NUEVAS ORIENTACIONES SOBRE LOS CONTENIDOS DE LA EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD 2020 (EBAU 2020)

Adaptación de las pruebas como consecuencia de la situación sociosanitaria provocada por el Covid-19

Matemáticas II

El objeto de este documento es el de facilitar a los profesores y alumnos de Bachillerato la preparación específica del examen de Matemáticas II de este curso académico 2019-2020 en sus dos convocatorias (julio y septiembre), con las adaptaciones pertinentes motivadas por el nuevo escenario como consecuencia de la situación sociosanitaria provocada por el Covid-19.

Como novedad, y siguiendo las medidas excepcionales de incremento de la opcionalidad adoptadas por la Comisión Organizadora, el examen de Matemáticas II para la convocatoria EBAU 2020 (julio y septiembre) consistirá en un único examen con ocho cuestiones de idéntico valor, pudiendo el estudiante responder a un máximo de cuatro cuestiones, **a su libre elección y en el orden que desee**. Cada cuestión tendrá una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de cuatro cuestiones, sólo se corregirán las cuatro primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Como es costumbre, solo se podrán usar las tablas estadísticas que se proporcionen con el examen y no se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

De esta forma, el examen consistirá en la resolución de un máximo de **cuatro cuestiones**, de carácter eminentemente práctico, **elegidas libremente** por el alumno de entre un total de ocho cuestiones. Las ocho cuestiones se pueden agrupar por bloques temáticos de la siguiente manera, pero insistimos en que se pueden escoger libremente un máximo de cuatro y en cualquier orden, **independientemente de que pertenezcan o no al mismo bloque temático**:

Cuestiones 1 y 2: Del bloque de Números y Álgebra (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 3 y 4: Del bloque de Análisis (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 5 y 6: Del bloque de Geometría (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 7 y 8: Del bloque de Estadística y Probabilidad (2,5 puntos una).

Las cuestiones que se preguntarán en el examen serán de uno de los siguientes tipos, si bien una misma cuestión del examen puede incluir contenidos de distintos tipos. Con cada cuestión se intenta cubrir algunos de los estándares de aprendizaje evaluables que aparecen en la matriz de especificaciones de Matemáticas II. He añadido, a modo de ejemplo, ejercicios tipo con los cuales poder evaluar dichos estándares (estos ejercicios han sido elegidos, esencialmente, de exámenes PAU de Matemáticas II y Matemáticas para las CCSS de años anteriores). Hay que entender que esta lista de ejercicios, por la propia naturaleza de nuestra asignatura, no es exhaustiva, y podríamos redactar problemas muy distintos a los que a continuación aparecen.

Cuestiones 1 y 2. Bloque de Números y Álgebra (2,5 puntos cada una)

a) Planteamiento, discusión y, en su caso, resolución de sistemas de ecuaciones lineales dependientes, a lo más, de un parámetro.

- Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes.
- Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.
- Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos

Ejemplo.

Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & 5 \\ ax & + & & & 2z & = & 0 \\ & & ay & - & z & = & a \end{array}\right.$$

a) Determine para qué valores del parámetro a el sistema tiene solución única. Calcule dicha solución para $a = 1$.

b) Determine para qué valor del parámetro a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) Determine para qué valor del parámetro a el sistema no tiene solución.

Ejemplo.

Un cajero automático contiene solo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe total de 3000 euros. Sabiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcule cuántos billetes hay de cada tipo.

b) Operaciones con matrices. Resolución de ecuaciones matriciales. Cálculo de matrices inversas.

- Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales.
- Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente.
- Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado.

Ejemplo.

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Compruebe que ambas matrices son regulares (o invertibles) y calcule sus correspondientes matrices inversas.

b) Determine la matriz X que cumple la ecuación $AXB = A + B$.

Ejemplo.

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) ¿Cuál será la expresión general de la potencia A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$?

Cuestiones 3 y 4. Bloque de Análisis (2,5 puntos cada una)

a) Cálculo de límites de funciones y resolución de indeterminaciones por los distintos métodos, incluyendo la regla de L'Hôpital.

- Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad.
- Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.
- Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites.

Ejemplo.

Calcule:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-6}{x+1}\right)^{\frac{x^2+5}{x+3}}, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen} x(1-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

Ejemplo.

Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x+\operatorname{sen} x)}{x}.$$

b) Aplicaciones de la derivada al estudio del crecimiento, decrecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos de una función y a la resolución de problemas de optimización.

- Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.
- Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.

Ejemplo.

Considere la función $f(x) = x\sqrt{18-x^2}$ con $-4 < x < 4$.

a) Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus puntos críticos.

b) Justifique si la función $f(x)$ tiene algún máximo o mínimo.

Ejemplo.

