P1. Tectitas

Las tectitas[1] son unos pequeños meteoritos que se encuentran en la superficie de la Tierra. Algunas tienen una composición idéntica a la del granito lunar y se piensa que son restos de una erupción volcánica ocurrida en la Luna.

En este problema llame R_T y M_T al radio de la Tierra y a su masa, R_L y M_L a los de la Luna, y D a la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna.

Considere una tectita de masa m en un punto situado entre la Tierra y la Luna, a distancia r del centro de la Tierra.

a) Obtenga la expresión de la fuerza gravitatoria sobre la tectita.

b) Considere el punto P donde se anula la fuerza gravitatoria sobre la tectita. Obtenga la distancia r_P del punto P al centro de la Tierra (dé la expresión teórica y el valor numérico).

c) Determine o razone matemáticamente si en dicho punto P el potencial gravitatorio es un máximo, un mínimo, o ninguno de los anteriores. Dibuje una figura que muestre cómo varía el potencial del sistema Tierra-Luna a lo largo de la línea que une los centros de ambos astros.

d) Para que una tectita alcance la Tierra tiene que ser eyectada por el volcán con una cierta velocidad mínima v_0. Determine v_0 en función de las constantes del enunciado y calcule su valor numérico.

e) Determine la velocidad v_1 con que entrará en la atmósfera de la Tierra cuando es eyectada con velocidad v_0. Para el cálculo desprecie el grosor de la atmósfera.

DATOS:

$G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
R_T = 6378 km, $M_T = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg
R_L = 1737 km, $M_L = 7{,}348 \cdot 10^{22}$ kg
D = 384400 km

[1] Las tectitas son objetos de vidrio natural, de algunos centímetros o milímetros en tamaño que, de acuerdo a la mayoría de los científicos, se han formado por el impacto de grandes meteoritos en la superficie de la Tierra. En este problema consideramos un caso simplificado de tectitas de origen lunar.

P1 Solución

a) La fuerza gravitatoria sobre una tectita de masa m situada a la distancia r del centro de la Tierra es la suma de las fuerzas gravitatorias ejercidas por la Tierra y la Luna:

$$\vec{F}(r) = -G\left(\frac{M_T m}{r^2} - \frac{M_L m}{(D-r)^2}\right)\vec{u}$$

siendo $\vec{u}$ un vector unitario en la dirección y sentido Tierra-Luna.

b) La fuerza gravitatoria se anula a una distancia r_P del centro de la Tierra tal que

$$F(r_P) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{M_T}{r_P{}^2} - \frac{M_L}{(D-r_P)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad r_P = \frac{D}{1+\sqrt{M_L / M_T}}$$

El valor numérico es $r_P = 346\,024$ km

c) El potencial gravitatorio a una distancia r del centro de la Tierra es

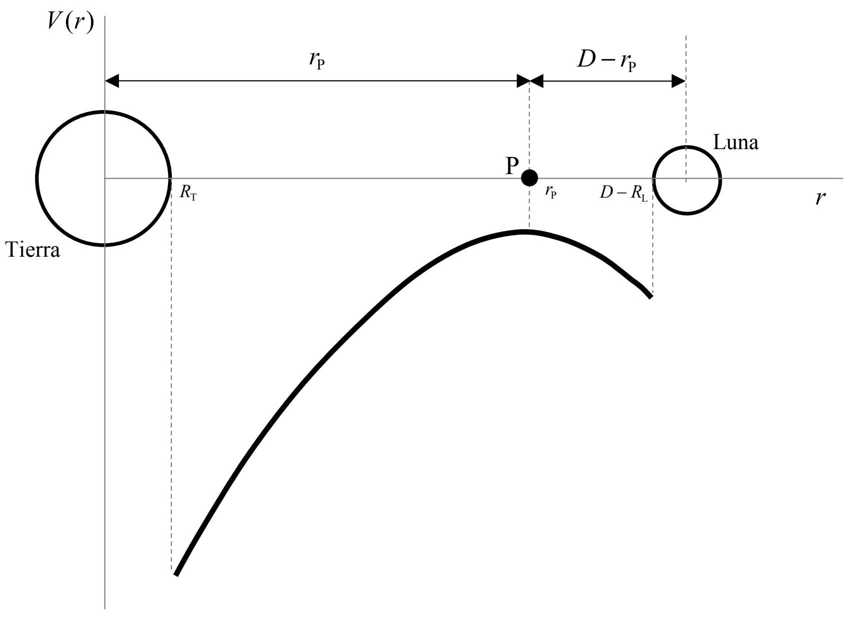
$$V(r) = -G\left(\frac{M_T}{r} + \frac{M_L}{D-r}\right)$$

