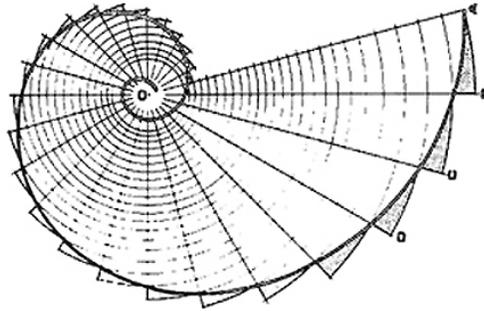


# III

## CONGRESO DE JÓVENES INVESTIGADORES *de la Real Sociedad Matemática Española*

---

Universidad de Murcia, 7-11 Septiembre, 2015



### SESIÓN GEOMETRÍA DIFERENCIAL

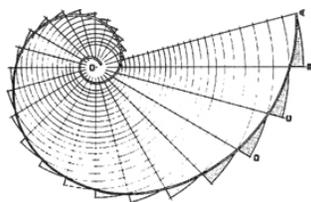
**Financiado por:**

Fundación Séneca-Agencia de Ciencia y Tecnología de la Región de Murcia, 19625/OC/14, con cargo al Programa “Jiménez de la Espada de Movilidad, Cooperación e Internacionalización”; plan propio de investigación de la Universidad de Murcia; Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Cartagena.

f SéNeCa(+)

CENTUM  
CIEN AÑOS DE LA UNIVERSIDAD DE MURCIA  
1915 | 2015





## Convexidad de superficies espaciales con curvatura media constante en el espacio de Lorentz-Minkowski

Alma L. Albuja<sup>1</sup>, Magdalena Caballero<sup>1</sup>, Rafael López<sup>2</sup>

Una superficie en el espacio 3-dimensional de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^3$  se dice que es espacial si la métrica inducida de  $\mathbb{L}^3$  es riemanniana. En esta charla consideraremos superficies espaciales compactas, con curvatura media constante no nula, inmersas en  $\mathbb{L}^3$  y con frontera (necesariamente) vacía, diferenciable y convexa.

En este contexto, nos preguntamos sobre la influencia de la geometría de la frontera en la superficie. En particular probamos que si la frontera es una curva plana, simple y con la propiedad de que interseque a cualquier rama de hipérbola en al menos cinco puntos, entonces nuestra superficie es estrictamente convexa. Obsérvese que, bajo estas hipótesis, la frontera es siempre una curva convexa, siendo los elipses un caso particular de dichas curvas.

La prueba de nuestro resultado sigue las ideas de Chen y Huang [3], que a su vez se inspiraron en un argumento previo de Alexandrov [2].

Finalmente, presentamos un ejemplo concreto que muestra que la convexidad de la frontera no implica convexidad de la superficie en general. Por tanto, no podemos eliminar la hipótesis acerca del mínimo número de puntos de intersección de nuestra curva con cualquier rama de hipérbola.

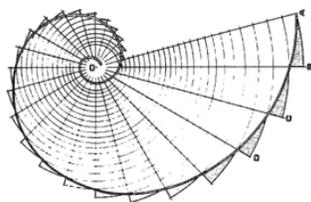
Los resultados presentados en esta charla están contenidos en [1].

## Referencias

- [1] A. L. Albuja, M. Caballero y R. López: Convexity of the solutions to the constant mean curvature spacelike surface equation in the Lorentz-Minkowski space, *J. Differ. Equations* **258** (7) (2015), 2364–2374.
- [2] A. D. Alexandrov: Uniqueness theorems for surfaces in the large, *Vestnik Leningrad. Univ.* **11** (19) (1956); *Amer. Math. Soc. Transl.* **21** (1962), 341–354.
- [3] J. T. Chen y W. H. Huang: Convexity of capillary surfaces in the outer space, *Invent. Math.* **67** (1982), 253–259.

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas  
Universidad de Córdoba  
Campus de Rabanales, 14071, Córdoba, España  
alma.albuja@uco.es  
magdalena.caballero@uco.es

<sup>2</sup>Departamento de Geometría y Topología  
Universidad de Granada  
Campus de Fuentenueva, 18071, Granada, España  
rcamino@ugr.es



## Subvariedades isotrópicas en el problema inverso para sistemas mecánicos con ligaduras

María Barbero Liñán<sup>1</sup>, Marta Farré Puiggali<sup>2</sup>, David Martín de Diego<sup>2</sup>

El problema inverso en cálculo de variaciones consiste en determinar si las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden,

$$\ddot{q} = \Gamma(t, q, \dot{q}), \quad q \in Q, \quad \dim Q = n,$$

corresponden a soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange para algún Lagrangiano regular  $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ . Este problema en el caso más general sigue estando abierto, solo se conocen las soluciones completas para sistemas de ecuaciones con una ó dos variables, [1] and [2] respectivamente. Helmholtz en 1887 [3] estudió el problema para sistemas generales de ecuaciones diferenciales de segundo orden en forma implícita.

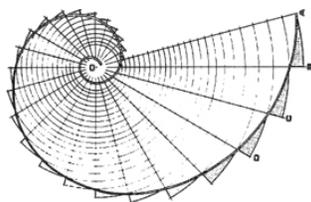
Nosotros extendemos la interpretación geométrica del problema inverso [4] para describir geométricamente el problema inverso para sistemas mecánicos con ligaduras no holónomas mediante subvariedades isotrópicas. Además, utilizaremos técnicas de geometría simpléctica [5] para extender subvariedades isotrópicas a Lagrangianas de manera que soluciones de un problema con ligaduras se pueden describir como soluciones de un problema variacional sin ligaduras. Estas técnicas las aplicaremos al problema del disco rodante vertical [6].

