite por la izquierda en cada entero c que vale $c - 1$ y límite por la derecha que vale c.

(2) La función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, $x \neq 0$, no tiene límites laterales en $x = 0$.

(3) Para la función $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$, se verifica que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

(4) La función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, tiene por límite $+\infty$ en $x = 0$.

(5) Para la función $f(x) = e^{-(1/x)}$, $x \neq 0$, se verifica que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty.$$

(6) Para la función $f(x) = e^{-(1/x^2)}$, $x \neq 0$, se verifica que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

(7) Las funciones monótonas (si no sabe lo que esto significa, consulte la definición 3.3.5) $f : C \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tienen límite lateral en cada punto.

Todas las afirmaciones realizadas en los ejemplos anteriores son muy fáciles de verificar. ¡Tómese la molestia de escribir con cuidado las demostraciones de las mismas! Si f es una función monótona y c es un punto de su dominio ¿$f(c)$ ha de coincidir siempre con alguno de los límites laterales en c?

3.2. Funciones continuas

La continuidad de una función en un punto c de su dominio responde a la idea de que los valores que toma f en los puntos cercanos a c están próximos al valor $f(c)$. La definición que sigue formaliza esa idea.

Definición 3.2.1 *Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ y sea $c \in D$. Se dice que f es continua en c si para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.*

Podemos utilizar Maxima para que nos ayude a comprender el significado geométrico de la definición de función continua en un punto y del papel jugado por ε y δ.

Obsérvese que si $c \in D$ es un punto de acumulación de D, lo anterior equivale a que $f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$. Mientras que si c no es un punto de acumulación de D (es lo que se llama un *punto aislado* de D) entonces la condición anterior se cumple trivialmente (¿por qué?). En otras palabras una función es siempre continua en los puntos aislados de su dominio; y en los puntos de acumulación del dominio, que pertenezcan al dominio, lo es si, y sólo si, el límite de la función en el punto coincide con el valor que la función toma en dicho punto. Es decir, se obtiene así el resultado siguiente.

Proposición 3.2.2 *Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ y sea $c \in D$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) f es continua en c.

(2) Para cada sucesión $(x_n)_n \subset D$ con $c = \lim_n x_n$ se tiene $f(c) = \lim_n f(x_n)$.

Observe que el resultado de esta proposición puede ser resumido afirmando que la continuidad de f es equivalente a la conmutatividad entre f y la operación de tomar límites, es decir, que:

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Esta proposición es muy útil porque permite aplicar propiedades de los límites funcionales estudiados en la sección 3.1 para obtener resultados sobre funciones continuas. En particular, el lector podrá demostrar sin dificultad la siguiente proposición.

Proposición 3.2.3 *Sean f, g funciones de $D \subset \mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$ continuas en un punto $c \in D$. Entonces:*

(1) La función $f + g$ es continua en c.

(2) La función fg es continua en c.

(3) Si g no se anula en D entonces f/g es continua en c.

En el último apartado de la proposición precedente bastaría, en realidad, con que $g(c) \neq 0$, porque en tal caso existe un entorno de c en el que g no se anula, y reduciéndose a ese entorno podría aplicarse la proposición anterior. La no anulación de g en un entorno de c es consecuencia de un resultado más general que conviene explicitar.

Proposición 3.2.4 *Sea $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ una función continua en $c \in D$. Si $f(c) \neq 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in B(c, \delta)$. Además si f toma valores en $\mathbb{R}$ entonces el signo de $f(x)$ es el mismo en todos los $x \in B(c, \delta)$.*

Demostración: Como $f(c) \neq 0$ tomando $\varepsilon_0 = |f(c)|/2 > 0$ y aplicando la definición de continuidad, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(c, \delta)$, es decir, $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon_0$, o sea $f(x) \in B(f(c), \varepsilon_0)$, pero dicha bola no contiene el punto 0. La primera parte queda así probada.

Veamos ahora la segunda. Como $0 \neq f(c) \in \mathbb{R}$ entonces $f(c)$ es positivo o negativo. Supongámoslo positivo (el otro caso es análogo y queda al cuidado del lector) y tomemos $\varepsilon_0 = |f(c)|/2 > 0$ y δ como antes. Entonces, la bola $B(f(c), \varepsilon_0)$ es el intervalo $(f(c)/2, 3f(c)/2)$ con lo que $f(x) > 0$ si $x \in B(c, \delta)$. Y se obtiene la conclusión buscada. □

Proposición 3.2.5 *Sea $f_1 : D_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ una función continua en $c \in D_1$ y sea $f_2 : D_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $f_1(D_1) \subset D_2$ continua en $f_1(c)$. Entonces $f_2 \circ f_1$ es continua en c.*

Demostración: Para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ tal que $c = \lim_n x_n$, por la continuidad de f_1 en c se tiene que $f_1(c) = \lim_n f(x_n)$, pero al ser f_2 continua en $f_1(c)$ se tiene, a su vez, $f_2(f_1(c)) = \lim_n f_2(f_1(x_n))$, o dicho de otra forma $(f_2 \circ f_1)(c) = \lim_n (f_2 \circ f_1)(x_n)$ y en consecuencia, aplicando la proposición 3.2.2, se obtiene que $f_2 \circ f_1$ es continua en c. □

Definición 3.2.6 *Una función $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ se dice que es continua en D si es continua en cada punto de D.*

Ejemplos 3.2.7

(1) Las funciones constantes, la identidad y, más generalmente, los polinomios son funciones continuas en $\mathbb{K}$.

(2) La función exponencial, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$, es continua en $\mathbb{R}$.

(3) La función logaritmo neperiano, $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log x$ es continua en $(0, +\infty)$.

(4) Las funciones seno y coseno son continuas en $\mathbb{R}$.

(5) La función definida por $f(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$ para $t \in [0, 2\pi]$ es continua.

En los cuatro primeros ejemplos se establece que las funciones habituales en Análisis Matemático son continuas. Trate de justificar las afirmaciones anteriores. Los ejemplos 3.1.7 junto con las proposiciones 3.2.2 y 2.1.8 le serán de utilidad.

(6) También es continua la función $f : [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{4\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ x^2 & \text{si } x \in [2,3] \cup \{4\} \end{cases}$$

a pesar de que no sea posible dibujarla sin levantar el lápiz del papel. Sin embargo la función

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,2] \\ x^2 & \text{si } x \in (2,4] \end{cases}$$

no es continua debido a que no lo es en el punto $c = 2$. Este hecho indica que la continuidad de una función no depende sólo de la «fórmula» que, eventualmente, la define: depende también del dominio.

(7) La función $f : \mathbb{K} \longrightarrow [0, \infty)$ definida por $f(x) = |x|$ es una función continua en cada $c \in K$ ya que

$$|f(x) - f(c)| = \Big| |x| - |c| \Big| \leq |x - c|$$

(véase las proposiciones 1.2.20 y 1.3.4) y en consecuencia basta tomar $\delta = \varepsilon$ en la definición de continuidad en c.

(8) La función de Dirichlet $D_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$D_1(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$. En efecto, si $c \in \mathbb{Q}$ entonces $D_1(c) = 1$, y por otra parte existen sucesiones $(x_n)_n$ de números irracionales con límite c (véase el corolario 1.2.17) con lo que $\lim_n D_1(x_n) = \lim_n 0 = 0 \neq 1 = D_1(c)$; y si si $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ entonces $D_1(c) = 0$, y también existen sucesiones $(x'_n)_n$ de números racionales con límite c (véase el corolario 1.2.13) con lo que $\lim_n D_1(x'_n) = \lim_n 1 = 1 \neq 0 = D_1(c)$.

