XLVI Olimpiada Matemática Española
Primera Fase - Región de Murcia - IES Alfonso Escámez (Águilas)
Problemas y soluciones

Problema 1

Determina los lados del triángulo rectángulo del que se conocen el perímetro, $p = 96$, y la altura sobre la hipotenusa, $h = 96/5$.

Solución

Llamemos a y b a los catetos del triángulo y c a su hipotenusa. Entonces:

(1) Por el teorema de Pitágoras se tiene $a^2 + b^2 = c^2$.

(2) El área del triángulo es $ab/2$ (tomando a o b como base) y también $ch/2$ (tomando c como base), por lo que $ab = ch$.

(A esta conclusión se llega también comparando el triángulo dado con cualquiera de los triángulos semejantes en los que lo divide la altura sobre la hipotenusa).

La condición $p = a + b + c$ se reescribe como $p - c = a + b$; elevando al cuadrado y usando (1) y (2) se tiene

$$\left.\begin{array}{ccc} (p-c)^2 & = & p^2 + c^2 - 2pc \\ \| & & \\ (a+b)^2 & = & a^2 + b^2 + 2ac = c^2 + 2ch \end{array}\right\} \Rightarrow \quad p^2 = 2pc + 2ch \quad \Rightarrow$$

$$c = \frac{p^2}{2(p+h)} = \frac{p^2}{2p(1+1/5)} = \frac{5}{12}\,p = \frac{5}{12}\,96 = 5 \cdot 8 = 40$$

Los catetos satisfacen entonces $a + b = p - c = 56$ y $ab = ch = 8 \cdot 96$, luego son las raíces de

$$X^2 - 56X + 768 = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 28 \pm \sqrt{28^2 - 8 \cdot 96} = 28 \pm 4\sqrt{7^2 - 48} = 28 \pm 4$$

En definitiva, los catetos miden 24 y 32, y la hipotenusa mide 40.

Problema 2

Sea I_n el conjunto de los n primeros números naturales impares; es decir:

$$I_1 = \{1\}, \qquad I_2 = \{1,3\}, \qquad I_3 = \{1,3,5\}, \qquad \ldots$$

¿Para qué núumeros n puede descomponerse el conjunto I_n dos partes disjuntas (o sea, cada número de I_n está en una y sólo una de las partes) de forma que los núumeros de cada una de las partes sumen lo mismo?

Solución

Por simple inspección se ve que los conjuntos $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1,3\}$ e $I_3 = \{1,3,5\}$ no se pueden descomponer de la forma dada, mientras que $I_4 = \{1,3,5,7\}$ sí se puede descomponer en dos partes $A = \{1,7\}$ y $B = \{3,5\}$ con suma 8.

$I_5 = \{1,3,5,7,9\}$ tiene suma 25, por lo que no puede descomponerse en dos partes con la misma suma, y por el mismo argumento la descomposición no es posible para ningún n impar.

Para $I_6 = \{1,3,5,7,9,11\}$ hay que hacer dos partes con suma 18; la que contenga al 11 debe contener también al 7 y ya está. O sea (alterando el orden del 7 y el 9 para ver mejor las partes):

$$I_6 = \{\underbrace{1,3,5,9}_{B},\underbrace{7,11}_{A}\}$$

La descomposición de I_4 nos da una idea para la de I_8 e I_{12} en dos partes A y B así:

$$I_8 = \{\underbrace{1,3}_{A},\underbrace{5,7,9,11}_{B},\underbrace{13,15}_{A}\} \qquad I_{12} = \{\underbrace{1,3,5}_{A},\underbrace{7,9,11,13,15,17}_{B},\underbrace{19,21,23}_{A}\}$$

Y esta idea se generaliza a todos los valores de la forma $n = 4m$: en este caso hay un número par de parejas (primero y último; segundo y penúltimo; tercero y antepenúltimo,...) con suma $2n$, y poniendo la mitad de esas parejas en cada parte tenemos la descomposición pedida.

Sólo quedan por analizar los casos $n = 6,10,14,18,\ldots$, o sea los casos pares pero no múltiplos de 4 (salvo el 2). Como vemos, estos casos son de la forma $n = 6+4m$, y juntando la descomposición de I_6 con la idea anterior para descomponer del 13 en adelante se obtienen descomposiciones para estos valores. Por ejemplo:

$$I_{10} = \{\underbrace{1,3,5,9}_{B},\underbrace{7,11\ ,\ 13}_{A},\underbrace{15,17}_{B},\underbrace{19}_{A}\}$$

$$I_{14} = \{\underbrace{1,3,5,9}_{B},\underbrace{7,11\ ,\ 13,15}_{A},\underbrace{17,19,21,23}_{B},\underbrace{25,27}_{A}\}$$

En definitiva, la descomposición es posible precisamente cuando n es par y mayor o igual que 4.

