XLIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA (2007)
PROBLEMAS DE LA FASE AUTONÓMICA

ENUNCIADOS

1. Un poliedro regular convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuántos segmentos que unen pares de vértices del poliedro son interiores al mismo, es decir, no son aristas ni están contenidos en una cara?

2. Resuelve, en el conjunto de los números reales, el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{array}\right\}$

3. Sea ABC un triángulo y sean A' ,B' y C' puntos situados en los segmentos BC, AC y AB, respectivamente, de forma que los segmentos AA', BB' y CC' concurren en un punto P interior al triángulo. Calcula el área del triángulo ABC sabiendo que $AP = PA' = 6$, $BP = 9$, $PB' = 3$ y $CC' = 20$.

4. Demuestra que es imposible obtener un cubo yuxtaponiendo tetraedros regulares del mismo tamaño.

5. Demuestra que, en cualquier triángulo, la distancia de un vértice al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a ese vértice.

6. Halla todas las soluciones reales de la ecuación $3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-z-x} = 1$.

7. Un plano ecualizador de un conjunto de puntos del espacio es un plano cuya distancia a cada uno de esos puntos es la misma. ¿Cuántos planos ecualizadores hay para un conjunto de cuatro puntos no coplanarios?

8. Si p es un número primo, encuentra todas las soluciones enteras x, y de la ecuación $p(x + y) = xy$.

9. Sea $b_n = 1 + n^3$ y sea $d_n = \text{mcd}(b_n, b_{n+1})$. Calcula el mayor valor que puede tomar d_n.

10. Demuestra que, si a, b, c, d son enteros positivos con $ab = cd$, entonces $N = a + b + c + d$ no es un número primo.

11. Dado un entero $k \geq 1$, definimos $b_k = \overbrace{11\ldots1}^{k}$ como el número cuya expresión en base diez consiste en un 1 repetido k veces. Demuestra que b_k divide a b_n si y sólo si k divide a n.

12. En un triángulo de área S, las paralelas a los lados por un punto interior P dividen al triángulo en tres triángulos de áreas S_1, S_2 y S_3 y tres paralelogramos. Demuestra que $S \leq 3(S_1 + S_2 + S_3)$.

XLIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA (2007)
PROBLEMAS DE LA FASE AUTONÓMICA

SOLUCIONES

1. Un poliedro regular convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuántos segmentos que unen pares de vértices del poliedro son interiores al mismo, es decir, no son aristas ni están contenidos en una cara?

   Solución: Hay $12 \cdot 4 = 48$ vértices de cuadrados, $8 \cdot 6 = 48$ vértices de hexágonos y $6 \cdot 8 = 48$ vértices de octógonos, pero cada uno está contado tres veces, luego el número total de vértices es 48. (También se puede observar simplemente que cada vértice del poliedro está exactamente en una cara cuadrada).

   De cada uno salen 47 segmentos hacia otros vértices; de ellos 3 son aristas y 1 (respectivamente 3; 5) son segmentos interiores a la cara cuadrada cuadrada (respectivamente, hexagonal; octogonal). Por tanto de cada vértice salen 35 "segmentos interiores", y su número total es pues $(48 \cdot 35)/2 = 840$ (dividiendo por 2 para no contar dos veces cada segmento).

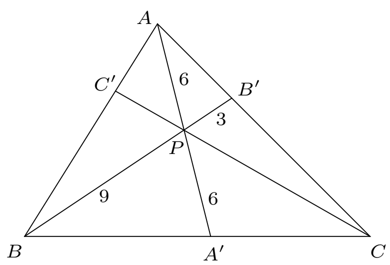
   Una alternativa parecida consiste en contar el número total de segmentos que unen dos vértices $(48 \cdot 47/2)$ y descontar las aristas $(3 \cdot 48/2)$ y los segmentos interiores a las caras cuadradas $(12 \cdot 2)$, hexagonales $(8 \cdot (6 \cdot 3/2)$ y octogonales $(6 \cdot (8 \cdot 5/2))$.