(9) La función de Dirichlet $D_2 : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$D_2(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q, & \text{si } x = \dfrac{p}{q}, \text{ donde } p, q \in \mathbb{N} \text{ y m.c.d.}(p, q) = 1, \end{cases}$$

es continua en los irracionales y discontinua en los racionales. El hecho de que D_2 es discontinua en los racionales es bien fácil: si $c \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ entonces $D_2(c) \neq 0$ mientras que, como ya hemos señalado, existen sucesiones $(x_n)_n$ de irracionales convergentes a c y entonces $0 = \lim D_2(x_n) \neq D_2(c)$.

Para demostrar la continuidad en los irracionales es necesario trabajar un poquito más. Supongamos que $c \notin \mathbb{Q}$ y consideremos cualquier sucesión $(x_n)_n$ con límite c. Hemos de probar que

$$0 = D_2(c) = \lim_n D_2(x_n)$$

o lo que es lo mismo que fijado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|D_2(x_n) - 0| < \varepsilon \tag{3.3}$$

Evidentemente para los x_n de la sucesión que sean irracionales (si los hay) la fórmula (3.3) se verifica trialmente y también se verifica si sólo un número finito de x_n son racionales, porque puede elegirse un n_0 suficientemente avanzado que los eluda. Sólo queda ver lo que ocurre cuando el número de racionales $x_n = p_n/q_n$ que hay en la sucesión es infinito. Pero en esa situación la sucesión de naturales $(q_n)_n$ cumple necesariamente que $\lim_n q_n = \infty$, como ahora probaremos, y por tanto existe n_0 tal que para $n > n_0$ se cumple $1/q_n < \varepsilon$ y en consecuencia se verifica la fórmula (3.3).

Para probar que $\lim_n q_n = \infty$ comenzaremos por observar que en el intervalo cerrado I de extremos $[c]$ y $[c]+1$ sólo hay dos racionales con denominador 1 (los extremos del intervalo); con denominador 2 sólo hay 3 en el intervalo (los extremos y el centro); con denominador 3 hay 4 racionales... con denominador q sólo hay $q+1$ racionales. En conclusión, fijado q, en el intervalo I sólo puede haber un número finito de términos de la sucesión $(x_n)_n$, cuyos denominadores pertenezcan al conjunto $\{1, 2, 3, \dots, q\}$. Pero al ser c irracional, no coincide con ninguno de ellos y al tratarse de una cantidad finita existiría una bola $B(c, \delta) \subset I$ que no contendría a ninguno de tales términos de la sucesión.

Por otra parte, la sucesión $(q_n)_n \subset \mathbb{N}$ o bien está acotada o bien no lo está.
1) Si está acotada existiría un cierto q de manera que todos los denominadores pertenecerían al conjunto $\{1, 2, 3, \dots, q\}$ y entonces la bola $B(c, \delta) \subset I$ no contendría a ninguno de tales términos, lo cual es contradictorio con el hecho de que $\lim_n x_n = c$.
2) Si no está acotada, contiene una subsucesión con límite ∞, pero, en principio, podría también contener subsucesiones acotadas. Si una tal subsucesión acotada existiera, razonando como en 1), la subsucesión de los correspondientes x_n no podría tener límite c, lo cual, de nuevo, es contradictorio.

Los razonamientos anteriores prueban que cuando el número de términos racionales en la sucesión $(x_n)_n$ sea infinito, necesariamente ha de ser $\lim_n q_n = \infty$.

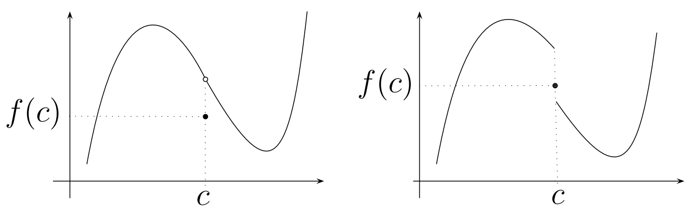


Figura 3.4: Discontinuidad evitable (izquierda) y de primera especie

A veces una función f no es continua en un punto c de su dominio porque, a pesar de que existe $\lim_{x\to c} f(x)$, el valor de dicho límite no coincide con $f(c)$. Un punto c de esa naturaleza se llama una *discontinuidad evitable* para f, en el sentido de que f puede redefinirse en c de modo que sea continua en dicho punto.

Para el caso de funciones reales de variable real, si existen los dos límites laterales en c pero no coinciden se dice que la discontinuidad de f en c es de primera especie y se llama *salto* de f en c a la diferencia $|f(c^+) - f(c^-)|$. Tal ocurre con la función parte entera en los puntos de $\mathbb{Z}$ y más generalmente con cualquier función monótona. Si alguno de los dos límites laterales no existe la discontinuidad se suele llamar *discontinuidad de segunda especie*.

La noción de continuidad evoluciona a lo largo de la historia a la par que la de límite, dada la proximidad entre ambas. Podríamos pues citar como precursores a los ya citados en la página 100. Para ser un poco más precisos veamos dos citas originales.
La primera corresponde a Bolzano:

> *Una función $f(x)$ varía según la ley de continuidad para todos los valores que están entre dos límites no es otra cosa que esta: si x es cualquiera de estos valores, la diferencia $f(x+\omega) - f(x)$ puede hacerse menor que cualquier cantidad dada, si uno hace ω tan pequeña como desee.*

La segunda, naturalmente, a Cauchy que en su Cours d'Analyse de 1821 escribe:

> [...] *En otros términos, la función $f(x)$ será continua con respecto a x entre los límites dados, si, entre estos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la misma función.*

En 1787, la Academia de San Petersburgo, como consecuencia del debate que hemos citado de pasada en la página 100, propuso un premio al que diera la mejor respuesta a la siguiente cuestión sobre funciones:

> *Si las funciones arbitrarias a las que se llega integrando ecuaciones [diferenciales]* [...] *representan cualquier curva o superficie* [...] *o bien si esas funciones incluyen sólo a las curvas continuas*

El premio lo ganó Louis Arbogast que distinguía entre curvas descritas por funciones continuas (aquéllas que están definidas por una única ley o fórmula), discontinuas (aquéllas en las que se pueden distinguir varias partes o que están trazadas libremente, con tal que las distintas partes se unan unas o otras sin interrupción) y discontiguas (en las que las *diferentes partes no se unen entre sí sin interrupción*).

3.3. Funciones reales continuas en un intervalo

En esta sección y en la siguiente nos ocuparemos de cuestiones relativas a continuidad global para funciones reales, es decir, a la continuidad en un intervalo. Los resultados centrales, los teoremas de Weierstrass y Bolzano, dependen de la completitud de la recta real.