$\boxed{\textbf{Problema 3}}$

Halla todos los números naturales n que verifican la condición $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right] = n + 335$, donde $[x]$ es la parte entera de x, o sea el mayor entero menor o igual que x. $\boxed{\textbf{Solución}}$

El valor de $[n/2]$ depende de si n es par o impar, y el valor de $[2n/3]$ depende del resto que da n al dividirlo por 3. Se pueden distinguir así 6 casos, que en realidad se corresponden con el resto que se obtiene al dividir por 6. Esto lleva a distinguir y analizar estos 6 casos:

$$\boxed{n = 6q} \quad\Rightarrow\quad 6q + 335 = \left[\frac{6q}{2}\right] + \left[\frac{12q}{3}\right] = [3q] + [4q] = 3q + 4q = 7q$$

$$\boxed{n = 6q+1} \quad\Rightarrow\quad 6q + 1 + 335 = \left[\frac{6q+1}{2}\right] + \left[\frac{12q+2}{3}\right] = \left[3q + \frac{1}{2}\right] + \left[4q + \frac{2}{3}\right] = 3q + 4q = 7q$$

$$\boxed{n = 6q+2} \quad\Rightarrow\quad 6q + 2 + 335 = \left[\frac{6q+2}{2}\right] + \left[\frac{12q+4}{3}\right] = [3q+1] + \left[4q + 1 + \frac{1}{3}\right] = 7q + 2$$

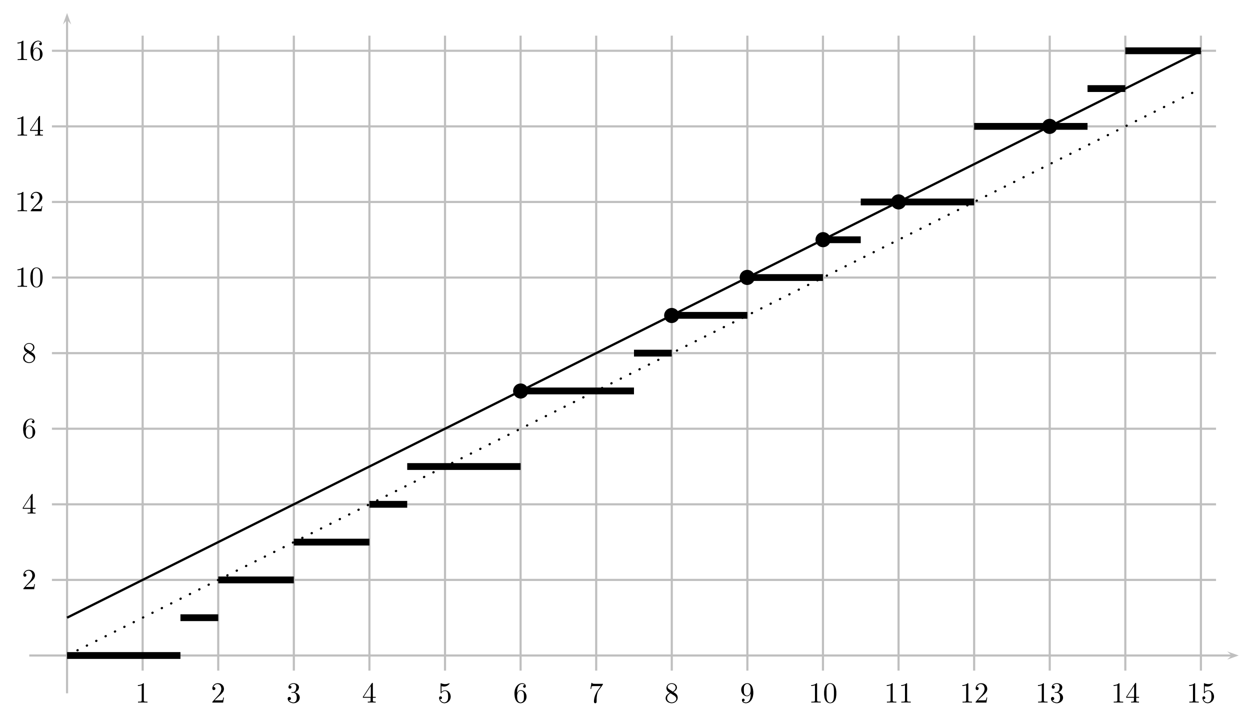
$$\boxed{n = 6q+3} \quad\Rightarrow\quad 6q + 3 + 335 = \left[\frac{6q+3}{2}\right] + \left[\frac{12q+6}{3}\right] = \left[3q + 1 + \frac{1}{2}\right] + [4q+2] = 7q + 3$$