## Referencias

- [1] N. J. Sonin: About determining maximal and minimal properties of plane curves. *Warsawskie Uniwersitetskiye Izvestiya* **1-2**(1886), 1–68.
- [2] J. Douglas: Solution of the inverse problem of the calculus of variations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **50**(1941), 71–128.
- [3] H. von Helmholtz: Ueber die physikalische bedeutung des princips der kleinsten wirkung. *J. Reine Angew. Math.* **100**(1887), 137–166.
- [4] M. Crampin: On the differential geometry of the Euler-Lagrange equations, and the inverse problem of Lagrangian dynamics. *J. Phys. A.* **14**(10)(1981), 2567–2575.
- [5] I. Vaisman: *Symplectic geometry and secondary characteristic classes*. Progress in Mathematics vol 72, Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1987.
- [6] M. Barbero Liñán, M. Farré Puiggali, D. Martín de Diego. Isotropic submanifolds and the inverse problem for mechanical constrained systems. *J. Phys. A.* **48**(2015), 045210-045245.

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas  
Universidad Carlos III de Madrid  
Avenida de la Universidad 30, 28911 Leganés, Madrid, España  
Instituto de Ciencias Matemáticas (CSIC-UAM-UC3M-UCM)  
mbarbero@math.uc3m.es

<sup>2</sup>Instituto de Ciencias Matemáticas (CSIC-UAM-UC3M-UCM)  
C/Nicolás Cabrera 13-15, 28049 Madrid, España  
marta.farre@icmat.es, david.martin@icmat.es



## Estructuras geométricas del espacio de rayos de luz de un espacio-tiempo

Alfredo Bautista Santa-Cruz<sup>1</sup>, Alberto Iborat Latre<sup>2</sup>, Javier Lafuente López<sup>3</sup>

Dado un espacio-tiempo  $M$ , llamamos *rayo de luz* a la imagen de una geodésica luz inextensible. El conjunto de rayos de luz  $\mathcal{N}$  depende únicamente de la estructura causal (conforme) de  $M$ , y bajo ciertas condiciones  $\mathcal{N}$  es una variedad diferenciable y posee una estructura de contacto canónica heredada del fibrado tangente  $TM$ . Asociada a  $M$ , se puede definir una familia  $\Sigma$  de subvariedades compactas de  $\mathcal{N}$  que consisten en los rayos de luz que pasan por puntos de  $M$ . El espacio  $\Sigma$  se llama *espacio de cielos* y es una variedad difeomorfa a  $M$ . Los cielos de  $\Sigma$  son variedades Legendrianas de la variedad de contacto  $\mathcal{N}$  y las isotopías legendrianas con signo entre cielos, definen la estructura causal de  $M$  en  $\Sigma$ . Además, en cierto sentido,  $\Sigma$  permite reconstruir la estructura conforme del espacio-tiempo  $M$ .

En esta charla, se presentarán dichas estructuras y se analizarán para algunos ejemplos particulares.

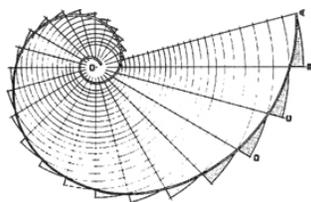
### Referencias

- [1] R. J. Low, The space of null geodesics (and a new causal boundary). En *Lecture Notes in Physics 692: Analytical and Numerical Approaches to Mathematical Relativity*, J. Frauendiener, D. Giulini, V. Perlick (eds.), 35–50. Springer, Berlin Heidelberg New York, 2006.
- [2] V. Chernov, S. Nemirovski: Legendrian Links, Causality, and the Low Conjecture, *Geometric and Functional Analysis* **19** (5) (2010) 1320–1333.
- [3] A. Bautista, A. Iborat, J. Lafuente: On the space of light rays of a spacetime and a reconstruction theorem by Low, *Classical and Quantum Gravity* **31** (2014) 075020.
- [4] A. Bautista, A. Iborat, J. Lafuente: Causality and skies: is non-refocussing necessary?, *Classical and Quantum Gravity* **32** (2015) 105002.

<sup>1</sup>Univ. Complutense de Madrid  
Avda. Complutense s/n, 28040 Madrid, Spain  
alfrebau@ucm.es  
y Dpto. de Matemáticas  
Univ. Carlos III de Madrid  
Avda. de la Universidad 30, 28911 Leganés, Madrid, Spain  
abautist@math.uc3m.es

<sup>2</sup>ICMAT y Dpto. de Matemáticas  
Univ. Carlos III de Madrid  
Avda. de la Universidad 30, 28911 Leganés, Madrid, Spain  
albertoi@math.uc3m.es

<sup>3</sup>Dpto. de Geometría y Topología  
Univ. Complutense de Madrid  
Avda. Complutense s/n, 28040 Madrid, Spain  
lafuente@mat.ucm.es



## Un zoo de variedades simplécticas y complejas non Kähler

Giovanni Bazzoni<sup>1</sup>, Marisa Fernández<sup>2</sup>, Vicente Muñoz<sup>3</sup>

Es bien sabido que si una variedad tiene una métrica Kähler, entonces admite también una estructura simpléctica y una estructura compleja ¿Es cierto el recíproco? Por suerte, no. En esta charla pretendemos hacer una excursión en el mundo de las variedades simplécticas y complejas que no admiten ninguna métrica Kähler. Presentamos un ejemplo de una 6-variedad simplemente conexa, simpléctica y compleja que no admite ninguna métrica Kähler, siendo 6 la dimensión más pequeña en la que esto puede ocurrir.

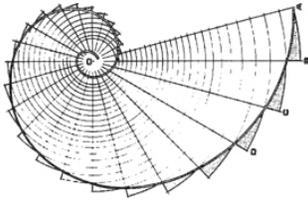
### Referencias

- [1] G. Bazzoni, M. Fernández y V. Muñoz: A 6-dimensional simply connected complex and symplectic manifold with no Kähler metric, *preprint*, <http://arxiv.org/abs/1410.6045>.

<sup>1</sup>Fakultät für Mathematik  
Universität Bielefeld  
Postfach 100301, D-33501, Bielefeld  
[gbazzoni@math.uni-bielefeld.de](mailto:gbazzoni@math.uni-bielefeld.de)

<sup>2</sup>Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas,  
Universidad del País Vasco  
Apartado 644, 48080 Bilbao, Spain  
[marisa.fernandez@ehu.es](mailto:marisa.fernandez@ehu.es)

<sup>3</sup>Facultad de Matemáticas, Departamento de Geometría y Topología,  
Universidad Complutense de Madrid  
Plaza de Ciencias 3, 28040 Madrid, Spain  
Instituto de Ciencias Matemáticas (CSIC-UAM-UC3M-UCM),  
C/ Nicolás Cabrera 15, 28049 Madrid, Spain  
[vicente.munoz@mat.ucm.es](mailto:vicente.munoz@mat.ucm.es)



## Métricas de condicionamiento

Juan G. Criado del Rey<sup>1</sup>

Sea  $(\mathcal{M}, g)$  una variedad riemanniana completa y  $\mathcal{N}$  una subvariedad  $C^2$  sin borde. Si multiplicamos la métrica de  $\mathcal{M}$  por el inverso del cuadrado de la distancia a  $\mathcal{N}$ , obtenemos una nueva estructura métrica  $g_\kappa$  en  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$ , llamada *métrica de condicionamiento*, dada por

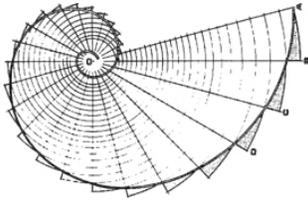
$$g_\kappa(x) = \frac{1}{d(x, \mathcal{N})^2} g(x),$$

donde  $d(x, \mathcal{N})$  es la distancia de  $x$  a  $\mathcal{N}$ . Por ejemplo, si  $\mathcal{M}$  es el plano  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathcal{N}$  es la recta  $\{y = 0\}$ , entonces en coordenadas cartesianas la distancia de un punto  $(x, y)$  a  $\mathcal{N}$  es  $y$ . Por tanto, la métrica de condicionamiento obtenida en este caso es  $g_\kappa(x, y) = \frac{1}{y^2} \langle \cdot, \cdot \rangle$ , donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto escalar euclídeo usual. Es decir, que obtenemos dos copias del semiplano de Poincaré.

Un interesante problema propuesto por Mike Shub y Carlos Beltrán es el siguiente: ¿es cierto que para todo segmento geodésico en la métrica de condicionamiento el punto más cercano a  $\mathcal{N}$ , respecto de la distancia original, es alguno de los extremos? Una condición suficiente para que se cumpla esta propiedad es que para toda geodésica unitaria  $\gamma$  en la métrica de condicionamiento, la función  $f(t) = \log(d(\gamma(t), \mathcal{N}))^{-2}$  sea convexa. En el caso en el que  $\mathcal{M}$  es  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathcal{N}$  es la recta  $\{y = 0\}$ , esta condición se satisface. De hecho, estudios anteriores prueban que la función  $f$  es convexa, bajo ciertas hipótesis de diferenciabilidad, cuando  $\mathcal{M}$  es el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{N}$  es una subvariedad cualquiera.

En esta charla expondré numerosos ejemplos de métricas de condicionamiento variando  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$ , y presentaré algunos resultados obtenidos. En particular, que la función  $f$  es convexa siempre que  $\mathcal{M}$  tenga curvatura seccional no negativa para  $\mathcal{N}$  cualquier subvariedad, y que esta propiedad no se cumple si existe un punto en  $\mathcal{M}$  con curvatura seccional estrictamente negativa. Por ejemplo, si  $\mathcal{M}$  es el espacio hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  y  $\mathcal{N}$  es un único punto, entonces esta propiedad de convexidad falla.

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación  
Universidad de Cantabria  
Avda. Los Castros s/n. 39005 Santander, Cantabria, SPAIN  
juan.gonzalezcr@alumnos.unican.es



## Group-invariant solutions for the Ricci curvature equation and the Einstein equation

João Paulo dos Santos<sup>1</sup>, Romildo Pina<sup>2</sup>

We consider the pseudo-Euclidean space  $(\mathbb{R}^n, g)$ ,  $n \geq 3$ , with coordinates  $x = (x_1, \dots, x_n)$  and  $g_{ij} = \delta_{ij}\epsilon_i$ ,  $\epsilon_i = \pm 1$ , where at least one  $\epsilon_i$  is positive, and also tensors of the form  $T = \sum_i f_{ij} dx_i dx_j$ , such that, for  $i \neq j$ ,  $f_{ij}$  is a differentiable function of  $x$ . For such tensors, we want to find metrics  $\bar{g} = \frac{1}{u^2}g$ , that solve the Ricci and the Einstein equations. More precisely, we want to find solutions for the following problems:

$$\begin{cases} \bar{g} = \frac{1}{u^2}g, \\ \text{Ric}\bar{g} = T \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \bar{g} = \frac{1}{u^2}g, \\ \text{Ric}\bar{g} - \frac{\bar{K}}{2}\bar{g} = T \end{cases} \quad (2)$$

where  $\bar{K}$  stands for the scalar curvature of  $\bar{g}$ .

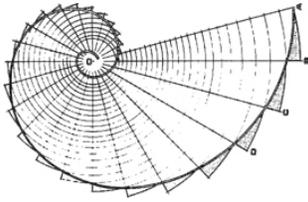
In this work, we use Lie point symmetries to find solutions for the problems (1) and (2). As results, we show that solutions invariant under the  $n$ -dimensional subgroup of translations provide complete metrics defined globally in  $\mathbb{R}^n$  as well as solutions given in terms of well known Airy, Weber and Mathieu equations. As a consequence, we show that for certain functions  $\bar{K}$ , there exist metrics  $\bar{g}$ , conformal to the pseudo-Euclidean metric  $g$ , whose scalar curvature is  $\bar{K}$ . Equivalently, we find  $C^\infty$  solutions for the equation

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g u + \bar{K}u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0.$$

The authors were partially supported by CAPES/PROCAD.