Halle el rectángulo de mayor área que se puede inscribir en un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5, siendo los lados del rectángulo paralelos a los catetos de dicho triángulo.

c) Cálculo de primitivas mediante métodos básicos, incluyendo el método de cambio de variables (o método de sustitución) y el método de integración por partes. Se incluyen la integrales racionales que no precisen del método de descomposición en fracciones simples.

- Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

Ejemplo.

Calcule la integral indefinida $\int \tan x\, dx$. De todas las primitivas de la función $f(x) = \tan x$, encuentre la que pasa por el punto de coordenadas $(0, 1)$.

d) Aplicación de la regla de Barrow al cálculo de integrales definidas de los modelos anteriores y al cálculo de áreas de regiones planas sencillas.

- Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.

Ejemplo.

Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\, dx$. Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, y la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.

Cuestiones 5 y 6. Bloque de Geometría (2,5 puntos cada una)

a) Determinación de ecuaciones de rectas y planos en el espacio a partir de datos geométricos.

- Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal.
- Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas.
- Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente.
- Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.

b) Estudio de la distancia, de la posición relativa, de la perpendicularidad y/o del paralelismo de puntos, rectas y planos. En su caso, determinación de los puntos de corte, del ángulo que forman o de la distancia entre ellos.

- Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos.
- Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

Ejemplo.

Considere la recta r y el plano π dados por las ecuaciones siguientes

$$r: \quad \frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{5} \quad \text{y} \quad \pi : x - 2y + z = -3$$

a) Compruebe que la recta r es paralela al plano π y calcule la distancia entre ellos.

b) Determine la recta que pasa por el punto $P = (1, 0, 2)$ y es perpendicular al plano π. Calcule la intersección de dicha recta con el plano π.

c) Resolución de problemas métricos referidos al área de figuras planas sencillas, como triángulos, cuadrados, rectángulos o paralelogramos, o al volumen de figuras sólidas sencillas, como tetraedros o paralelepípedos.

- Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.
- Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.
- Conoce el producto mixto de tres vectores, su significado geométrico, su expresión analítica y propiedades.
- Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

Ejemplo.

Considere los puntos $P = (1,1,3)$ y $Q = (1,5,0)$ y la recta r dada por la ecuación:

$$r : \begin{cases} 2x - y - 2z & = & -3 \\ -x + y & = & 4 \end{cases}$$

a) Compruebe que el punto P no está en la recta r y que el punto Q sí lo está.

b) Determine el punto R de la recta r tal que el triángulo PQR sea un triángulo rectángulo en P (es decir, con ángulo recto en el vértice P).

c) Calcule el área de dicho triángulo PQR.

Cuestiones 7 y 8. Bloque de Estadística y Probabilidad (2,5 puntos cada una)

a) Cálculo de la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos. Aplicaciones del teorema de la probabilidad total y de la fórmula de Bayes.

- Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento.
- Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral.
- Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

Ejemplo.

Cierto día, la probabilidad de que llueva en la ciudad A es 0,3, la de que no llueva en la ciudad B es 0,6 y la de que llueva, al menos, en una de las dos ciudades es 0,5.

a) Calcule la probabilidad de no llueva en ninguna de las dos ciudades.

b) Calcule la probabilidad de que llueva en las dos. ¿Son independientes los sucesos “llueve en la ciudad A” y “llueve en la ciudad B”?

Ejemplo.

En una universidad, el 65 % de sus miembros son estudiantes, el 25 % profesores y el 10 % personal de administración y servicios. Son mujeres el 60 % de los estudiantes, el 47 % de los profesores y el 52 % del personal de administración y servicios. Si seleccionamos al azar un integrante de esa universidad:

a) Determine la probabilidad de que sea mujer.

b) Sabiendo que la persona seleccionada ha resultado ser hombre, halle la probabilidad de que sea estudiante.

b) Cálculo de la probabilidad de sucesos asociados a la distribución binomial y de sus parámetros.

- Identifica fenómenos que puedan modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica.
- Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

Ejemplo.

En un centro de fertilidad, el porcentaje de éxito de cada intento de inseminación es del 25 %. Escogidas 8 parejas al azar que se han sometido al tratamiento, determine:

a) Qué tipo de distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de embarazos conseguidos.

b) La probabilidad de que haya exactamente 2 embarazos.

c) La media y la desviación típica de la distribución.

c) Cálculo de la probabilidad de sucesos asociados a la distribución normal y de sus parámetros.

- Conoce las características y los parámetros de la distribución normal y valora su importancia en el mundo científico.
- Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que puedan modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

Ejemplo.

En un examen, el 35 % de los presentados obtuvo una mayor que 6, y el 40 % la obtuvo menor que 4. Sabiendo que las notas siguen una distribución normal, determine su media y su desviación típica.

Firmado electrónicamente en Murcia, a 8 de abril de 2020.

Luis J. Alías Linares
Coordinador Matemáticas II
Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia