

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO  
158 MATEMÁTICAS II. JUNIO 2015

**OBSERVACIONES IMPORTANTES:** El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

**OPCIÓN A:** No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

**CUESTIÓN A.1:**

- a) [1,5 puntos] Discuta el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro  $a$ :

$$\left. \begin{array}{l} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = 1 \end{array} \right\}.$$

- b) [1 punto] Si es posible, resuélvalo para el valor de  $a = -2$ .

**CUESTIÓN A.2:** Tres de los cuatro vértices de un tetraedro son los puntos  $A = (2, 1, 0)$ ,  $B = (3, 4, 0)$  y  $C = (5, 1, 0)$ . El cuarto vértice  $D$  está en la recta  $r$  que pasa por el punto  $(1, 2, 3)$  y tiene como vector director el vector  $(-1, 1, 1)$ .

- a) [0,75 puntos] Determine las ecuaciones paramétricas de la recta  $r$ .
- b) [1,75 puntos] Calcule las coordenadas del vértice  $D$  para que el volumen del tetraedro sea 9.

**Observación:** Hay dos soluciones distintas; basta con calcular una de ellas.

**CUESTIÓN A.3:**

- a) [1 punto] Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{2/x}}$ .
- b) [1,25 puntos] Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{2/x}}$ .
- c) [0,25 puntos] ¿Es continua la función  $f(x) = \frac{2 + e^{1/x}}{1 + e^{2/x}}$  en  $x = 0$ ? Justifique la respuesta.

**CUESTIÓN A.4:**

- a) [2 puntos] Calcule la integral indefinida  $\int 2x \arctg x \, dx$ .
- b) [0,5 puntos] De todas las primitivas de la función  $f(x) = 2x \arctg x$ , encuentre la que pasa por el punto de coordenadas  $(0, -2)$ .

**OPCIÓN B:** No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

**CUESTIÓN B.1: Observación:** Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Se dice que una matriz cuadrada  $A$  es **involutiva** si cumple que  $A^2 = I$ , donde  $I$  denota la matriz identidad.

- a) **[0,5 puntos]** Justifique razonadamente que toda matriz involutiva es regular (o invertible).
- b) **[2 puntos]** Determine para qué valores de los parámetros  $a$  y  $b$  la siguiente matriz es involutiva

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

**CUESTIÓN B.2: Observación:** Los apartados a) y b) de este ejercicio son absolutamente independientes y se pueden resolver en el orden que se quiera.

Considere la recta  $r$  y el plano  $\pi$  dados por las ecuaciones siguientes

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2} \quad \text{y} \quad \pi: 2x+y+z = -7$$

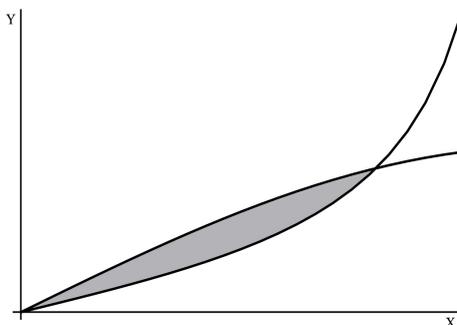
- a) **[1,25 puntos]** Compruebe que la recta  $r$  corta al plano  $\pi$  y calcule el ángulo que forman.
- b) **[1,25 puntos]** Determine el plano que pasa por el punto  $P = (2, -3, 3)$ , es paralelo a la recta  $r$  y es perpendicular al plano  $\pi$ .

**CUESTIÓN B.3: [2,5 puntos]** Considere la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln(x^2) + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determine los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  para los cuales la función  $f(x)$  es continua y derivable en todo  $\mathbb{R}$ .

**CUESTIÓN B.4:** Considere el recinto limitado por la gráfica de las funciones  $f(x) = 2\operatorname{sen}x$  y  $g(x) = \operatorname{tg}x$  en el primer cuadrante del plano  $XY$ , que está representado en la figura adjunta.



- a) **[0,75 puntos]** Determine los puntos de corte de dichas gráficas.
- b) **[1,75 puntos]** Calcule el área de dicho recinto.



## PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO

## 158 MATEMATICAS II. JUNIO 2015

## CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

## OBSERVACIONES GENERALES:

El corrector deberá ajustarse a los criterios de evaluación establecidos en este documento y en la reunión correspondiente.

En ningún caso se podrá puntuar por encima de la valoración indicada en cada apartado. Se procurará que, en lo posible, los errores en un apartado no afecten a otros apartados.

Los errores simples de cálculo restarán 0,25 puntos. Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar puntuación 0 en ese apartado. Si un error simple ha llevado a un problema más sencillo se disminuirá la puntuación.

Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución serán valoradas con 0 puntos.

Se valorará el correcto uso del vocabulario y de la notación. El alumno puede elegir el método que considere más oportuno para la resolución de una cuestión pero, si esto demuestra la falta de comprensión de conocimientos básicos, la puntuación final puede ser menor que la indicada para dicha cuestión.

## OBSERVACIONES PARTICULARES:

## OPCIÓN A

## CUESTIÓN A.1: [2,5 puntos]

## Apartado a)

Determinante de la matriz de coeficientes A y cálculo correcto de los valores del parámetro a para los cuales el determinante es cero ( $a=1$ ,  $a=-2$ ) [0,5 puntos].

Justificación de Sistema Compatible Determinado cuando a es distinto de 1 y de -2 [0,25 puntos].

Justificación de Sistema Compatible Indeterminado cuando  $a=1$  [0,25 puntos].

Justificación de Sistema Compatible Indeterminado cuando  $a=-2$  [0,5 puntos].

**Apartado b)** Resolución correcta del sistema cuando  $a=-2$  (S.C.I. con infinitas soluciones dependientes de un parámetro) [1 punto].

## CUESTIÓN A.2: [2,5 puntos]

**Apartado a)** Cálculo correcto y justificado de las ecuaciones paramétricas de la recta [0,75 puntos].

**Apartado b)** Cálculo correcto y justificado del vértice D [1,75 puntos].

## CUESTIÓN A.3: [2,5 puntos]

**Apartado a)** Cálculo correcto y justificado del límite cuando x tiende a 0 por la izquierda, justificando que en ese caso  $1/x$  tiende a  $-\infty$  [1 punto].

**Apartado b)** Cálculo correcto y justificado del límite cuando  $x$  tiende a 0 por la derecha, justificando que en ese caso  $1/x$  tiende a  $+\infty$  y resolviendo la indeterminación del tipo  $\infty/\infty$  [1,25 puntos].

**Apartado c)** Justificación de que la función no es continua en  $x=0$  [0,25 puntos].

**CUESTIÓN A.4:** [2,5 puntos]

**Apartado a)** Cálculo correcto y justificado de la integral indefinida [2 puntos].

**Apartado b)** Cálculo correcto de la constante de integración [0,5 puntos].

**OPCIÓN B**

**CUESTIÓN B.1:** [2,5 puntos]

**Apartado a)**

Justificación correcta y razonada de que al ser  $A^2=I$  se tiene  $A^{-1}=A$  y por tanto  $A$  es regular. Otra forma es ver que  $|A^2|=|A|^2=|I|=1$  y, por lo tanto, debe  $|A|$  es distinto de 0 (de hecho,  $|A|=1$  o  $|A|=-1$ ) y por tanto  $A$  es regular [0,5 puntos].

**Apartado b)** Justificación correcta y razonada de que  $2a^2=1$  y  $b^2=1$  y, por lo tanto, debe ser  $a=\pm 1/\sqrt{2}$  y  $b=\pm 1$  [2 puntos].

**CUESTIÓN B.2:** [2,5 puntos]

**Apartado a)** Justificación correcta y razonada de que la recta corta al plano [0,75 puntos]. Cálculo correcto y razonado del ángulo de corte [0,5 puntos].

**Apartado b)** Cálculo correcto y razonado de la ecuación del plano, en cualquiera de sus modalidades [1,25 puntos].

**CUESTIÓN B.3:** [2,5 puntos]

Justificación de que la función  $f(x)$  es continua y derivable en todo  $x$  distinto de 1 [0,5 puntos].

Justificación de que  $f(x)$  es continua en  $x=1$  si y solo si  $a-2=b$  [1 punto].

Justificación de que  $f(x)$  es derivable en  $x=1$  si y solo si  $a=0$  y, por lo tanto,  $b=-2$  [1 punto].

**CUESTIÓN B.4:** [2,5 puntos]

**Apartado a)** Cálculo correcto y justificado de los puntos de corte [0,75 puntos].

**Apartado b)**

Cálculo del área aplicando la regla de Barrow [1,75 puntos]. Si solo se calculan las integrales indefinidas y son correctas, pero no se aplica bien la regla de Barrow, puntuar este apartado con 1,25 puntos.

## CORRESPONDENCIA CON EL PROGRAMA OFICIAL

Programa BORM, 10 de septiembre de 2008, páginas 28109-28110.

### OPCIÓN A

**CUESTIÓN A.1:** Álgebra lineal (Bloque 1).

Sistemas de ecuaciones lineales. Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, clasificación de los sistemas lineales según sus soluciones. Teorema de Rouché-Fröbenius.

**CUESTIÓN A.2:** Geometría (Bloque 2). Ecuaciones de rectas y planos en el espacio. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.

**CUESTIÓN A.3:** Análisis (Bloque 3). Concepto de límite de una función. Cálculo de límites. Continuidad de una función en un punto y en un intervalo. Propiedades elementales. Tipos de discontinuidad.

**CUESTIÓN A.4:** Análisis (Bloque 3). Primitiva de una función. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas.

### OPCIÓN B

**CUESTIÓN B.1:** Álgebra lineal (Bloque 1). Inversa de una matriz. Propiedades elementales de los determinantes. Operaciones con matrices.

**CUESTIÓN B.2:** Geometría (Bloque 2). Ecuaciones de rectas y planos en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas: incidencia, paralelismo y perpendicularidad, entre rectas y planos. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.

**CUESTIÓN B.3:** Análisis (Bloque 3). Concepto de límite de una función. Cálculo de límites. Continuidad de una función en un punto y en un intervalo. Derivada de una función en un punto.

**CUESTIÓN B.4:** Análisis (Bloque 3). Primitiva de una función. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Cálculo de integrales definidas. Regla de Barrow. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.