<sup>1</sup>Departamento de Matemática  
Universidade de Brasília  
Campus Universitário Darcy Ribeiro, Brasília, Distrito Federal, Brasil, 70910-900  
j.p.santos@mat.unb.br

<sup>2</sup>Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade Federal de Goiás  
Campus II - Samambaia, Goiânia, Goiás, Brasil, 74001-970  
romildo@ufg.br



## Soft restrictions on positively curved Riemannian submersions

David González Álvaro<sup>1</sup>, Luis Guijarro Santamaría<sup>1</sup>

The main difficulty when studying positively curved manifolds is the small number of known examples. At the present state of knowledge, Riemannian submersions are necessary in their construction: starting with the correct manifold with nonnegative sectional curvature as total space, one searches for some submersion that would guarantee a positively curved basis thanks to the well-known O'Neill formula. However, this is not so easily done, pointing out to the possible presence of restrictions for the existence of such Riemannian submersions from an arbitrary nonnegatively curved manifold. In this talk we bound the dimension of the fiber of a Riemannian submersion from a positively curved manifold in terms of the dimension of the base of the submersion and its conjugate radius.

### Referencias

- [1] González-Álvaro, D.; Guijarro, L.: Soft restrictions on positively curved Riemannian submersions. , *To appear in The Journal of Geometric Analysis*. DOI 10.1007/s12220-015-9596-4.

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas  
Universidad Autónoma de Madrid - ICMAT, Madrid  
dav.gonzalez@uam.es, luis.guijarro@uam.es

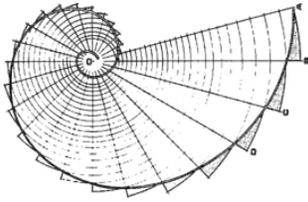
## Some results on geometric PDE's admitting isolated singularities of conical type

Asun Jiménez<sup>1</sup>, José A. Gálvez<sup>2</sup>, Pablo Mira<sup>3</sup>

Several geometric elliptic PDE's admit solutions with isolated singularities. Moreover, under certain hypothesis, such singularities can be characterized as the ones of *conical type*. For instance, that is the case of a class of solutions to Monge-Ampère equations whose graph is a surface of prescribed extrinsic curvature in a model space [2, 3]. In such a case, the limit tangent cone that the solution has at the singularity determines completely its behaviour close to the singularity. Something similar happens when we study the quasilinear PDE associated to space-like surfaces with prescribed mean curvature  $H \neq 0$  in the Lorentz- Minkowski space. In this case it is known (cf. [1]) that isolated singularities are light-like and so the limit tangent cone at the singularity is the same, i.e. the null-cone, for all singular solutions. Therefore the classification results here will require the analysis of other geometrical data [4]. Although the nature of the PDE's involved in these problems is quite different, some approaches can be extended from one case to another. We will give an overview of some classification results in the topic and the techniques used in their proofs.

### Referencias

- [1] R. Bartnik: Isolated singular points of Lorentzian Mean curvature Hypersurfaces, *Indiana Univ. Math. J.* (38) (1989), 811–827



# CONGRESO DE JÓVENES INVESTIGADORES

Real Sociedad Matemática Española

Universidad de Murcia, del 7 al 11 de Septiembre de 2015

---

- [2] A. Jiménez, J. A. Gálvez, P. Mira: A classification of isolated singularities of elliptic Monge-Ampère equations in dimension two, *Comm. Pure Appl. Math.* (DOI: 10.1002/cpa.21551)
- [3] A. Jiménez, J. A. Gálvez, P. Mira: Isolated singularities of graphs in warped products and Monge-Ampère equations, *preprint* ([arxiv.org/abs/1411.2904](http://arxiv.org/abs/1411.2904))
- [4] A. Jiménez, J. A. Gálvez, P. Mira: Isolated singularities of spacelike  $H$ -surfaces in Lorentz-Minkowski space, *preprint*

<sup>1</sup>Departamento de Geometria  
Universidade Federal Fluminense  
IME, Campus do Valonguinho 24.020-140 Niterói, Brazil  
[asunjg@vm.uff.br](mailto:asunjg@vm.uff.br)

<sup>2</sup>Departamento de Geometría y Topología  
Universidad de Granada,  
Campus Fuentenueva, 18071 Granada, Spain  
[jagalvez@ugr.es](mailto:jagalvez@ugr.es)

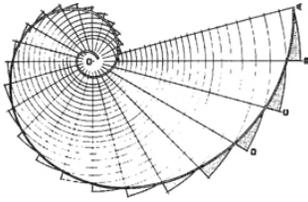
<sup>3</sup>Departamento de Matemática Aplicada y Estadística  
Universidad Politécnica de Cartagena,  
30203 Cartagena, Murcia, Spain  
[pablo.mira@upct.es](mailto:pablo.mira@upct.es)

## Descomposición cohomológica en familias analíticas de estructuras complejas

Adela Latorre<sup>1</sup>, Luis Ugarte<sup>1</sup>

Dada una variedad diferenciable  $M$ , la existencia de una estructura compleja  $J$  sobre  $M$  hace que sea posible bigraduar el espacio de formas diferenciales. Se sabe que en el caso de variedades Kähler compactas esta bigraduación se traslada a los grupos de cohomología de De Rham, surgiendo así la cuestión de qué otras variedades complejas compactas  $(M, J)$  cumplen la misma propiedad. En esta charla, recordaremos algunos de los resultados conocidos sobre el tema y presentaremos las conclusiones obtenidas para el caso de las nilvariedades de dimensión 6. En particular, prestaremos especial atención a lo que sucede cuando deformamos la estructura compleja  $J$  y dejamos fija la variedad real subyacente  $M$ .

