XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase
Primera sesión
Viernes mañana, 23 de enero de 2009

1. Se define la función h(t) como $h(t)=\dfrac{5}{5+25^t}$, $t\in R$. Se pide calcular la suma

$$2\left[h\left(\frac{1}{2009}\right)+h\left(\frac{2}{2009}\right)+\ldots+h\left(\frac{2008}{2009}\right)\right].$$

2. Si la sección producida por un plano al cortar un tetraedro regular es un paralelogramo, probar que necesariamente el paralelogramo es un rectángulo.

3. Se consideran un cubo de $1cm$ de arista y dos vértices, A y B, diagonalmente opuestos de una cara del cubo. Se denomina camino de longitud n a una sucesión de $n+1$ vértices de forma que dos consecutivos están a $1cm$ de distancia.

¿Cuál de los siguientes números es mayor:

- el número de caminos de longitud $1000\,cm$ que empiezan y acaban en A, o
- el número de caminos de longitud $1000\,cm$ que empiezan en A y acaban en B?

Justificar la respuesta.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 2 horas y media.

XLV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 23 de enero de 2009

4. Dado un triángulo acutángulo ABC, determinar para qué puntos de su interior se verifican a la vez las siguientes desigualdades:

$$1 \le \frac{\angle APB}{\angle ACB} \le 2, \qquad 1 \le \frac{\angle BPC}{\angle BAC} \le 2 \quad \text{y} \quad 1 \le \frac{\angle CPA}{\angle CBA} \le 2.$$

5. La igualdad 2008 = 1111 + 444 + 222 + 99 + 77 + 55 es un ejemplo de descomposición del número 2008 como suma de números distintos de más de una cifra, cuya representación (en el sistema decimal) utiliza un sólo dígito repetido. Se pide:

i) Encontrar una descomposición de este tipo para el número 2009.

ii) Determinar para el número 2009 todas las posibles descomposiciones de este tipo que utilizan el menor número posible de sumandos (el orden de los sumandos no se tiene en cuenta).

6. Se tienen en el plano $3n$ puntos: n de color blanco, n de color azul y n de color negro. Cada uno de los puntos está unido con puntos de color distinto al suyo mediante $n+1$ segmentos exactamente. Probar que hay, al menos, un triángulo formado por vértices de distinto color.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 2 horas y media.