CONGRESO DE JÓVENES INVESTIGADORES
Real Sociedad Matemática Española
Universidad de Murcia, del 7 al 11 de Septiembre de 2015

Una propiedad topológica de ceros de polinomios de Dirichlet a través la aritmética

Eric Dubon[1]

Estudiamos polinomios de Dirichlet de la forma

$$P_n(z) = m_0 r_0^z + m_1 r_1^z + ... + m_n r_n^z, \text{ con } r_0 > r_1 > ... > r_n > 0 \text{ y } m_j \in \mathbb{C}.$$

Bombieri y Friedlander en [2] demostrarón que se puede aproximar la función zeta de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ con polinomos de Dirichlet. Las sumas parciales de la función zeta de Riemann $\zeta_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$, $s \in \mathbb{C}$, constituyen una sucesión de polinomios de Dirichlet y son buenas aproximaciones de la zeta de Riemann. Se demostró en [3] que las proyecciones reales de sus ceros simples son puntos de acumulación del conjunto $\{\operatorname{Re} s : \zeta_n(s) = 0\}$ para n primo generalizando un resultado de Moreno [5].

Utilizando funciones completamente multiplicativas como por ejemplo caracteres de Dirichlet, proporcionaremos un método basado en la Bohr-equivalencia [1] para construir de forma explícita, a partir de un polinomio de Dirichlet con la propiedad topológica mencionada anteriormente, otros polinomios de Dirichlet con la misma propiedad topológica.

Con este resultado, podremos demostrar que los ceros de las sumas parciales de la función eta de Riemann $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^z}$ (otras aproximaciones de la zeta de Riemann) tienen también para $n = 2, 3, 4, 5$ la propiedad topológica.

Además de presentar una demostración distinta a la de Farag [4], mejoramos, para estos valores de n, el resultado probando que la densidad de las partes reales de los ceros está dentro de todo el intervalo crítico de la función y no solo en $(0, 1)$.

Finalmente, daremos otra aplicación del método expuesto construyendo clases de equivalencia de ecuaciones diferenciales con diferencias de tipo neutro inestables.

Referencias

[1] T.M. Apostol: *Modular functions and Dirichlet series in number theory*. Springer-Verlag, New York, 1990.

[2] E. Bombieri, J.B. Friedlander: Dirichlet polynomial approximations to zeta functions, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4)* **22** (3) (1995), 517-544.

[3] E. Dubon, G. Mora, J.M. Sepulcre, J.I. Ubeda, T. Vidal: On the real projection of the zeros of $1 + 2^s + ... + n^s$. *RACSAM* **108** (issue 2) (2014), 317-333.

[4] H.M. Farag: Dirichlet truncations of the Riemann zeta-function in the critical strip possess zeros near every vertical line. *International J. Number Theory* **4** (4) (2008), 653-662.

[5] C.J. Moreno: The zeros of exponential polynomials (I). *Compos. Math.* **26** (1) (1973), 69-78.

[1]Universidad de Alicante
Carretera San Vicente del Raspeig s/n - 03690 San Vicente del Raspeig - Alicante
eric.dubon@ua.es