3.3.1. Teoremas de Weierstrass y Bolzano

Una función acotada no alcanza necesariamente su máximo, incluso aunque sea continua. La función identidad $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ es un buen ejemplo. Asimismo es sencillo construir una función (no continua) definida en un intervalo cerrado que no es acotada. Las funciones continuas definidas en intervalos

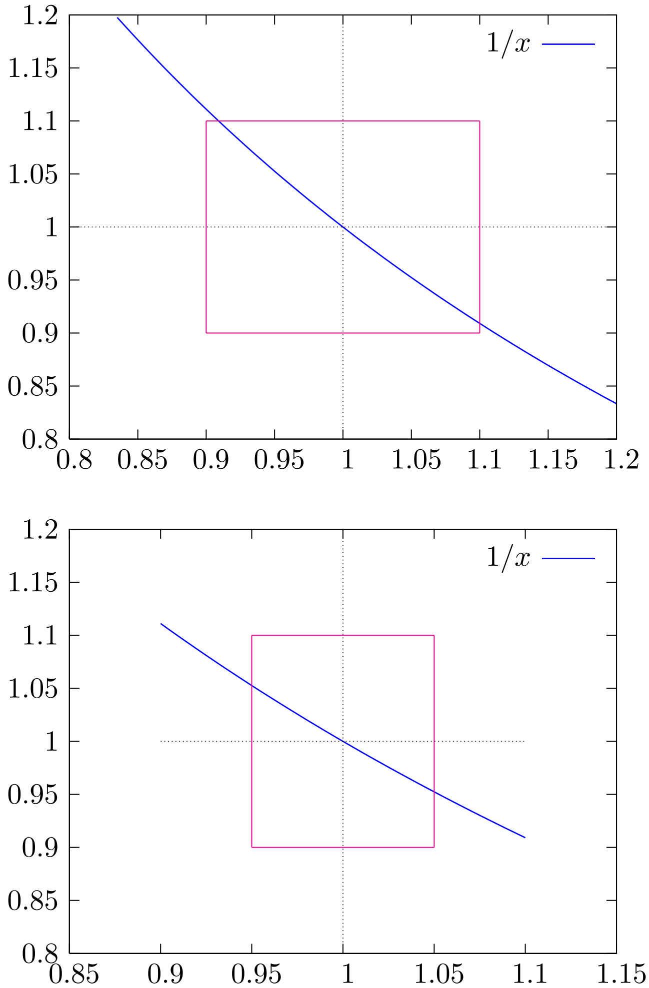


Figura 3.5: Gráfica de la función $1/x$ en un entorno del punto $c = 1$, con $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 0.1$ y $\delta = 0.05$, respectivamente

cerrados y acotados tienen un comportamiento más satisfactorio, recogido en el teorema que sigue.

Teorema 3.3.1 (Weierstrass) *Sea $f : B[a, r] \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en una bola cerrada y acotada de $\mathbb{K}$. Entonces:*

(1) f es una función acotada.

(2) Existen $c, d \in B[a, r]$ tales que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$, es decir, f alcanza sus valores máximo y mínimo en su dominio.

Demostración: El primer apartado lo demostraremos por reducción al absurdo. Si f no estuviera acotada, para cada $n \in \mathbb{N}$, existiría $x_n \in B[a, r]$ de modo que $|f(x_n)| > n$. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ así construida evidentemente es acotada ya que

Figura 3.6: Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (Ostenfelde, 1815 – Berlín, 1897). Biografía en MacTutor.

$|x_n - a| \le r$. Aplicando el teorema de Bolzano-Weierstrass (2.3.4 y 2.3.5), se tiene garantizada la existencia de una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto, digamos, c. El punto c pertenece a la bola $B[a,r]$ por ser cerrada ya que

$$|x_n - a| \le r \Rightarrow |\lim_k x_{n_k} - a| = |c-a| \le r$$

por ser el valor absoluto una función continua (véanse los ejemplos de 3.2.7).

Pero entonces, como f es continua en c la sucesión $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(c)$ y por tanto es una sucesión acotada, lo cual es absurdo, ya que $|f(x_{n_k})| > n_k$.

Veamos ahora el segundo apartado. Por el primer apartado sabemos que el conjunto $f(B[a,r])$ es acotado. Si $\alpha = \sup\{f(x) : x \in B[a,r]\}$ existe una sucesión $(x_n)_n \subset B[a,r]$ con $\alpha = \lim_n f(x_n)$ y, procediendo como antes, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un punto, digamos, $d \in B[a,r]$. Entonces por la continuidad de f es $f(d) = \lim f(x_{n_k})$, pero como $\alpha = \lim_k f(x_{n_k})$ se concluye que $\alpha = f(d)$, es decir, la función f alcanza su máximo absoluto en el punto d. La demostración de que f alcanza su mínimo absoluto en $B[a,r]$ puede realizarse de forma análoga y se deja al cuidado del lector. $\square$

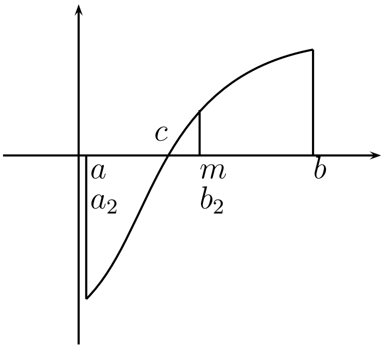
Obsérvese que el teorema anterior se aplica a cualquier función continua con valores reales definida en un intervalo $[a,b]$ cerrado y acotado, ya que tal intervalo puede ser interpretado como una bola cerrada con centro en el punto medio del intervalo y radio la mitad de su longitud.

La clave de la demostración anterior está en la llamada propiedad de Bolzano-Weierstrass, que asegura que cada sucesión acotada en $[a,b]$ (en $B[a,r]$) posee una subsucesión convergente a un punto de $[a,b]$ (de $B[a,r]$). De hecho, más generalmente, el teorema es válido para cualquier función continua cuyo dominio cumpla esa propiedad. Tales conjuntos reciben el nombre de *conjuntos compactos* y se estudian en Topología.

Teorema 3.3.2 (Bolzano) *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $c \in (a,b)$ de modo que $f(c) = 0$.*

Figura 3.7: Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (Praga, 1781 – Praga, 1848). Biografía en MacTutor.

Demostración:



La condición $f(a)f(b) < 0$ significa que f tiene signos opuestos en los extremos del intervalo $[a, b]$. Supongamos, por ejemplo, que

$$f(a) < 0 \text{ y } f(b) > 0$$

y definimos $a_1 = a$ y $b_1 = b$. Tomemos m el punto medio de $[a, b]$. Si $f(m) = 0$ el teorema está probado; si $f(m) \neq 0$, entonces f cambia de signo en alguno de los intervalos $[a, m]$ o $[m, b]$. Supongamos, por ejemplo, $f(a) < 0$ y $f(m) > 0$ y pongamos $a_2 = a_1$ y $b_2 = m$. Procediendo recursivamente, o bien se encuentra un cero de f en alguna de las etapas, o bien se obtiene una sucesión $[a_n, b_n]$ en las condiciones del principio de encaje de Cantor. En el segundo caso, sea $\{c\} := \bigcap_n [a_n, b_n]$. Entonces se tiene $c = \lim_n a_n = \lim_n b_n$. Como $f(a_n) < 0$ y f es continua se tiene que $\lim_n f(a_n) = f(c) \leq 0$, y también al ser $f(b_n) > 0$ se tiene que $\lim_n f(b_n) = f(c) \geq 0$. Y de $0 \leq f(c) \leq 0$ se concluye que $f(c) = 0$. □

Usted ha aprendido en la enseñanza media a resolver de forma exacta ecuaciones de primer y segundo grado. Tal vez haya resuelto también ecuaciones bicuadradas y algunas ecuaciones algebraicas de grado superior. Esto podría crearle la imagen falsa de que «las ecuaciones se podrán resolver, aunque yo todavía no sepa como hacerlo». ¡Nada más alejado de la realidad! En manos de una herramienta como Maxima, que hace los cálculos con mucha agilidad, el Teorema de Bolzano se convierte en una herramienta poderosa para encontrar las soluciones reales aproximadas de ecuaciones de cualquier tipo.