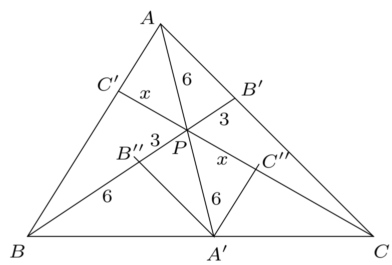
2. Resuelve, en el conjunto de los números reales, el sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{c} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{array} \right\}$

   Solución: Cada miembro de la izquierda es "casi el desarrollo de un cubo", y sumando las tres ecuaciones tenemos $(x-2)^3 + (y-2)^3 + (z-2)^3 = 0$, cuya solución obvia $x = y = z = 2$ satisface el sistema. Por esta misma igualdad, para cualquier otra solución al menos una incógnita debe tomar un valor > 2 y al menos una debe tomar un valor < 2. Si $x > 2$ entonces $y^3 = 6x(x-2) + 8 > 8$ y por tanto $y > 2$, de donde $z^3 = 6y(y-2) + 8 > 8$ y así $z > 2$, lo cual, como hemos observado, no puede ser. Análogamente se descartan las opciones $y > 2$ y $z > 2$, por lo que la solución $x = y = z = 2$ es única.

3. Sea ABC un triángulo y sean A' ,B' y C' puntos situados en los segmentos BC, AC y AB, respectivamente, de forma que los segmentos AA', BB' y CC' concurren en un punto P interior al triángulo. Calcula el área del triángulo ABC sabiendo que $AP = PA' = 6$, $BP = 9$, $PB' = 3$ y $CC' = 20$.

   Solución geométrica: Tenemos la situación del primer dibujo, con $CC' = 20$:

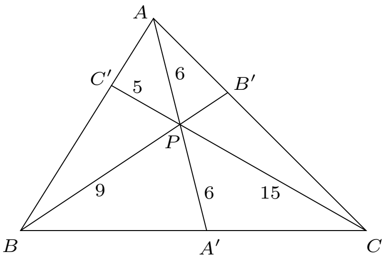


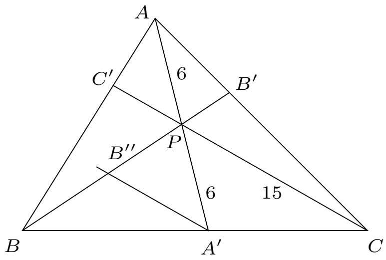


   Trazando la paralela por A' a AC obtenemos el triángulo $A'PB''$ semejante a APB' (segundo dibujo); como $A'P = AP$ también se tiene $PB'' = PB' = 3$, con lo que $BB'' = 6$. Entonces las rectas paralelas AB' y $A'B''$ dividen por la mitad al segmento BB' y por tanto hacen lo mismo con BC; es decir, A' es el punto medio de BC.

   Análogamente, trazando la paralela por A' a AB obtenemos el triángulo $A'PC''$ semejante a APC'; como $AP = A'P$ también se tiene $PC'' = PC'$, distancia que llamamos x. Además las paralelas AC' y $A'C''$ dividen por la mitad al segmento CB y por tanto hacen lo mismo con CC'; es decir, C'' es el punto medio de CC'. Por tanto $2x = 10$, o sea $x = 5$, y en consecuencia $PC = 15$.

   En consecuencia el triángulo inicial es el primero de los dos que siguen. En él aparecen segmentos de longitudes 9, 12 y 15 (proporcionales a 3, 4 y 5). Si son los lados de un triángulo, éste será rectángulo. Vemos de hecho que se puede construir construir un triángulo de lados 9/2, 12/2 y 15/2:

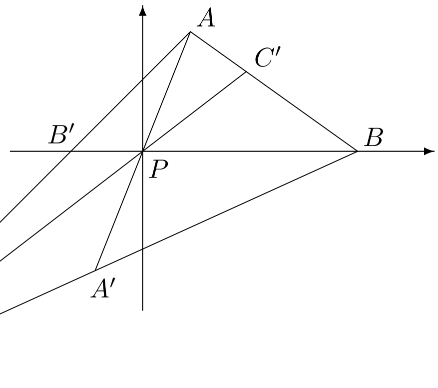




Trazamos la paralela por A' a CC' y consideramos su corte B'' con BP (no es el mismo B'' de antes). Como A' es el punto medio de B y C, también B'' es el punto medio de B y P, luego $PB'' = 9/2$. Por otra parte, los triángulos BCP y $BA'B''$ son semejantes con $BA' = \frac{1}{2}BC$, por lo que $B''A' = \frac{1}{2}PC = 15/2$.