$$\boxed{n = 6q+4} \quad\Rightarrow\quad 6q + 4 + 335 = \left[\frac{6q+4}{2}\right] + \left[\frac{12q+8}{3}\right] = [3q+2] + \left[4q + 2 + \frac{2}{3}\right] = 7q + 4$$

$$\boxed{n = 6q+5} \quad\Rightarrow\quad 6q + 5 + 335 = \left[\frac{6q+5}{2}\right] + \left[\frac{12q+10}{3}\right] = \left[3q + 2 + \frac{1}{2}\right] + \left[4q + 3 + \frac{1}{3}\right] = 7q + 5$$

Todas las condiciones llevan a $q = 335$, salvo la segunda que lleva a $q = 336$. Los correspondientes valores de n son todas las soluciones enteras de la ecuación: 2010, 2012, 2013, 2014, 2015 y 2017.

El "baile de los decimales" se puede observar en la gráfica de $[x/2] + [2x/3]$, que aumenta una unidad al pasar cada múltiplo entero de 2 y de 3/2, y dos unidades al pasar el "múltiplo común" 6 (todos los segmentos contienen su extremo izquierdo y no el derecho):



La recta sólida representa la función $x + 1$; sus cortes con la anterior dan las soluciones del problema análogo cambiando 335 por 1 (que serían 6, 8, 9, 10, 11 y 13). La recta punteada daría las soluciones cambiando 335 por 0, que serían 0, 2, 3, 4, 5 y 7.

Problema 4

Determina todos los pares (a,b) de números reales que satisfacen $\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 5 \\ a^4+b^4 & = & 97 \end{array}\right\}$

Solución

Para pocer combinar ambas ecuaciones, podemos elevar la primera a la cuarta potencia para que aparezcan a^4 y b^4. En el camino aparecen más cosas, y habrá que lidiar con ellas.

Si se conoce el desarrollo del binomio de Newton, la expresión de $(a+b)^4$ se obtiene directamente. Alternativamente, se puede elevar al cuadrado una vez:

$$25 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

y luego otra, en la que tras hacer los 9 productos y reordenar se obtiene

$$625 = (a^2+2ab+b^2)^2 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = 97 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3$$

Una forma de actuar ahora consiste en observar que el producto ab aparece en muchos sumandos de estas expresiones. Si determinamos su valor conoceremos tanto ab como $a+b=5$ y podremos determinar a y b.

Comenzamos manipulando la última expresión para hacer aparecer ab:

$$625 = 97 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 = 97 + 4ab(a^2+b^2) + 6(ab)^2$$

y sustituyendo ahora el valor de a^2+b^2 que nos da la primera expresión se tiene

$$625 = 97 + 4ab(25-2ab) + 6(ab)^2 = 97 + 100ab - 2(ab)^2 \qquad \text{ó} \qquad (ab)^2 - 50(ab) + 264 = 0$$

Resolviendo la ecuación de 2º grado se obtienen las posibilidades $ab = 6$ y $ab = 44$.

Si $ab = 6$ y $a+b=5$ es que a y b son las soluciones de la ecuación x^2-5x+6, de manera que a y b valen 2 y 3 en uno u otro orden.

Si $ab = 44$ y $a+b=5$ es que a y b son las soluciones de la ecuación $x^2-5x+44$, que no son reales (el sistema sí tiene otras dos soluciones complejas).

En definitiva, las únicas soluciones reales son $(a,b) = (2,3)$ y $(a,b) = (3,2)$.

También se puede hacer de modo más directo sustituyendo $b = 5-a$ en la segunda ecuación y obteniendo por el método de Ruffini las dos raíces 2 y 3 del polinomio de 4º grado que se obtiene. Tras dividir por $a-2$ y por $a-3$ queda $x^2-5x+44$, que ya no aporta más raíces reales.

Otra alternativa, que es a menudo útil cuando se conoce $a+b$, consiste en escribir a y b de forma simétrica con respecto a su media. Es decir, si ponemos $t = (a-b)/2$ se tiene

$$a = \frac{5}{2} + t \qquad\qquad b = \frac{5}{2} - t$$

y así

$$97 = a^4 + b^4 = \left(\frac{5}{2}+t\right)^4 + \left(\frac{5}{2}-t\right)^4 = 2\left[\left(\frac{5}{2}\right)^4 + 6\left(\frac{5}{2}\right)^2 t^2 + t^4\right]$$

Multiplicando por 8 para quitar denominadores y reorganizando se tiene

$$0 = 16t^4 + 24\cdot 25t^2 + (625 - 16\cdot 97) = 16t^4 + 600t^2 - 151$$

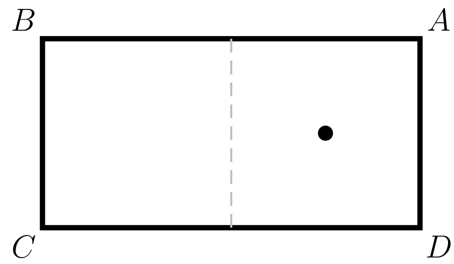
de donde

$$t^2 = \frac{-300 \pm \sqrt{300^2 + 16\cdot 151}}{16} = \frac{-300 \pm 4\sqrt{75^2+151}}{16} = \frac{-75 \pm \sqrt{5776}}{4} = \frac{-75 \pm 76}{4}$$

Como sólo tratamos números reales, la única posibilidad admisible es $t^2 = 1/4$ y por tanto $t = \pm 1/2$. Para $t = 1/2$ se obtiene la solución $(a,b) = (3,2)$ y para $t = -1/2$ se obtiene la solución $(a,b) = (2,3)$.

Problema 5

Se considera una mesa de billar rectangular de 2 metros por 1 metro, y una bola situada en el centro del cuadrado de la derecha, como muestra la figura.

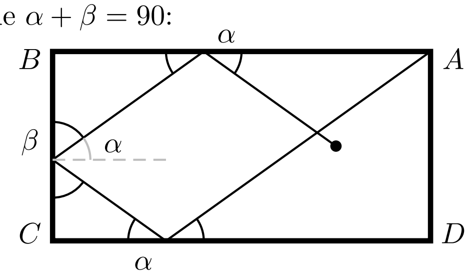


Se hace un tiro que rebota sucesivamente en los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ y termina en la esquina A. Determina la longitud total recorrida por la bola.

Nota: Cuando la bola rebota, los ángulos de entrada (incidencia) y salida (reflexión) coinciden.

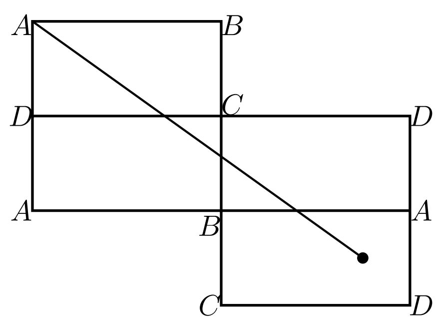
Solución

El recorrido de la bola será así, donde en cada rebote se marca el ángulo de entrada, que coincide con el de salida. Obsérvese que $\alpha + \beta = 90$:



En http://www.um.es/fmath/rsme/46olimpiada/ejercicio5b/Ejercicio5OME2010.html puedes ver cómo se van produciendo los rebotes si cambias el punto del primer impacto.

La manera más sencilla de resolver el problema es "desdoblar" la mesa de billar para observar que la trayectoria se puede interpretar como una línea recta:



Como esa línea es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos $7/2$ y $5/2$, la longitud pedida es $\sqrt{74}/2$ metros (también se deduce que $\tan(\alpha) = 5/7$ y por tanto $\alpha \approx 35{,}5^{\text{o}}$).

Una vía alternativa es la siguiente: Si x es la "distancia horizontal del primer tramo" se tiene $\tan(\alpha) = (1/2)/x$. Si y es la distancia vertical del segundo tramo se tiene $\tan(\alpha) = y/(3/2 - x)$. Si z es la distancia horizontal del tercer tramo se tiene $\tan(\alpha) = (1-y)/z$ y $\tan(\alpha) = 1/(2-z)$. Igualando los inversos (las cotangentes) se tiene

$$2x = \frac{3-2x}{2y} = \frac{z}{1-y} = 2 - z \qquad \text{o sea} \qquad \left\{ \begin{array}{l} 4xy = 3 - 2x \\ 2x - 2xy = z \\ 2x = 2 - z \end{array} \right\}$$

Sumando a la primera ecuación el doble de las otras dos se cancelan los sumandos $\pm 4xy$ y $\pm 2z$ y queda simplemente $8x = 7 - 2x$, de donde $x = 7/10$. Por tanto $z = 3/5$ e $y = 4/7$.

Los recorridos en cada tramo son $\frac{1}{10}\sqrt{74}$, $\frac{4}{35}\sqrt{74}$, $\frac{3}{35}\sqrt{74}$ y $\frac{1}{5}\sqrt{74}$, cuya suma es $\frac{1}{2}\sqrt{74}$.

Problema 6

Dado el polinomio $P(X) = X^4 + \square X^3 + \square X^2 + \square X + \square$, en el que cada cuadrado representa un hueco donde se colocará un coeficiente, se plantea el siguiente juego entre dos jugadores:

Alternativamente, el primer y el segundo jugador eligen un hueco vacío y colocan en él un entero no nulo hasta rellenar los cuatro huecos. El primer jugador gana si el polinomio resultante no tiene dos o más raíces enteras distintas. En caso contrario gana el segundo jugador.

Prueba que, eligiendo una estrategia adecuada, el primer jugador siempre puede ganar.

Solución

Llamemos A al primer jugador (que hará las jugadas 1ª y 3ª) y B al otro.

Como el coeficiente de X^4 es 1, las posibles raíces enteras del polinomio serán los divisores de su término independiente. Como al jugador A le interesa que aparezcan pocas raíces enteras, parece buena idea poner en la 1ª jugada un término independiente con pocos divisores. Analicemos las opciones más evidentes:

- Si elige un 1 se tendrá un polinomio $P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 1$. El jugador B debe pues interntar que tanto 1 como -1 sean raíces, o sea le interesa que se tenga

  $$0 = P(1) = 2 + a + b + c \qquad \text{y} \qquad 0 = P(-1) = 2 - a + b - c$$

  y entonces si B elige en la 2ª jugada $b = -2$ gana él sin más que asignar en la 4ª jugada el número opuesto del que elija A en la 3ª. Empezar poniendo un 1 no es buena idea para A.

- Si elige un -1 en el término independiente se tendrá $P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX - 1$, y B intentará que se tenga

  $$0 = P(1) = a + b + c \qquad \text{y} \qquad 0 = P(-1) = -a + b - c$$

  Para que ambas cosas ocurran debe ser en particular $b = 0$, y como no están permitidos los coeficientes nulos es imposible que gane B.

En definitiva, la estrategia ganadora para A es tan sencilla como elegir un -1 para el término independiente en la primera jugada y jugar como sea el resto de la partida.

Se puede plantear un juego casi igual quitando la palabra "distintas", es decir, un juego en el que el primer jugador también pierde si el polinomio tiene una raíz doble. También sirve en este caso empezar poniendo -1 en el término independiente, pero ahora la estrategia no es tan simple:

Para que $P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX - 1$ tenga una raíz doble en r debe ser $P(r) = 0$ y $P'(r) = 0$, donde $P'(X) = 4X^3 + 3aX^2 + 2bX + c$. Por tanto:

$$1 \quad \text{es raíz doble} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = a + b + c \\ 0 = 4 + 3a + 2b + c \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a = c - 4 \\ b = 4 - 2c \end{array} \right\}$$

$$-1 \quad \text{es raíz doble} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = a - b + c \\ 0 = -4 + 3a - 2b + c \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 4 + c \\ b = 4 + 2c \end{array} \right\}$$

(se han resuelto los sistemas expresando a y b en función de c).

Si en la segunda jugada B pone a X un coeficiente c, basta con que luego A ponga a X^3 un coeficiente $a \neq c \pm 4$ para que no se cumpla la primera condición de cada par y no haya raíces dobles (también puede elegir para X^2 cualquier $b \neq 4 \pm 2c$).

Análogamente, si en la segunda jugada B elige un coeficiente a para X^3, basta con que A ponga a X un coeficiente $c \neq a \pm 4$.

Finalmente, si en la segunda jugada B pone a X^2 un coeficiente b, basta con que luego A ponga a X un coeficiente $c \neq \pm(b - 4)/2$.