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas - I.U.M.A.  
Universidad de Zaragoza  
Campus Plaza San Francisco, 50009 Zaragoza, España  
[adela@unizar.es](mailto:adela@unizar.es); [ugarte@unizar.es](mailto:ugarte@unizar.es)



## El toro de Clifford y el flujo lagrangiano de la curvatura media

Ana M. Lerma<sup>1</sup>, Ildelfonso Castro<sup>2</sup>, Vicente Miquel<sup>3</sup>

Sea  $F_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una inmersión diferenciable de una variedad compacta de dimensión  $n \geq 2$  en el espacio euclídeo. El flujo de la curvatura media (FCM) con condición inicial  $F_0$  es la familia uniparamétrica de inmersiones diferenciables  $F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$  solución del siguiente sistema de ecuaciones parabólicas:

$$\frac{\partial}{\partial t} F(p, t) = H(p, t), \quad p \in M, \quad t \geq 0, \quad (*)$$

donde  $H(p, t)$  es el vector curvatura media de  $M_t = F(M, t)$  en  $p \in M$ . La existencia y unicidad de solución de (\*) están garantizadas en un intervalo maximal de tiempo  $[0, T)$ ,  $T < \infty$ , i.e., el FCM dejará de existir tras un tiempo finito  $T$  dando lugar a una singularidad que están catalogadas atendiendo al grado del estallido de la segunda forma fundamental: las de Tipo I que son aquellas en que la explosión de la segunda forma fundamental está mejor controlada, mientras que las restantes se conocen como de Tipo II. Huisken demostró que la comprensión de las singularidades de Tipo I recae sobre una posible clasificación de las soluciones autocontráctiles (que evolucionan por contracciones del espacio ambiente).

El hecho de que no existan esferas autocontráctiles lagrangianas, motiva el problema abierto planteado por A. Neves, acerca de *encontrar alguna condición sobre un toro lagrangiano de  $\mathbb{C}^2$  que implique que el flujo lagrangiano de la curvatura media con condición inicial dicho toro, se extinga en tiempo finito y, tras reescalamiento, converja al toro de Clifford*. En esta charla estudiaremos el toro de Clifford como superficie autocontractil (véase [1]) y se dará respuesta al problema propuesto por A. Neves [2].

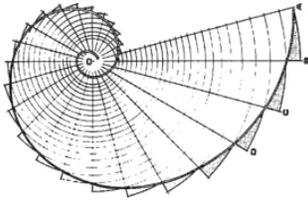
## Referencias

- [1] Ildelfonso Castro, Ana M. Lerma: The Clifford torus as a self-shrinker for the Lagrangian mean curvature flow, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2014** (6) (2014), 1515–1527.
- [2] Ildelfonso Castro, Ana M. Lerma, Vicente Miquel: Evolution by mean curvature flow of Lagrangian spherical surfaces in complex Euclidean plane, en preparación.

<sup>1</sup>Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén  
Campus Las Lagunillas, 23071 Jaén  
alerma@ujaen.es

<sup>2</sup>Departamento de Matemáticas, Universidad de Jaén  
Campus Las Lagunillas, 23071 Jaén  
icastro@ujaen.es

<sup>3</sup>Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Valencia  
Burjassot, 46100 Valencia  
miquel@uv.es



## Einstein $G_2$ manifolds obtained as warped products

Víctor Manero<sup>1</sup>

The presence of a  $G_2$ -structure on a manifold  $M$  is equivalent to the existence of a certain 3-form  $\varphi$  on  $M$ . Different classes of special  $G_2$ -structures can be described by the behavior of the 3-form  $\varphi$ . For example, a  $G_2$ -structure is called *calibrated* if  $\varphi$  is closed, and *cocalibrated* if  $\varphi$  is coclosed, that is, if  $*\varphi$  is closed with  $*$  denoting the Hodge star operator. In the latter case, if  $*\varphi$  is proportional to  $d\varphi$ , then the  $G_2$ -structure  $\varphi$  is said to be *nearly parallel*.

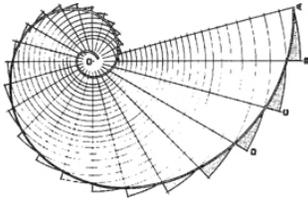
As it was shown in [2] the behavior of the Ricci tensor associated to the metric  $g_\varphi$  is closely related with the behavior of the  $G_2$ -structure  $\varphi$ . By the results in [3] no compact 7-dimensional manifold can support a calibrated  $G_2$ -structure  $\varphi$  whose underlying metric  $g_\varphi$  is Einstein unless  $g_\varphi$  has holonomy contained in  $G_2$ . However, 7-dimensional manifolds with a nearly parallel  $G_2$ -structure are always Einstein.

Using warped products, we show how to construct manifolds endowed with special  $G_2$ -structures from manifolds endowed with different classes of  $SU(3)$ -structures in such a way that the Einstein condition on the corresponding metric is preserved along this construction.

## Referencias

- [1] A. Besse: *Einstein manifolds*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.
- [2] R. L. Bryant: Some remarks on  $G_2$ -structures. In *Proceedings of Gökova Geom.-Topology Conference 2005*, 75–109. Gökova Geometry/Topology Conference (GGT), Gökova, 2006.
- [3] R. Cleyton, S. Ivanov: On the geometry of closed  $G_2$ -structures, *Commun. Math. Phys.* 270 (2007), 53–67.
- [4] B. O'Neill: *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Pure and Appl. Math. **103**, Academic Press, New York, 1983.