En definitiva, el triángulo $A'PB''$ es rectángulo en P, por lo que su área es $\frac{6\cdot(9/2)}{2} = 27/2$. Como B'' es el punto medio de BP, el área de BPA' es 27. Como A' es el punto medio de BC, el área de BPC es 54. Finalmente, como P es el punto medio de A y A', el área de ABC es 108.

Solución analítica: Situemos unos ejes coordenados con el origen en P y el eje horizontal en la recta BB'. Reflejando si es necesario con respecto al eje vertical tenemos $B = (9, 0)$ y $B' = (-3, 0)$. Entonces las coordenadas de A y A' son de la forma $A = (a, b)$ y $A' = (-a, -b)$ con $a^2 + b^2 = 36$, y reflejando si es necesario con respecto al eje horizontal podemos asumir que $b \geq 0$. Tenemos pues:



Calculando analíticamente C como la intersección de AB' y $A'B$ se obtiene $C = (-2a - 9, -2b)$, y análogamente la intersección de AB y CP es $C' = ((2a + 9)/3, 2b/3)$. Usando la hipótesis $CC' = 20$:

$$400 = \left(\frac{2a+9}{3} + (2a+9)\right)^2 + \left(\frac{2b}{3} + 2b\right)^2 = \frac{16}{9}\left[(2a+9)^2 + (2b)^2\right] =$$

$$\frac{16}{9}\left[4(a^2+b^2) + 36a + 81\right] = 16\,[4 \cdot 4 + 36a + 9] = 16(25 + 36a)$$

de donde $a = 0$ y $b = 6$. Ahora tenemos un par de formas de hallar el área, que consisten en:

1. Usar que AA' y BB' son perpendiculares y sumar áreas de triángulos: APB, $A'PB$ y APB' son rectángulos en P con áreas respectivas $(6 \cdot 9)/2 = 27$, $(6 \cdot 9)/2 = 27$ y $(6 \cdot 3)/2 = 9$. En el triángulo $A'PC$ el lado $A'P$ mide 6 y la correspondiente altura es la coordenada horizontal de C, luego el área es $(6 \cdot 9)/2 = 27$. En el triángulo $B'PC$ el lado $B'P$ mide 3 y la correspondiente altura es la coordenada vertical de C, luego el área es $(3 \cdot 12)/2 = 18$. El área total es pues $27 + 27 + 9 + 27 + 18 = 108$.

2. Aplicar la fórmula de Herón: Los lados miden

$$x = BC = \sqrt{18^2 + 12^2} = 6\sqrt{13} \qquad y = AB = \sqrt{9^2 + 6^2} = 3\sqrt{13} \qquad z = AC = \sqrt{9^2 + 18^2} = 9\sqrt{5}$$

y por tanto el área es

$$\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)} = \frac{1}{4}\sqrt{[(x+y)^2 - z^2] \cdot [z^2 - (x-y)^2]} =$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{[81 \cdot 13 - 81 \cdot 5] \cdot [81 \cdot 5 - 9 \cdot 13]} = \frac{1}{4}\sqrt{81 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 32} = \frac{1}{4}\sqrt{2^8 \cdot 3^6} = 2^2 \cdot 3^3 = 108$$

4. Demuestra que es imposible obtener un cubo yuxtaponiendo tetraedros regulares del mismo tamaño.

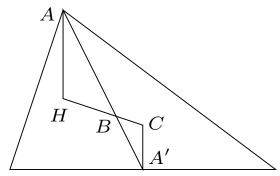
   Solución: Si fuera posible, una cara del cubo quedaría formada por la yuxtaposición de caras de los tetraedros, pero es imposible obtener los ángulos rectos de un cuadrado yuxtaponiendo los ángulos de 60 grados de triángulos equiláteros.

   Observaciones: No hace falta suponer que los tetraedos tienen el mismo tamaño. Hay otros argumentos para ver que un cuadrado no se puede formar yuxtaponiendo triángulos equiláteros iguales que pueden resultar más generalizables. Por ejemplo, si el lado del cuadrado mide C y el del triángulo mide T, pensando en la longitud de los lados tendríamos $C = nT$ con n entero, y pensando en las áreas tendríamos $C^2 = m\frac{\sqrt{3}}{4}T^2$ con m entero, de donde se deduciría que $\sqrt{3}$ es racional.

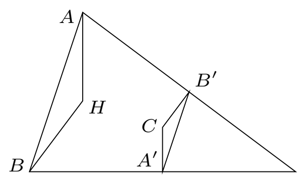
5. Demuestra que, en cualquier triángulo, la distancia de un vértice al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a ese vértice.