Corolario 3.3.3 (Propiedad de los valores intermedios) *Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y z está comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = z$.*

Demostración: Basta aplicar el teorema anterior a la función continua g definida por $g(x) = f(x) - z$. □

El teorema de Bolzano 3.3.2 y la propiedad de los valores intermedios 3.3.3 son resultados equivalentes desde un punto de vista matemático. ¿Qué cree que significa esa afirmación? ¿Sabría demostrar que son equivalentes?
Haga un gráfico que visualice la propiedad de los valores intermedios. ¿Entiende ahora la idea geométrica que hay en la prueba de 3.3.3?

Los dos teoremas de este apartado son piezas clave en el desarrollo del análisis matemático. A propósito del teorema de Weierstrass escribía el gran matemático David Hilbert en 1897:

> *Con este teorema* [...] *Weierstrass creó una herramienta que hoy es indispensable a todos los matemáticos para otras investigaciones analíticas o aritméticas más refinadas.*

Sobre el teorema de Bolzano, de los valores intermedios, se han escrito muchas páginas. Era conocido, y utilizado, desde mucho antes, pero fue Bolzano el que en 1817 publica un panfleto, ya citado en la página 7, titulado: Una demostración puramente analítica de teorema que afirma que entre cada dos raíces que garantizan un resultado opuesto existe al menos una raíz real de la ecuación. Como el propio título indica Bolzano es el primero en intentar obtener una demostración del resultado, sin darlo por «evidente» y esto suponía, como ya hemos visto, abordar el fondo de muchas cuestiones todavía imprecisas; la noción de limite, de función continua, el sustrato numérico (la recta real y sus propiedades, en particular la propiedad del supremo), etc.
El panfleto de Bolzano, y otros de sus trabajos, permaneció prácticamente ignorado durante cincuenta años. Entretanto, en 1823, Cauchy incluye el teorema en uno de sus cursos publicados. Diversos historiadores han defendido la idea de que Cauchy tomó el resultado de Bolzano sin citar a éste, es decir, que Cauchy cometió plagio. La discusión sobre este tema sigue abierta, con grandes estudiosos de uno y otro lado.

Corolario 3.3.4 *Si I es un intervalo de $\mathbb{R}$ y f es una función continua definida en I, entonces $f(I)$ es un intervalo. Además si I es un intervalo cerrado y acotado, también $f(I)$ lo es.*

Demostración: Para probar que $f(I)$ es un intervalo necesitamos demostrar que dados $y_1 < y_2$ puntos arbitrarios de $f(I)$, cualquier punto z que cumpla $y_1 < z < y_2$ también pertenece a $f(I)$. Pero eso es inmediato aplicando la propiedad de los valores intermedios.

Una vez visto que $f(I)$ es un intervalo está claro que los extremos del mismo que llamaremos α y β cumplen que

$$\alpha = \inf\{f(x) : x \in I\} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{y} \quad \beta = \sup\{f(x) : x \in I\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Si I es cerrado y acotado, entonces $f(I)$ coincide con $[\alpha, \beta]$ debido el teorema de Weierstrass 3.3.1. □

3.3.2. Continuidad y monotonía. Función inversa

La existencia de inversa para funciones reales de variable real no requiere la continuidad. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es biyectiva, siendo $f^{-1} = f$, y no es continua. En este apartado analizaremos la existencia de inversa para funciones continuas y la continuidad de la función inversa y veremos que la respuesta a estas cuestiones depende de la relación existente entre continuidad y monotonía.

Definición 3.3.5 *Dada una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que f es*

(1) monótona creciente si para cualquier par de puntos $x_1 < x_2$ en I se cumple $f(x_1) \leq f(x_2)$;

(2) monótona decreciente si para cualquier par de puntos $x_1 < x_2$ en I se cumple $f(x_1) \geq f(x_2)$;

(3) estrictamente creciente si para cualquier par de puntos $x_1 < x_2$ en I se cumple $f(x_1) < f(x_2)$;

(4) estrictamente decreciente si para cualquier par de puntos $x_1 < x_2$ en I se cumple $f(x_1) > f(x_2)$;

(5) monótona si es monótona creciente o monótona decreciente;

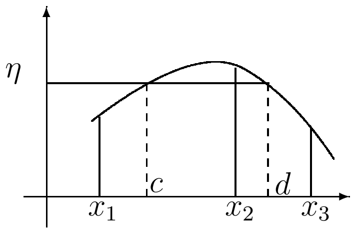
(6) estrictamente monótona si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Teorema 3.3.6 (Función inversa) *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua donde I es un intervalo arbitrario de $\mathbb{R}$. Entonces:*

(1) f es inyectiva si y sólo si es estrictamente monótona.

(2) Si f es estrictamente monótona, también lo es su inversa f^{-1} que, además, es continua.

Demostración:



(1) Es claro que si f es estrictamente monótona, entonces es inyectiva, ya que si $x_1 < x_2$ no puede ser $f(x_1) = f(x_2)$; esto prueba el recíproco del primer ítem. Para demostrar el directo de dicho ítem, supongamos, por reducción al absurdo, que siendo f inyectiva no fuera estrictamente monótona. Entonces, como f es inyectiva, para toda terna $x_1 < x_2 < x_3$ los valores $f(x_1), f(x_2)$ y $f(x_3)$ son diferentes dos a dos. Si f fuera estrictamente monótona habría de ser: o bien

$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$, o bien $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$. Así pues, negar la monotonía estricta equivale a que exista una terna $x_1 < x_2 < x_3$ tal que, o bien $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ o bien $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. En ambos casos la idea de la prueba es la misma y se basa en la propiedad de los valores intermedios. Siguiendo el esquema gráfico, supondremos que $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ y además $f(x_1) \geq f(x_3)$. Tomando η en el intervalo $(f(x_1), f(x_2))$ por la propiedad de los valores intermedios debe existir $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f(c) = \eta$ y también debe existir $d \in (x_2, x_3)$ tal que $f(d) = \eta$, pero eso contradice el que f sea inyectiva.

(2) Por el corolario 3.3.4, $J := f(I)$ es un intervalo y siendo f estrictamente monótona es inyectiva, por lo que existe la función inversa $f^{-1} : J = f(I) \longrightarrow I$ que es también una biyección estrictamente monótona. Supongamos, por ejemplo, que sea estrictamente creciente (el razonamiento es similar para funciones estrictamente decrecientes) y sea $d \in J$ de modo que no sea un punto extremo del intervalo. Vamos a probar la continuidad de f^{-1} en el punto d[1]. Sea $c = f^{-1}(d)$, o lo que es lo mismo $f(c) = d$. Como la función f es estrictamente monótona c no puede ser el extremo del intervalo I. Dado $\varepsilon > 0$ se trata entonces de garantizar la existencia de $\delta > 0$ de modo que se tenga

$$f^{-1}\left(B(d, \delta)\right) \subset B(c, \varepsilon).$$

Pero como c no es un punto extremo de I existe $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ de modo que $(c - \varepsilon', c + \varepsilon') \subset I$ y por ser f estrictamente creciente se tiene que

$$(f(c - \varepsilon'), f(c + \varepsilon')) = f\Big((c - \varepsilon', c + \varepsilon')\Big)$$

es un intervalo que contiene a $f(c) = d$ y en consecuencia existe $\delta > 0$ tal que $B(d, \delta)$ está contenida en dicho intervalo siendo entonces claro, por el crecimiento estricto de f^{-1}, que

$$f^{-1}(B(d, \delta)) \subset (c - \varepsilon', c + \varepsilon') \subset (c - \varepsilon, c + \varepsilon) = B(c, \varepsilon).$$

En el caso en que d sea un punto extremo del intervalo J ($f^{-1}(d) = c$ lo será del intervalo I) es sencillo modificar ligeramente la prueba anterior, utilizando las mismas ideas, para obtener el mismo resultado. $\square$

El corolario que sigue muestra que la continuidad en el teorema anterior es esencial.