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad del País Vasco, Apartado 644, 48080 Bilbao, Spain.  
victormanuel.manero@ehu.es



## Estimaciones de área para grafos minimales en el grupo de Heisenberg

José M. Manzano<sup>1</sup>, Barbara Nelli

El grupo de Heisenberg  $\mathbb{H}^3(\tau)$  es una variedad riemanniana tridimensional homogénea con grupo de isometrías de dimensión 4. Además,  $\mathbb{H}^3(\tau)$  admite una submersión riemanniana sobre el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$  con curvatura del fibrado constante  $\tau$ . Esto permite considerar como clase distinguida de superficies la dada por las secciones diferenciables de dicha submersión, también llamadas grafos (verticales). Un grafo se dice entero si es una sección global de la submersión.

La clasificación de los grafos minimales enteros (conocida como problema de Bernstein) en  $\mathbb{H}^3(\tau)$  es un resultado bastante celebrado en la teoría (véase [1]). Dicha clasificación establece una relación explícita entre grafos enteros y diferenciales cuadráticas holomorfas sobre el plano complejo o el disco unidad, pero no permite entender aspectos geométricos básicos de las superficies clasificadas.

En esta charla, nos centraremos en el crecimiento de área de grafos minimales en  $\mathbb{H}^3(\tau)$ , es decir, el crecimiento del área de la intersección de una tal superficie con bolas métricas intrínsecas y extrínsecas en función del radio de éstas. En este sentido, daremos cotas óptimas del volumen de las bolas métricas de  $\mathbb{H}^3(\tau)$  y veremos que existen ciertas relaciones entre el área de la superficie y la distancia de ésta a una sección global inicial prefijada. Una versión más general de estos resultados puede encontrarse en [2].

## Referencias

- [1] I. Fernández, P. Mira: Holomorphic quadratic differentials and the Bernstein problem in Heisenberg space. *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (11) (2011), 5737–5752.
- [2] J.M. Manzano, B. Nelli: Height and area estimates for constant mean curvature graphs in  $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ -spaces, *Preprint* (arXiv:1504.05239).

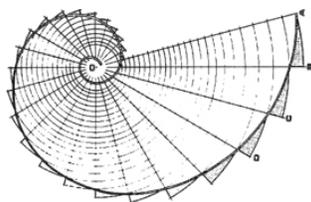
<sup>1</sup>Dipartimento di Scienze Matematiche  
Politecnico di Torino  
Corso Duca degli Abruzzi 10, 10129 Torino.  
manzanoprego@gmail.com

## Uniqueness of Chern-Weil forms

José Navarro<sup>1</sup>, Juan B. Sancho<sup>1</sup>

In this poster, I explain the main results in [3], which, roughly speaking, say that the only natural operations between differential forms are those obtained using linear combinations, the exterior product and the exterior differential. These results generalise work by Palais ([4]) and Freed-Hopkins ([1]).

As an application, I also obtain a theorem, originally due to Kolář ([2]), that determines those natural differential forms that can be associated to a connection on a principal bundle.



# CONGRESO DE JÓVENES INVESTIGADORES

Real Sociedad Matemática Española

Universidad de Murcia, del 7 al 11 de Septiembre de 2015

---

## Referencias

- [1] Freed, D. S.; Hopkins, M. J.: *Chern-Weil forms and abstract homotopy theory*, Bull. Amer. Math. Soc., **50** (2013), 431–468
- [2] Kolář, I.: *Gauge-natural forms of Chern-Weil type*, Ann. Global Anal. Geom. **11**, 41-47 (1993)
- [3] Navarro, J.; Sancho, J. B.: *Natural operations on differential forms*, Diff. Geom. App., **38** (2015) 159–174
- [4] Palais, R. S. *Natural operations on differential forms*, Trans. Amer. Math. Soc. **92**, 125–141 (1959) 53–259.

<sup>1</sup>Department of Mathematics.  
Universidad de Extremadura  
Badajoz, Spain  
navarrogarmendia@unex.es

## Estimaciones del primer valor propio del operador de Jacobi para superficies CMC en warped products

Irene Ortiz (Ponente)<sup>1</sup>, Miguel Á. Meroño<sup>1</sup>

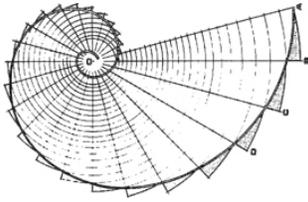
Las superficies con curvatura media constante (CMC) se caracterizan por ser puntos críticos del funcional área restringiéndonos a aquellas variaciones que conservan el volumen. Para tales puntos críticos la estabilidad viene dada por la segunda variación del área, y por tanto puede ser estudiada por medio del operador de Jacobi  $J$ . Se dice que una superficie es estable si el primer valor propio de dicho operador no es negativo.

El estudio de este valor propio se ha abordado hasta la fecha para superficies compactas inmersas en diferentes ambientes: la esfera, ciertos espacios homogéneos 3-dimensionales y submersiones de Killing Riemannianas. En este trabajo buscamos estimar el primer valor propio del operador de estabilidad para superficies compactas con curvatura media constante inmersas en ciertos warped products de dimensión 3. Como aplicación podemos concluir algunas consecuencias relacionadas con la estabilidad fuerte de dichas superficies.

## Referencias

- [1] M.A. Meroño, I. Ortiz: Eigenvalue estimates for the stability operator of CMC compact surfaces in three-dimensional warped products, *Preprint* (2014).

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia  
Campus Espinardo, 30100, Murcia  
irene.ortiz@um.es, mamb@um.es



## El “ $\partial\bar{\partial}$ ”-lema y la variedad de Nakamura

Antonio Otal<sup>1</sup>

La variedad de Nakamura [5] es una variedad compacta compleja paralelizable  $\text{Nak} = (G/\Gamma, J)$  obtenida como espacio cociente de cierto grupo de Lie complejo, resoluble, conexo y simplemente conexo  $G$  de dimensión real seis por un subgrupo discreto  $\Gamma$ .