   Solución geométrica 1: Sean AA' una mediatriz, H el ortocentro y C el circuncentro. Consideramos además el baricentro B, y usamos las dos propiedades siguientes: (1) H, B y C están alineados. (2) B divide al segmento AA' en "dos tercios más un tercio", o sea $AB = 2\,BA'$.

   Como AH y $A'C$ son paralelos (perpendiculares al lado opuesto a A), los triángulos AHB y $A'CB$ son semejantes y la razón de semejanza es 2, por lo que $AH = 2\,A'C$ (y $HB = 2\,BC$, de modo que B también divide al segmento HC en "dos tercios más un tercio").

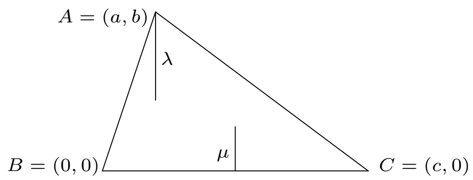


   Solución geométrica 2: Una opción similar que no requiere las propiedades del baricentro es la siguiente: sean A y B los vértices del dibujo, y A' y B' los puntos medios de los lados opuestos. Entonces $A'B'$ es paralelo a AB y la mitad de largo; también AH es paralelo a CA' (perpendiculares al mismo lado) y por la misma razón son paralelos BH y CB'. En definitiva los triángulos AHB y $A'CB'$ son semejantes con razón de semejanza 2, por lo que $AH = 2\,A'C$



   Solución analítica: Consideramos uno sistema de referencia ortogonal con origen en B y eje horizontal en BC, de manera que $C = (c, 0)$ y $A = (a, b)$ para ciertos a, b, c. Sean además λ la distancia de A al baricentro y μ la distancia del lado BC al circuncentro.

   Si $a = 0$ el triángulo es rectángulo en B, por lo que el ortocentro está en B y así $\lambda = b$, y el circuncentro es el punto medio de AC, y así $\mu = b/2$. Podemos pues suponer que $a \neq 0$.



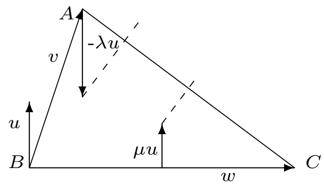
   Entonces el baricentro tiene coordenadas $(a, b-\lambda)$ y la recta que lo une con B tiene pendiente $(b-\lambda)/a$.

   El circuncentro tiene coordenadas $(c/2, \mu)$, y el segmento que lo une con el punto medio de AC, o sea con $((a+c)/2, b/2)$, tiene pendiente $(b - 2\mu)/a$.

   Estos dos segmentos son perpendiculares a AC, luego tienen la misma pendiente y por tanto $\lambda = 2\mu$.

   Observación: Se puede dar λ en función de a, b, c: Como AC tiene pendiente $b/(a-c)$, sus perpendiculares tienen pendiente $(c-a)/b$, de donde se deduce que $\lambda = 2\mu = (b^2 + a^2 - ca)/b$.

Solución vectorial: En el dibujo, consideramos los vectores $v = BA$ y $w = BC$, y llamamos u a un vector ortogonal a w. Si u es colineal con v el triángulo es rectángulo y este caso particular se resuelve como antes, de modo que podemos suponer que u y v son linealmente independientes.



Si λ es la distancia de A al baricentro, éste es el extremo de $v - \lambda u$, y por tanto la dirección de este vector es ortogonal a AC.

Si μ es la distancia del lado $BC = w$ al circuncentro, éste es el extremo de $\frac{1}{2}w + \mu u$. El vector que une el circuncentro con el punto medio de AC es $\frac{1}{2}(v + w) - (\frac{1}{2}w + \mu u) = \frac{1}{2}v - \mu u$. Éste vector también tiene dirección ortogonal a AC, luego es colineal con $v - \lambda u$. Por tanto existe un escalar t con $v - \lambda u = \frac{t}{2}v - t\mu u$, y de la independencia lineal se sigue que $t = 2$ y $\lambda = 2\mu$.