Corolario 3.3.7 *Sean I, J intervalos de $\mathbb{R}$ y sea $f : I \longrightarrow J$ biyectiva. Entonces f es continua si y sólo si f es estrictamente monótona.*

[1] El lector debería de ayudarse de un esquema para facilitarse el seguimiento del razonamiento.

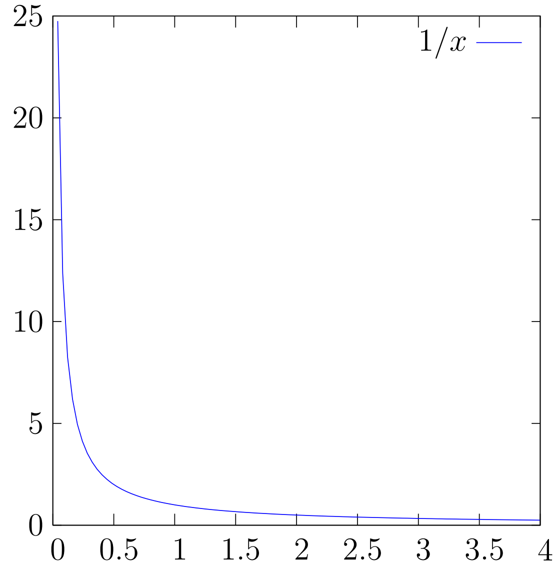


Figura 3.8: Una función no uniformemente continua

Demostración: El directo (continua implica estrictamente monótona) está contenido en la proposición 3.3.6. Para el recíproco observemos que, por ser f estrictamente monótona, existen los limites laterales $f(x_0^-)$ y $f(x_0^+)$ en cada $x_0 \in I$. La función f es continua en x_0 si y sólo sí $f(x_0^-) = f(x_0^+)$. Si para algún x_0 fueran diferentes, por ejemplo, $f(x_0^-) < f(x_0^+)$, entonces los puntos de intervalo $(f(x_0^-), f(x_0^+)) \subset J = f(I)$ deberían tener antiimagen que, por la monotonía no podría ser ni mayor estrictamente que x_0 , ni menor estrictamente que x_0. Esto iría contra la hipótesis de que f es biyectiva, y en consecuencia ha de ser $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$, o dicho de otra manera, la función f es continua en cada punto x_0 de su dominio. □

3.4. Continuidad uniforme

Una función f es continua en un punto c si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. El valor de δ depende, obviamente, del valor de ε, pero, a priori, también puede depender del valor de c. La gráfica de la figura 3.8 resulta bastante sugerente al respecto.

> Maxima puede ayudarle a visualizar gráficamente la situación. Las ideas utilizadas en la figura 3.2 de la página 108 resultan adecuadas.

Si se puede conseguir que el valor de δ dependa únicamente de ε para todos los puntos del dominio, se dice que la función es uniformemente continua. De forma precisa:

Definición 3.4.1 *Se dice que la función $f : D \subset \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ es uniformemente continua (en D) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $x, y \in D$ arbitrarios, si se verifica $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Seguramente la figura 3.8 le predispondrá a «convencerse» de que para la función f definida por $f(x) = 1/x$, tomando $\varepsilon = 0.1$ no es posible elegir un *mismo* número δ que sirva para todos los puntos c del intervalo $(0, \infty)$. Trate de demostrarlo rigurosamente. Consideremos ahora la función $g : (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por la misma fórmula $g(x) = 1/x$. Para $\varepsilon = 0.1$ ¿se podría elegir un δ que sirviera para todos los puntos de $(1, \infty)$? Si lo necesita, ayúdese de Maxima.

Observe que la continuidad uniforme depende del conjunto donde se esté considerando definida la función. Evidentemente toda función uniformemente continua en un conjunto es continua en dicho conjunto, pero, en general, el recíproco no es cierto, como ya hemos comprobado anteriormente. El teorema que sigue establece la equivalencia de ambos conceptos en las bolas cerradas de $\mathbb{K}$, en particular en los intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$.

Teorema 3.4.2 (Heine) *Toda función continua definida en una bola cerrada y acotada $B[a, r]$ y con valores en $\mathbb{K}$ es uniformemente continua.*

Demostración: Si una función continua en $B[a, r]$ no fuera uniformemente continua, existiría $\varepsilon > 0$ para el que no se cumple la condición de continuidad uniforme y en consecuencia existirían sucesiones $(x_n)_n$ y $(x'_n)_n$ en $B[a, r]$ tales que $|x_n - x'_n| < 1/n$ y $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass (2.3.4) existen subsucesiones $(x_{n_k})_k$ y $(x'_{n_k})_k$ de las anteriores que son convergentes a un mismo punto (¿por qué?), digamos $z \in B[a, r]$. Usando la continuidad de f en z se tendría entonces

$$\lim_k f(x_{n_k}) = f(z) = \lim_k f(x_{n'_k})$$

pero por otra parte $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon > 0$ con lo que pasando al límite se obtendría $0 \geq \varepsilon$, lo cual es absurdo. □

De nuevo, como en el teorema de Weierstrass (3.3.1), la demostración se basa en el hecho de que las sucesiones en $B[a, r]$ poseen subsucesiones convergentes a un punto de $B[a, r]$ y, por tanto, el teorema de Heine mantiene su validez cuando se reemplaza una bola cerrada $B[a, r]$ por un conjunto que tiene esa propiedad respecto a las sucesiones, éstos son los conjuntos denominados compactos (esto último se demuestra en Topología).

La función $\operatorname{sen} x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Los gráficos que aparecen en la figura 3.10 muestran la gráfica de esta función en dos intervalos de igual longitud ($[0, 4\pi]$ y $[6\pi, 8\pi]$) y ayudan a visualizar geométricamente la significación de la falta de continuidad uniforme.

Figura 3.9: Heinrich Eduard Heine (Berlin, 1821 – Halle, 1881). Biografía en MacTutor.

Los gráficos de las figuras 3.10 y 3.11 han sido realizados con Maxima. Compruebe el código usado y haga sus propias experiencias en otros intervalos.

Asimismo, la función real $x \operatorname{sen} x$, que es un producto de funciones uniformemente continuas, tampoco es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, tal y como se intuye a partir de dos fragmentos de la gráfica que aparecen dibujados en la figura 3.11 en dos intervalos diferentes de igual longitud con la misma escala en el eje OY.

La noción de continuidad uniforme fue surgiendo muy poco a poco: ausente de forma explícita en el trabajo de Cauchy sobre integración (donde es imprescindible), parece haber sido considerada por Dirichlet, en primer lugar, en 1854, y por Weierstrass en 1861. Apareció por primera vez en una publicación en 1870, en un trabajo de Eduard Heine. El teorema que afirma que una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua aparece publicado en otro trabajo de Heine de 1872, aunque él mismo parece asignar un papel en este y otros de sus resultados a Weierstrass, Schwarz y Cantor.

