# XLVI Olimpiada Matemática Española

**Primera Fase - Región de Murcia**

**I.E.S. Alfonso Escámez - Águilas**

**Primera sesión**

**Viernes mañana, 15 de enero de 2010**

1. Determina los lados del triángulo rectángulo del que se conocen el perímetro, $p = 96$, y la altura sobre la hipotenusa, $h = \dfrac{96}{5}$.

2. Sea $I_n$ el conjunto de los $n$ primeros números naturales impares; es decir:

$$I_1 = \{1\}, \qquad I_2 = \{1, 3\}, \qquad I_3 = \{1, 3, 5\}, \qquad \ldots$$

¿Para qué números $n$ puede descomponerse el conjunto $I_n$ dos partes disjuntas (o sea, cada número de $I_n$ está en una y sólo una de las partes) de forma que los números de cada una de las partes sumen lo mismo?

3. Halla todos los números naturales $n$ que verifican la condición:

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right] = n + 335$$

donde $[x]$ es la parte entera de $x$, o sea el mayor entero menor o igual que $x$ (por ejemplo, $[1{,}32] = 1$, $[2] = 2$, $\left[\dfrac{1}{2}\right] = 0$, $[\pi] = 3$).

**No está permitido el uso de calculadoras.**
**Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.**
**El tiempo de cada sesión es de 2 horas y media.**

# XLVI Olimpiada Matemática Española

**Primera Fase - Región de Murcia**

**I.E.S. Alfonso Escámez - Águilas**

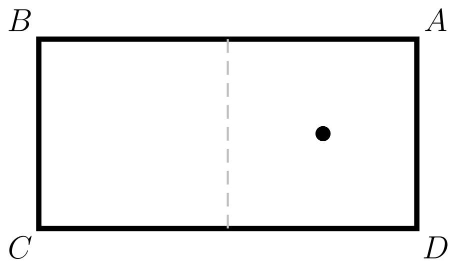
**Segunda sesión**

**Viernes tarde, 15 de enero de 2010**

4. Determina todos los pares $(a, b)$ de números reales que satisfacen:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & 5 \\ a^4+b^4 & = & 97 \end{array} \right\}$$

5. Se considera una mesa de billar rectangular de 2 metros por 1 metro, y una bola situada en el centro del cuadrado de la derecha, como muestra la figura.




Se hace un tiro que rebota sucesivamente en los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ y termina en la esquina $A$. Determina la longitud total recorrida por la bola.

Nota: Cuando la bola rebota en un lado, los ángulos de entrada (incidencia) y salida (reflexión) coinciden.

6. Dado el polinomio $P(X) = X^4 + \square X^3 + \square X^2 + \square X + \square$, en el que cada cuadrado representa un hueco donde se colocará un coeficiente, se plantea el siguiente juego entre dos jugadores:

Alternativamente, el primer y el segundo jugador eligen un hueco vacío y colocan en él un entero no nulo hasta rellenar los cuatro huecos. El primer jugador gana si el polinomio resultante no tiene dos o más raíces enteras distintas. En caso contrario gana el segundo jugador.

Prueba que, eligiendo una estrategia adecuada, el primer jugador siempre puede ganar.

**No está permitido el uso de calculadoras.**
**Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.**
**El tiempo de cada sesión es de 2 horas y media.**