Observación: Como la dirección de AC es la de $w - v$, éste vector es ortogonal a $v - \lambda u$ y por tanto podemos dar el valor de λ en términos de productos escalares (usando que $u \cdot w = 0$) como:

$$0 = (v - \lambda u) \cdot (w - v) = v \cdot (w - v) + \lambda\, u \cdot v \quad\Rightarrow\quad \lambda = \frac{v \cdot (v - w)}{v \cdot u}$$

6. Halla todas las soluciones reales de la ecuación $3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-z-x} = 1$.

Solución: Si fueran productos en vez de sumas manipularíamos mejor la expresión. La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica permite relacionar lo que tenemos con lo que deseamos:

$$1 = \frac{3^{x^2-x-y+1} + 3^{y^2-y-z+1} + 3^{z^2-z-x+1}}{3} \geq \sqrt[3]{3^{x^2-x-y+1} \cdot 3^{y^2-y-z+1} \cdot 3^{z^2-z-x+1}} =$$

$$\sqrt[3]{3^{(x^2-2x+1)+(y^2-2y+1)+(z^2-2z+1)}} = \sqrt[3]{3^{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}} \geq \sqrt[3]{3^0} = 1$$

por tanto las desigualdades son igualdades, y la última implica que $(x-1)^2 = (y-1)^2 + (z-1)^2 = 0$ y por tanto $x = y = z = 1$. Como ésta es claramente una solución, es la única solución de la ecuación.

7. Un plano ecualizador de un conjunto de puntos del espacio es un plano cuya distancia a cada uno de esos puntos es la misma. ¿Cuántos planos ecualizadores hay para un conjunto de cuatro puntos no coplanarios?

Solución: Un plano ecualizador Π de cuatro puntos no coplanarios P_1, P_2, P_3, P_4 debe verificar:

1. Π no deja los cuatro puntos en el mismo semiespacio (estarían todos en un plano pararlelo a Π).
2. Si Π deja dos de esos puntos en el mismo semiespacio entonces Π es paralelo a la recta que los une.
3. Si Π deja dos de esos puntos en semiespacios distintos entonces Π pasa por su punto medio.

Entonces hay un único plano ecualizador que aísla a P_1 en un semiespacio: el que pasa por los puntos medios de P_1P_2, P_1P_3 y P_1P_4 (si estuvieran alineados lo estarían P_2, P_3, P_4 y los cuatro serían coplanarios). Por tanto hay exactamente cuatro planos ecualizadores que aíslan un punto en un semiespacio.

Y hay un único plano ecualizador que deja P_1P_2 a un lado y P_3P_4 al otro: el determinado por esas dos direcciones (que son distintas) y por el punto medio de P_1P_3. Por tanto hay exactamente tres planos ecualizadores que dejan dos puntos en cada semiespacio.

Estos siete planos son pues todos los que hay, y son distintos entre sí pues cada uno establece una partición diferente de los P_i "según semiespacios".

8. Si p es un número primo, encuentra todas las soluciones enteras x, y de la ecuación $p(x + y) = xy$.

Solución: Como p divide a xy podemos asumir que divide a x, digamos $x = ap$ (si p divide a y se obtienen soluciones simétricas). Sustituyendo en la ecuación inicial y simplificando p se tiene:

$$ap + y = ay \;\Rightarrow\; \begin{array}{c} y = a(y-p) \\ ap = y(a-1) \end{array} \;\Rightarrow\; ap = a(y-p)(a-1)$$

Para $a = 0$ se obtiene la solución trivial $x = y = 0$. Para $a \neq 0$ se obtiene $p = (y - p)(a - 1)$, luego algún factor vale ± 1; como $a - 1 \neq -1$, quedan tres posibilidades:

$$a - 1 = 1 \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} x = 2p \\ y = 2p \end{array} \qquad y - p = 1 \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} x = p(p+1) \\ y = p+1 \end{array} \qquad y - p = -1 \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} x = p(1-p) \\ y = p-1 \end{array}$$

Las tres satisfacen la ecuación y por tanto ésas y sus simétricas (además de la trivial) son todas las soluciones de la ecuación dada.

9. Sea $b_n = 1 + n^3$ y sea $d_n = \mathrm{mcd}(b_n, b_{n+1})$. Calcula el mayor valor que puede tomar d_n.

Solución: Los primeros valores de b_n son 2, 9, 28, 65, 126, 217, 344, 513, 730, 1001, …Cada dos consecutivos son coprimos salvo $126 = 7 \cdot 18$ y $217 = 7 \cdot 31$, de modo que $d_5 = 7$. Yendo más allá en los ejemplos parece que la respuesta será 7. Para comprobarlo basta ver que si un primo p divide a b_n y a b_{n+1} entonces $p = 7$. Observemos primero que b_n y b_{n+1} tienen distinta paridad, luego $p \neq 2$.