En el punto P, la primera derivada es nula: $V'(r) = G\left(\frac{M_T}{r^2} - \frac{M_L}{(D-r)^2}\right) = -\frac{F(r)}{m} \quad \rightarrow \quad V'(r_P) = 0$

Como la segunda derivada es negativa: $V''(r) = -2G\left(\frac{M_T}{r^3} + \frac{M_L}{(D-r)^3}\right) \quad \rightarrow \quad V''(r_P) < 0$

concluimos que en el punto P hay un máximo del potencial.

La curva del potencial gravitatorio del sistema Tierra-Luna a lo largo de la línea que une los centros de ambos astros tiene la forma mostrada en la siguiente figura:



d) Para llegar a la Tierra la tectita tiene que superar el máximo de energía potencial en P. Para ello necesita suficiente energía inicial:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mV(D-R_\mathrm{L}) \geq mV(r_\mathrm{P}) \quad \rightarrow \quad \boxed{v_0 = \sqrt{2\left(V(r_\mathrm{P}) - V(D-R_\mathrm{L})\right)}}$$

O bien:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_\mathrm{T}m}{D-R_\mathrm{L}} - \frac{GM_\mathrm{L}m}{R_\mathrm{L}} \geq -\frac{GM_\mathrm{T}m}{r_\mathrm{P}} - \frac{GM_\mathrm{L}m}{D-r_\mathrm{P}} \quad \rightarrow$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2G\left(-\frac{M_\mathrm{T}}{r_\mathrm{P}} - \frac{M_\mathrm{L}}{D-r_\mathrm{P}} + \frac{M_\mathrm{T}}{D-R_\mathrm{L}} + \frac{M_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L}}\right)}}$$

El valor numérico es $\boxed{v_0 = 2,274 \cdot 10^3 \text{ m/s}}$

Nótese que v_0 es la velocidad de eyección desde la Luna para que la tectita llegue al punto P justo con velocidad nula.

e) Por conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{GM_\mathrm{T}m}{D-R_\mathrm{L}} - \frac{GM_\mathrm{L}m}{R_\mathrm{L}} = \frac{1}{2}m{v_1}^2 - \frac{GM_\mathrm{T}m}{R_\mathrm{T}} - \frac{GM_\mathrm{L}m}{D-R_\mathrm{T}}$$

Entonces, la velocidad con que la tectita impactará en la Tierra, cuando es eyectada de la Luna con velocidad v_0, es

$$\boxed{v_1 = \sqrt{{v_0}^2 + 2G\left(\frac{M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}} + \frac{M_\mathrm{L}}{D-R_\mathrm{T}} - \frac{M_\mathrm{T}}{D-R_\mathrm{L}} - \frac{M_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L}}\right)}}$$

O bien, usando el resultado del apartado d):

$$\boxed{v_1 = \sqrt{2G\left(\frac{M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}} + \frac{M_\mathrm{L}}{D-R_\mathrm{T}} - \frac{M_\mathrm{T}}{r_\mathrm{P}} - \frac{M_\mathrm{L}}{D-r_\mathrm{P}}\right)}}$$

El valor numérico es $\boxed{v_1 = 1,107 \cdot 10^4 \text{ m/s}}$