Heine define la continuidad uniforme en la forma siguiente:

> *Una función $f(x)$ se llama [...] uniformemente continua desde $x = a$ hasta $x = b$, si para cualquier cantidad positiva dada ε, por pequeña que sea, existe otra cantidad positiva η_0 tal que para todos los valores positivos η menores que η_0, $f(x \pm \eta) - f(x)$ es menor que ε. Cualquiera que sea el valor que demos a x, suponiendo sólo que x y $x \pm \eta$ pertenezcan ambos a la región entre a y b; el mismo η_0 debe satisfacer la [propiedad] exigida.*

Figura 3.10: Gráficas de la función $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ en $[0, 2\pi]$ y $[6\pi, 8\pi]$

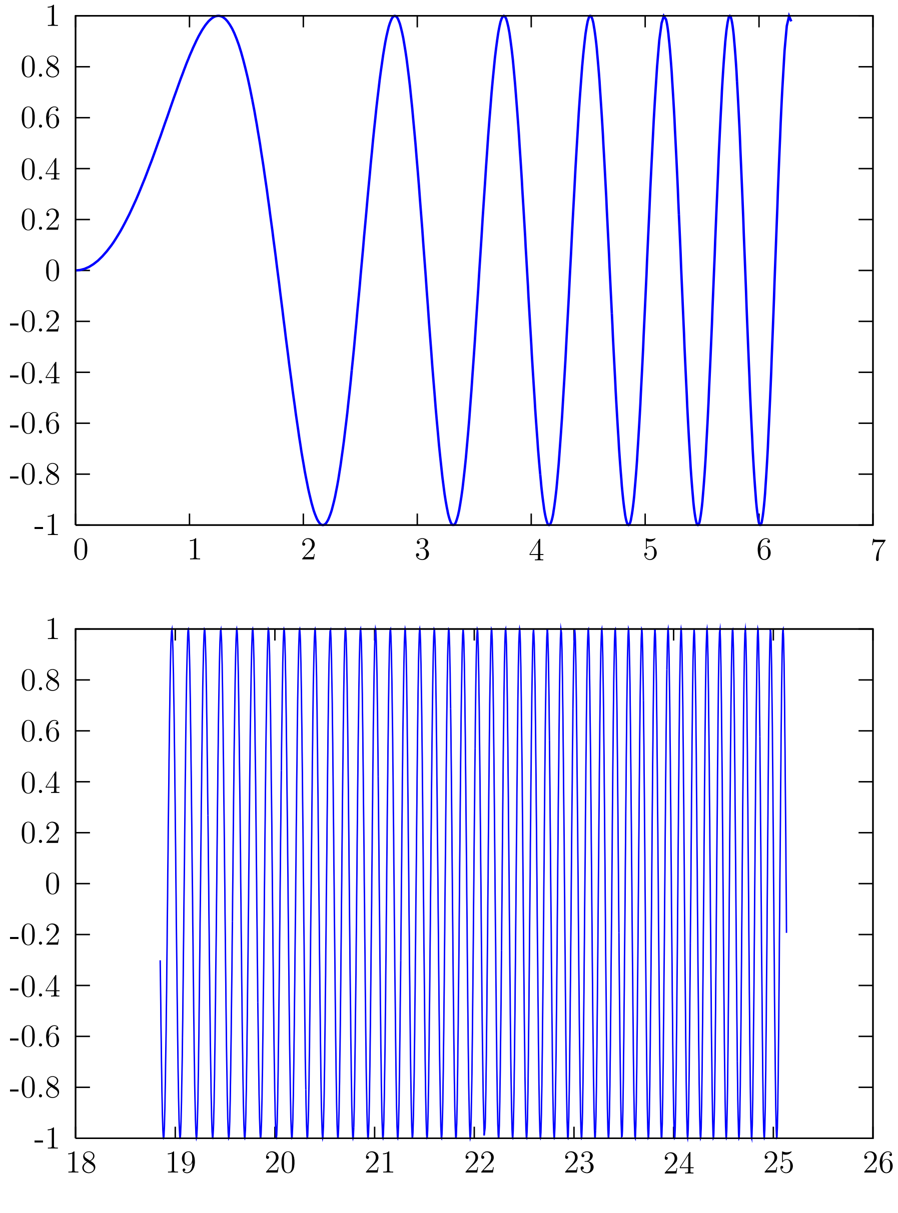
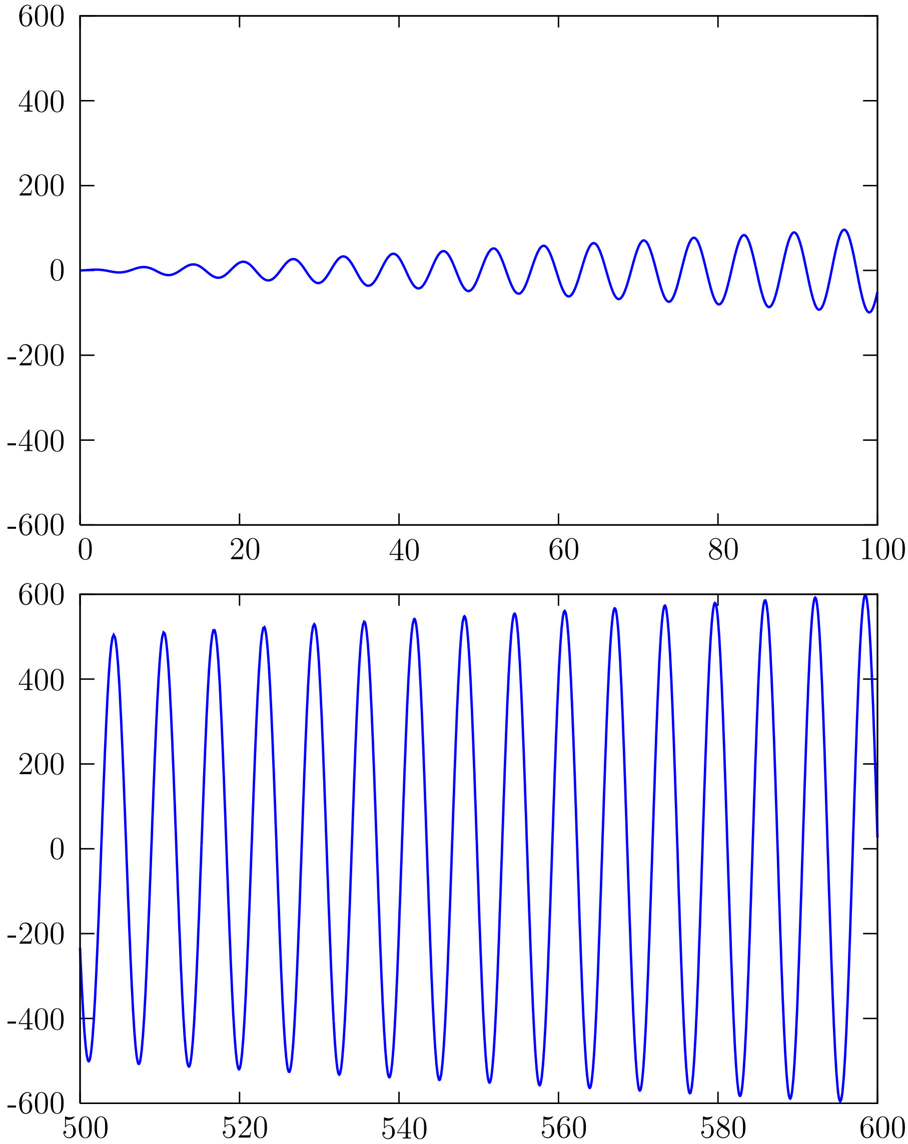


