CONGRESO DE JÓVENES INVESTIGADORES
Real Sociedad Matemática Española
Universidad de Murcia, del 7 al 11 de Septiembre de 2015

Métricas de condicionamiento

Juan G. Criado del Rey[1]

Sea $(\mathcal{M}, g)$ una variedad riemanniana completa y $\mathcal{N}$ una subvariedad C^2 sin borde. Si multiplicamos la métrica de $\mathcal{M}$ por el inverso del cuadrado de la distancia a $\mathcal{N}$, obtenemos una nueva estructura métrica g_κ en $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$, llamada *métrica de condicionamiento*, dada por

$$g_\kappa(x) = \frac{1}{d(x, \mathcal{N})^2} g(x),$$

donde $d(x, \mathcal{N})$ es la distancia de x a $\mathcal{N}$. Por ejemplo, si $\mathcal{M}$ es el plano $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{N}$ es la recta $\{y = 0\}$, entonces en coordenadas cartesianas la distancia de un punto (x, y) a $\mathcal{N}$ es y. Por tanto, la métrica de condicionamiento obtenida en este caso es $g_\kappa(x, y) = \frac{1}{y^2}\langle \cdot, \cdot \rangle$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar euclídeo usual. Es decir, que obtenemos dos copias del semiplano de Poincaré.

Un interesante problema propuesto por Mike Shub y Carlos Beltrán es el siguiente: ¿es cierto que para todo segmento geodésico en la métrica de condicionamiento el punto más cercano a $\mathcal{N}$, respecto de la distancia original, es alguno de los extremos? Una condición suficiente para que se cumpla esta propiedad es que para toda geodésica unitaria γ en la métrica de condicionamiento, la función $f(t) = \log(d(\gamma(t), \mathcal{N}))^{-2}$ sea convexa. En el caso en el que $\mathcal{M}$ es $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{N}$ es la recta $\{y = 0\}$, esta condición se satisface. De hecho, estudios anteriores prueban que la función f es convexa, bajo ciertas hipótesis de diferenciabilidad, cuando $\mathcal{M}$ es el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{N}$ es una subvariedad cualquiera.

En esta charla expondré numerosos ejemplos de métricas de condicionamiento variando $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, y presentaré algunos resultados obtenidos. En particular, que la función f es convexa siempre que $\mathcal{M}$ tenga curvatura seccional no negativa para $\mathcal{N}$ cualquier subvariedad, y que esta propiedad no se cumple si existe un punto en $\mathcal{M}$ con curvatura seccional estrictamente negativa. Por ejemplo, si $\mathcal{M}$ es el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n$ y $\mathcal{N}$ es un único punto, entonces esta propiedad de convexidad falla.

[1]Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación
Universidad de Cantabria
Avda. Los Castros s/n. 39005 Santander, Cantabria, SPAIN
juan.gonzalezcr@alumnos.unican.es