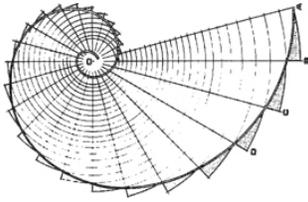
D. Angella y H. Kasuya [1, 4] introducen una técnica para calcular, por medio de ciertos complejos diferenciales de dimensión finita, la cohomología de Dolbeault  $H_{\bar{\partial}}^{\bullet,\bullet}(X)$  y de Bott-Chern  $H_{BC}^{\bullet,\bullet}(X)$  de un tipo de variedades compactas complejas que se denominan de tipo splitting, junto con las cohomologías de sus deformaciones holomorfas  $H_{\bar{\partial}}^{\bullet,\bullet}(X_t)$ ,  $H_{BC}^{\bullet,\bullet}(X_t)$ . Se prueba que la variedad de Nakamura  $\text{Nak}$  puede ser concebida como una variedad compleja de tipo splitting y aplicando esta técnica a cierta deformación holomorfa  $\text{Nak}_t$ , demuestran que la propiedad compleja  $\partial\bar{\partial}$ -lema [3] importante en geometría Hermitiana no-Kähler, es no cerrada por deformaciones holomorfas [2].

En esta charla se presentan los conceptos y técnicas mencionadas anteriormente así como una deformación holomorfa para cada miembro de una familia numerable de variedades compactas complejas  $\{X_k = (G/\Gamma_k, J_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  obtenidas a partir del grupo de Lie  $G$  correspondiente a la variedad de Nakamura. Esta familia contiene el ejemplo encontrado por ambos para probar que la propiedad  $\partial\bar{\partial}$ -lema es no cerrada por deformaciones holomorfas.

## Referencias

- [1] D. Angella, H. Kasuya: Bott-Chern cohomology of solvmanifolds, [arXiv:1212.5708](https://arxiv.org/abs/1212.5708).
- [2] D. Angella, H. Kasuya: Cohomologies of deformations of solvmanifolds and closedness of some properties, [arXiv:1305.6709](https://arxiv.org/abs/1305.6709) [math.CV], to appear in *Mathematica Universalis*.
- [3] P. Deligne, Ph. A. Griffiths, J. Morgan, D.P. Sullivan: Real homotopy theory of Kähler manifolds, *Invent. Math.* **29** (1975), 245–274.
- [4] H. Kasuya: Techniques of computations of Dolbeault cohomology of solvmanifolds, *Math. Z.* **273** (2013), 437–447.
- [5] I. Nakamura: Complex parallelisable manifolds and their small deformations, *J. Diff. Geom.* **10** (1975), 85–112.

<sup>1</sup>Centro Universitario de la Defensa-I.U.M.A., Universidad de Zaragoza  
Academia General Militar, Crta. de Huesca s/n, 50090 Zaragoza  
[aotal@unizar.es](mailto:aotal@unizar.es)



# CONGRESO DE JÓVENES INVESTIGADORES

Real Sociedad Matemática Española

Universidad de Murcia, del 7 al 11 de Septiembre de 2015

## Unicidad del *grim plane*

Jesús Pérez García<sup>1</sup>, Francisco Martín Serrano<sup>1</sup> Andreas Savas-Halilaj<sup>2</sup>

Los solitones de traslación del flujo de la curvatura media son un tipo especial de soluciones del flujo en el que la evolución de la superficie consiste simplemente en su traslación con velocidad constante. Son soluciones importantes porque aparecen con frecuencia al estudiar las singularidades (de tipo II) del flujo; además constituyen ejemplos explícitos del flujo, lo cual no es frecuente. Los ejemplos triviales son los planos que contienen a la dirección de traslación, los cuales permanecen fijos a lo largo del tiempo durante toda la evolución: no se mueven en absoluto ya que la velocidad viene dada por el vector curvatura media, que es nulo en su caso. Tras estos ejemplos triviales, el siguiente más sencillo es el producto de una recta con la curva *grim reaper* (curva que es la única solución convexa y eterna —esto es, que existe para todo tiempo— del flujo en  $\mathbb{R}^2$ ). Esta superficie recibe el nombre de *grim plane* (o *cilindro grim reaper*). Precisamente el objetivo de esta charla es presentar un resultado de unicidad para el *grim plane*: si tenemos un solitón de traslación conexo, completo y propiamente embebido en  $\mathbb{R}^3$ , que tenga género acotado en subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^3$  y que sea *asintótico* al *grim plane* (en un sentido que precisaremos en la charla), entonces debe ser el *grim plane*.

<sup>1</sup>Departamento de Geometría y Topología  
Facultad de Ciencias - Universidad de Granada  
Campus de Fuentenueva s/n, E-18071 Granada (Spain)  
jpgarcia@ugr.es, fmartin@ugr.es

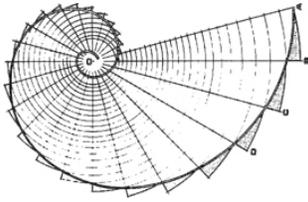
<sup>2</sup>Institut für Differentialgeometrie  
Leibniz Universität Hannover  
Welfengarten 1 30167 Hannover, Germany  
savasha@math.uni-hannover.de

## La elipse de Holditch desvelada

David Rochera<sup>1</sup>, Juan Monterde<sup>1</sup>

El teorema de Holditch afirma que si trazamos la curva generada a partir de un punto elegido en una barra de longitud fija cuyos extremos se deslizan por una curva dada, entonces el área encerrada entre las dos curvas es la misma que el área de una elipse de semiejes las dos longitudes en que el punto divide la barra. La prueba del teorema no da pistas sobre el hecho de que esa área coincida con la de una elipse y muchos matemáticos, a lo largo de los años, se han preguntado por las razones geométricas que fundamentan la aparición de dicha elipse. En el poster se pretende dar, fundamentalmente, una versión del teorema de Holditch para polígonos que nos ayudará a entender y mostrar dónde está la elipse de forma explícita.