El juego consiste ahora en ir bajando el grado en n de las expresiones a las que divide p. El primer paso es claro: p divide a $b_{n+1} - b_n = 3n^2 + 3n + 1$.

Ahora conseguimos otra expresión de grado 2: p divide a $n(3n^2+3n+1)-3b_n = 3n^2+n-3$. Combinando las expresiones de grado 2 encontramos una de grado 1: p divide a $(3n^2 + 3n + 1) - (3n^2 + n - 3) = 2n + 4 = 2(n + 2)$ y por tanto divide a $n + 2$.

Ahora conseguimos otra expresión de grado 1: p divide a $3n(n + 2) - (3n^2 + 3n + 1) = 3n - 1$. Combinando finalmente las expresiones de grado 1 vemos que p divide a $3(n + 2) - (3n - 1) = 7$.

10. Demuestra que, si a, b, c, d son enteros positivos con $ab = cd$, entonces $N = a + b + c + d$ no es un número primo.

Solución: Se tiene $aN = a^2 + ab + ac + ad = a^2 + cd + ac + ad = (a + c)(a + d)$; si N fuera primo dividiría a $a + c$ ó a $a + d$, que son enteros positivos estrictamente menores que N.

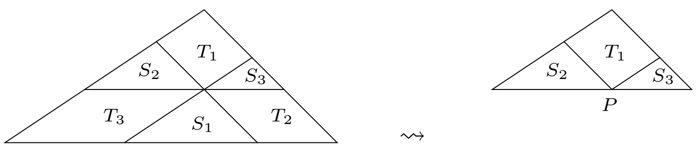
11. Dado un entero $k \geq 1$, definimos $b_k = \overbrace{11\ldots1}^{k}$ como el número cuya expresión en base diez consiste en un 1 repetido k veces. Demuestra que b_k divide a b_n si y sólo si k divide a n.

Solución: Si $n = mk$ entonces $b_n = (1 + 10^k + 10^{2k} + \cdots + 10^{(m-1)k})b_k$, lo que nos da el "si".

Para el "sólo si" supongamos que b_k divide a b_n y que k no divide a n. Entonces $n = mk + r$ con $0 < r < k$; por lo anterior b_k divide a b_{mk}, luego divide a $b_n - 10^r b_{mk} = b_r$, que es no nulo y menor que él: imposible.

12. En un triángulo de área S, las paralelas a los lados por un punto interior P dividen al triángulo en tres triángulos de áreas S_1, S_2 y S_3 y tres paralelogramos. Demuestra que $S \leq 3(S_1 + S_2 + S_3)$.

Solución: Tenemos la siguiente situación:



donde T_i es el área del paralelogramo "opuesto" al triángulo de área S_i. La paralela horizontal por P determina un triángulo superior con el punto P en uno de sus lados y con paralelas por P a los otros dos lados que lo dividen en los dos triángulos de áreas S_1 y S_2 y el paralelogramo de área T_1.

Si vemos que $T_1 \leq S_2 + S_3$ (o sea, $T_1 + S_1 \leq S_1 + S_2 + S_3$) tendremos la desigualdad buscada repitiendo el argumento a partir de cada una de las otras dos paralelas y sumando las tres desigualdades.

Veamos pues que en el triángulo de la derecha se tiene $T_1 \leq S_2 + S_3$, o sea $A \leq 2(S_2 + S_3)$ si llamamos A a su área total. No es restrictivo suponer que el lado horizontal vale 1, y entonces P lo divide en dos partes de longitudes a y b con $a + b = 1$. El triángulo de área S_2 es semejante al de área A con factor de proporcionalidad a, luego $S_2 = a^2 A$ y análogamente $S_3 = b^2 A$. Basta por tanto ver que $1 \leq 2(a^2 + b^2)$ con $a + b = 1$, o sea que $1 \leq 2[a^2 + (1 - a)^2] = 4a^2 - 4a + 2 = (2a - 1)^2 + 1$, lo cual es cierto.

Obsérvese que la igualdad $S = 3(S_1 + S_2 + S_3)$ sólo se da si se dan las tres igualdades del tipo $T_1 = S_2 + S_3$, y que éstas sólo se dan si $a = 1/2$, o sea si P es el punto medio de los segmentos que lo contienen, lo que significa que P es el baricentro del triángulo.