Figura 3.11: Gráfica de la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$ (producto de dos funciones uniformemente continuas) en dos intervalos diferentes de igual longitud sin escalar el eje OY



3.5. Ejercicios

Resueltos

3.5.1 *Estudie la existencia de los siguientes límites y calcule su valor o los valores de los límites laterales correspondientes, cuando existan:*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^2+x} \qquad \lim_{x\to 0}(2+\operatorname{sen}(1/x)) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{2+\operatorname{sen}(1/x)}$$

SOLUCIÓN: Numerador y denominador de $\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ son funciones continuas por lo que, salvo que de lugar a indeterminación, el límite coincide con el cociente entre los límites de numerador y denominador. En este caso ambos son cero y se produce la indeterminación. Pero al tratarse de polinomios que se anulan para $x = 2$, el teorema de Fubini garantiza que ambos son divisibles por $x - 2$, asi que, para cada $x \neq 2$ se tiene la igualdad

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(x+3)}{(x+2)}$$

y ahora es claro que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \frac{5}{4}.$$

Para el caso $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^2+x}$ tenemos otra vez una indeterminación. De nuevo podemos dividir numerador y denominador por x. Pero, ahora $|x|/x$, que es lo que se conoce como «signo de x», es la función σ definida por

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y entonces se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$$

mientras que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x^2+x} = \lim_{x\to 0,x^-} \frac{-1}{x+1} = -1.$$

Así pues, el límite no existe aunque existen los límites laterales.

$\lim_{x\to 0}(2+\operatorname{sen}(1/x)) = 2+\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen}(1/x))$, pero este límite no existe porque tomando las sucesiones convergentes a cero definidas por $x_n = 1/(2n\pi)$ y $x_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$ se verifica que

$$\lim_{n\to\infty}(\operatorname{sen}(1/x_n)) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty}(\operatorname{sen}(1/x'_n)).$$

Por último en el caso de $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{2+\operatorname{sen}(1/x)}$ el numerador tiene límite cero y el denominador no tiene límite. A pesar de ello existe el límite buscado y vale 0 ya que

$$0 \leq \left|\frac{\sqrt{x}}{2+\operatorname{sen}(1/x)}\right| \leq \frac{|\sqrt{x}|}{1}, \quad \text{al ser } 1 \leq 2+\operatorname{sen}(1/x) \leq 3$$

y si

$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{\sqrt{x}}{2+\operatorname{sen}(1/x)}\right| = 0$$

también es

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{2+\operatorname{sen}(1/x)} = 0$$

y por tanto el límite es 0. □

3.5.2 Estudie el dominio y la continuidad de las siguientes funciones.

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \quad g(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x} \quad h(x) = \frac{\log(1+x) - \log(1-x)}{x}$$

Solución: Haciendo uso de la continuidad de ciertas funciones que hemos ido estableciendo en los ejemplos y de los resultados sobre operaciones con funciones continuas podemos afirmar:

1) La función f está definida inicialmente para cualquier $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Además como la función $x \mapsto x$ es continua tambien lo son $x \mapsto x^2$ (por producto de continuas) y $x \mapsto 1/x$ si $x \neq 0$ (por cociente de continuas) y al ser continua la aplicación $y \mapsto \operatorname{sen} y$ también lo es (por composición de continuas) la función $x \mapsto \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$. Así que, finalmente, la función f es continua (por producto de dos continuas) en su dominio. ¿Qué ocurre en $x = 0$? En principio f no está definida, pero podríamos plantearnos si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y de existir prolongar la función f que ya es continua en $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ haciendo $f(0) := \lim_{x\to 0} f(x)$. Pero como el seno es una función acotada, se tiene que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}(1/x) = 0$.

2) La función g es un cociente de polinomios y, por tanto, es continua (por cociente de continuas) en todos los puntos en los que el denominador no se anule, que en nuestro caso es $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ siendo este el dominio inicial para g. En cambio en $x = 0$ numerador y denominador se anulan: podemos dividir ambos por x y extender el dominio de g a todo $\mathbb{R}$, definiendo $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x)$ a tal fin hacemos uso de la ecuación ciclotómica

$$(a^{n+1} - b^{n+1}) = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n)$$

y tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{((1+x)-1)((1+x)^n + (1+x)^{n-1} + \cdots + 1)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}((1+x)^n + (1+x)^{n-1} + \cdots + 1) = n+1\end{aligned}$$

debido a que hay $n+1$ sumandos cada uno de los cuales tiene límite 1. □

3.5.3 *¿Qué se puede decir de una función real continua que sólo toma valores racionales?*

Solución: Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como f es continua si existieran $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ de modo, que $f(x_1) < f(x_2)$, entonces, por la propiedad de los valores intermedios, f debe tomar todos los valores del intervalo $[f(x_1), f(x_2)]$ pero en ese intervalo hay puntos que no son racionales y f sólo toma, por hipótesis, valores racionales, por tanto, es imposible que existan dos puntos en los que el valor de f sea diferente. Dicho de otro modo, f es constante. □

3.5.4 *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua que verifica*

$$|f(x) - f(y)| \geq M|x-y|$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$, donde $M > 0$ es una constante. Pruebe que f es estrictamente monótona y deduzca que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Solución: Al ser f continua, es estrictamente monótona si y sólo es inyectiva. Pero si $f(x) = f(y)$ como $|f(x) - f(y)| \geq M|x-y|$ se obtiene que $x = y$, es decir, f es inyectiva. En consecuencia, f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente. Además $f(\mathbb{R})$ es un intervalo por ser f continua; pero como se tiene que $|f(x) - f(0)| \geq M|x|$ se cumple que $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x) - f(0)| = +\infty$ y, en consecuencia $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = +\infty$. Lo cual requiere que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. □

3.5.5 *Sea $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es uniformemente continua en (a, b).

(2) Existe una función continua $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que restringida al intervalo (a, b) coincide con f.

Solución: Si existe la función F en las condiciones de (2), entonces F es uniformemente continua en $[a, b]$ por el teorema de Heine; es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que cualesquiera que sean $x, y \in [a, b]$ tales que

$|x-y|<\delta$ se verifica que $|F(x)-F(y)|<\varepsilon$. En particular, si $x,y\in(a,b)$ cumplen que $|x-y|<\delta$ se verifica que $|F(x)-F(y)|=|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Y esto es exactamente afirmar que f es uniformemente continua.