<sup>1</sup>Dept. de Geometria i Topologia  
Universitat de València  
Avd. Vicent Andrés Estellés, 1, E-46100-Burjassot (València), Spain  
roplada@alumni.uv.es, monterde@uv.es



## Clasificación de hipersuperficies isoparamétricas en el espacio hiperbólico complejo

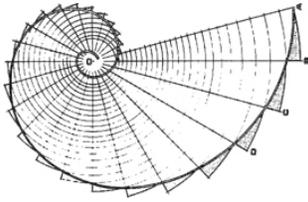
Víctor Sanmartín López<sup>1</sup>

El objetivo de la charla es abordar el estudio de las hipersuperficies isoparamétricas en el espacio hiperbólico complejo. Veremos, en primer lugar, ejemplos homogéneos [1] de las mismas. Posteriormente, presentaremos también ejemplos de hipersuperficies isoparamétricas no homogéneas [2], descubiertas más recientemente. A continuación, veremos que las familias presentadas constituyen todos los ejemplos posibles de hipersuperficies isoparamétricas en el espacio hiperbólico complejo, es decir, concluiremos con un teorema de clasificación de estos objetos tratando de ver las principales ideas de la demostración.

### Referencias

- [1] J. Berndt, J.C. Díaz Ramos: Homogeneous hypersurfaces in complex hyperbolic spaces, *Geom. Dedicata* **138** (2009), 129–150.
- [2] J.C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez: Inhomogeneous isoparametric hypersurfaces in complex hyperbolic spaces, *Math. Z* **271** (2012), 1037–1042.

<sup>1</sup>Departamento de Geometría y Topología  
Universidad de Santiago de Compostela  
15782 Santiago de Compostela  
victor.sanmartin@usc.es



## Hipersuperficies de cohomogeneidad uno en los planos proyectivo e hiperbólico complejos

Cristina Vidal Castiñeira<sup>1</sup>

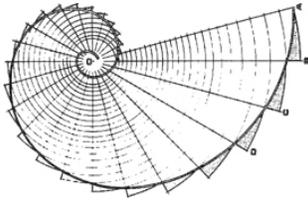
Una variedad Riemanniana se dice de cohomogeneidad uno si admite una acción isométrica con alguna órbita de codimensión uno [3]. Gorodski y Gusevskii [2] obtuvieron ejemplos de hipersuperficies completas de cohomogeneidad uno con curvatura media constante en el plano hiperbólico complejo. Recientemente, en un trabajo conjunto con Díaz-Ramos y Domínguez-Vázquez [1], hemos encontrado los primeros ejemplos de hipersuperficies con exactamente dos curvaturas principales no constantes en los planos proyectivo e hiperbólico complejos. Todos los ejemplos citados tienen la característica común de ser hipersuperficies de cohomogeneidad uno. De hecho, todas admiten una foliación Riemanniana por superficies Lagrangianas con curvatura media paralela.

En esta charla explicaré con detalle una propiedad geométrica -generalización natural de la noción de hipersuperficie Hopf- que nos va a permitir caracterizar todos estos ejemplos de hipersuperficies de cohomogeneidad uno.

### Referencias

- [1] J. C. Díaz-Ramos, M. Domínguez-Vázquez and C. Vidal-Castiñeira: Real hypersurfaces with two principal curvatures in complex projective and hyperbolic planes, preprint (2013), arXiv: 1310.0357v1.
- [2] C. Gorodski and N. Gusevskii: Complete minimal hypersurfaces in complex hyperbolic space, *Manuscripta Math.* **103** (2000), 221–240.
- [3] W. Y. Hsiang and H. B. Lawson Jr.: Minimal submanifolds of low cohomogeneity, *J. Differential Geom.* **5** (1971), 1–38.

<sup>1</sup>Departamento de Geometría y Topología  
Universidad de Santiago de Compostela  
15782 Santiago de Compostela  
cristina.vidal@usc.es



## Inmersiones de superficies en $\mathbb{R}^{n+2}$ , más allá de las 3 dimensiones

Raúl C. Volpe<sup>1</sup>, Juan Monterde<sup>1</sup>

En el estudio clásico de superficies se definen e interpretan los invariantes para inmersiones en  $\mathbb{R}^3$ , la curvatura de Gauss y la curvatura media. En nuestro trabajo recogemos las generalizaciones de los invariantes para inmersiones en  $\mathbb{R}^{n+2}$  de J. A. Little, [2], definidos a partir de los coeficientes de las segundas formas fundamentales, y las comparamos con el conjunto de invariantes propuestos de A. Montesinos-Amilíbia, [1], definidos a partir de la elipse de curvatura. Mostramos la relación existente entre ambos conjuntos de invariantes y estudiamos el comportamiento de éstos bajo la condición de inmersión sobre una esfera.

In the classical study of surfaces in  $\mathbb{R}^3$ , the Gauss curvature and the mean curvature are the defined and interpreted invariants for surfaces. In our work we review the generalizations of the invariants for immersions in  $\mathbb{R}^{n+2}$  by J. A. Little, [2], defined through the coefficients of the second fundamental forms, and the set of invariants proposed by A. Montesinos-Amilíbia, [1], defined the elements of the associated ellipse of curvature. We show the relationship between both sets of invariants and study the behaviour of these under the spherical condition.

### Referencias

- [1] A. Montesinos Amilíbia: Invariants of the second fundamental form, *Matemàtiques* **5** (2010), 119–140.
- [2] John A. Little: On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean spaces, *Annali di Matematica Pura ed Applicata* Series 4 **83** (1) (1969), 261–335.

<sup>1</sup>Departamento de Geometría y Topología  
Universidad de Valencia  
C/ Dr. Moliner 50, 46100 Burjassot (Valencia)  
raulvol@alumni.uv.es, monterde@uv.es