Supongamos ahora que f es uniformemente continua y queremos ver que existe la función F en las condiciones exigidas. Si tal F existe, ya conocemos su valor en todos los puntos de $[a,b]$, salvo en a y en b (porque coincide con f, que no está definida en los extremos); pero como es continua en a y en b ha de ser

$$F(a)=\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}f(x),\quad \text{siendo } x\neq a$$
$$F(b)=\lim_{x\to b}F(x)=\lim_{x\to b}f(x),\quad \text{siendo } x\neq b.$$

En consecuencia, lo único que tenemos que probar es que existen los siguientes límites:

$$\lim_{x\to a}f(x),\quad \lim_{x\to b}f(x).$$

Probaremos sólo la existencia de $\lim_{x\to a}f(x)$ porque el otro es análogo. De acuerdo con la condición de Cauchy de existencia de límites de funciones, basta demostrar que para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si

$$x,y\in B(a,\delta)\cap(a,b)\quad \text{se tiene}\quad |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Pero como f es uniformemente continua para el ε dado existe $\delta>0$ tal que

$$\text{si } |x-y|<\delta, x,y\in(a,b),\quad \text{entonces}\quad |f(x)-f(y)|<\varepsilon,$$

y hemos conseguido así encontrar el δ que necesitábamos. $\square$

Ejercicios propuestos

3.1) Calcule $\lambda = \lim_{x\longrightarrow 3} \dfrac{x-2}{2(1+x)}$ y acote superiormente los números $\delta > 0$ para los que $|x-3| < \delta$ implica

$$\left|\lambda - \frac{x-2}{2(1+x)}\right| \leq \frac{1}{100}.$$

3.2) Escriba con todo detalle, en términos de ε-δ y de bolas o entornos, la definición de cada una de las siguientes afirmaciones ($a, L \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{lll} \lim_{x\to a} f(x) = +\infty & \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty & \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = L & \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty & \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to -\infty} f(x) = L & \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty & \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \end{array}$$

3.3) Determine los dominios de definición y los puntos de discontinuidad de las funciones:

$$\begin{array}{llll} f(x) = [2x] & f(x) = \sqrt{x-[x]} & f(x) = e^{-\frac{1}{(x-1)^2}} & f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}] \\ f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{|x-1|} & f(x) = x^x & f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \cos(\alpha/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} & \end{array}$$

3.4) Calcule los siguientes límites ordinarios (o laterales):

$$\begin{array}{lll} \lim_{x\longrightarrow a} \frac{x^n-a^n}{x-a} & \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} & \lim_{x\longrightarrow \infty}(\sqrt[3]{x^3+1} - x) \\ \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} & \lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\operatorname{tg} x}{\cos 2x} & \lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}\right) \\ \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{(x^4-1)(x^5-1)}{(x^3-1)(x^6-1)} & \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2x-\operatorname{sen} x}{x^2+1} & \lim_{x\longrightarrow a}(a^2-x^2) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} \\ \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{6}{4+e^{\frac{1}{x}}} & \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1} & \lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+2^{\operatorname{tg} x}} \\ \lim_{x\longrightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1} & \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x} & \\ \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{6x^{\frac{4}{3}}+1001x}{\frac{1}{1001}x^2+x} & \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1} & \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x} \\ \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1} & \lim_{x\longrightarrow +\infty} \sqrt[x]{x} & \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{8x^3+2})-3x}{2} \end{array}$$

3.5) Dadas dos funciones reales f y g continuas en x_0. Pruebe que las funciones $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ y $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ también son continuas en x_0.

3.6) Sean I un intervalo de la recta real, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in I$. Suponiendo que para cada $n \in \mathbb{R}$ existe un $\delta_n > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \tfrac{n+1}{1+2^n} \quad \text{si} \quad |x - x_0| < \delta_n, \quad x \in I,$$

¿se puede afirmar que f es continua en x_0?

3.7) Encontrar una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que solamente sea discontinua en los puntos del conjunto $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{R}\}$.

3.8) Demuestre que las siguientes ecuaciones tienen solución:

$$x - \operatorname{sen} x - 5 = 0 \qquad x^7 + \frac{213}{2 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 12.$$

Apóyese en el grafismo y en el comando `find_root` de MAXIMA para calcular las soluciones aproximadas de estas ecuaciones.

3.9) Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $f(a) < g(a)$ y $g(b) < f(b)$. Pruebe que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene solución en $[a, b]$.

3.10) Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ una función continua. Pruebe que la ecuación $f(x) = x$ tiene solución en $[0, 1]$.

3.11) Un escalador parte, a la salida del sol, para conquistar la cima de una montaña. Tras varios intentos en que asciende y desciende consigue conquistar finalmente la cima a la puesta del sol. Pasa la noche en la cumbre y, a la salida del sol, empieza el descenso por el mismo camino, llegando a la base también a la puesta del sol. Pruebe que a una misma hora de los dos días se encontró en la misma altitud.

3.12) Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y p, q reales no negativos tales que $p + q = 1$. Pruebe que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = pf(a) + qf(b)$.

3.13) Pruebe que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua con $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 1$, entonces f tiene un máximo o un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$.

3.14) Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in [a, b]$. Demuestre que existe un número real $k > 0$ tal que $|f(x) - x| > k$ para todo $x \in [a, b]$.

3.15) Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que existen los límites $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ y son finitos. Demuestre que f es uniformemente continua en (a, b).

3.16) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y periódica de periodo $T > 0$ (es decir, $f(t+T) = f(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$). Pruebe que $f(\mathbb{R})$ es un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ y que f es uniformemente continua.

3.17) Sea I un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en I.

a) Pruebe que si f es uniformemente continua, entonces $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy.

b) Suponga que f es continua, pero no uniformemente: muestre con un ejemplo que la afirmación anterior es falsa.

c) Suponga otra vez que f es continua, pero no uniformemente. ¿Puede dar una condición sobre I que asegure que la afirmación del primer apartado es cierta?

3.18) Sea $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua en z_0. Pruebe que las funciones $\mathbb{R}e f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$ y $|f(z)|$ son continuas en z_0.

3.19) Discuta, en cada caso, la continuidad uniforme en I de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^{\frac{1}{x^2-x}}, I = (0,1); & f(x) = \cos(x^2), I = \mathbb{R}; \\ f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{|x|}), I = \mathbb{R}; & f(x) = \log(x + x \operatorname{sen} \frac{1}{x}), I = [1, +\infty); \\ f(x) = x \operatorname{sen} x, I = \mathbb{R}; & f(x) = (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}, I = [0, +\infty); \end{array}$$

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona continua y acotada.

3.20) Si $[y]$ denota la parte entera del número real y, estudie los siguientes límites

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{[x]}{x} \text{ y } \lim_{x\longrightarrow 0} x[\frac{1}{x}]$$

3.21) Sea $f : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en cada intervalo acotado de $[0, +\infty]$.

a) Si existe el límite $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}(f(x+1) - f(x)) = \lambda$, pruebe que también existe el límite $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$.

b) Ponga un ejemplo que muestre la falsedad de la implicación recíproca.

3.22) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y no identicamente nula que satisface la ecuación

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

para cada par de números reales x e y.

a) ¿Cuánto vale $f(0)$?

b) Si $a := f(1)$, pruebe que $a > 0$

c) Determine el valor de $f(n)$ en términos de a cuando $n \in \mathbb{N}$. Y también cuando $n \in \mathbb{Z}$.

d) Determine el valor de $f(1/n)$ para $n \in \mathbb{N}$ en términos de a.

e) Determine el valor de $f(p/q)$ para $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ en términos de a

f) ¿Cuánto vale $f(x)$?

3.23) Sea $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ una función continua tal que existe una constante $0 < k < 1$ de modo que $|f(x) - f(y)| < k|x - y|$. Consideramos la sucesión $(x_n)_n$ definida a partir de un punto arbitrario $x_1 \in [a, b]$ por la fórmula $x_{n+1} = f(x_n)$. Pruebe que la sucesión $(x_n)_n$ tiene límite. Si denotamos con z dicho límite, pruebe que se verifica $f(z) = z$ y que además sólo existe una solución de la ecuación $f(x) = x$.

3.24) Sea $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ creciente tal que $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ sea decreciente. Pruebe que f es continua.